PUNTO DI SVOLTA

FRANCOIS VIÈTE

QUANDO COLLOCARLO? → **1540-1603**
CONTESTO STORICO→ È il periodo delle guerre di religione che avvengono in Francia. Molto famosa è la strage degli Ugonotti che erano convenuti a Parigi per le nozze del capo dei partiti ugonotti. Queste guerre di religione tra il partito protestante e cattolico si trascinano fino agli anni 90 del secolo quando Enrico IV diventa re di Francia. Viète ha una formazione giuridica e non è un matematico. Viète non ha tempo di pubblicare le sue opere
OPERE

- **1615** postuma"**de emendatione et ricognizione equazionum →**
  - ➔ La novità di Viète è di introdurre nell'algebra il calcolo letterale, quello che noi impariamo in prima seconda liceo→ l'inizio della strada per tradurre un problema geometrico in un problema algebrico
- **Isagoge in artem analyticam**
  Da questo piccolo e fondamentale saggio traspare quell'atteggiamento e quella visione d'insieme che in qualche modo determinarono in Viète anche la concezione della geometria. Nell'Isagoge sono descritti da un lato i metodi dell'analisi e dall'altro i fondamenti delle tecniche di manipolazione algebrica.
  - ➔ la logistica speciosa
    (chiuso per somma e per prodotto).
  - ➔ distinguere tra le grandezze incerte (o ignote)e note.
  - ➔ I teorema dell'algebra
- I **1592: "Effectionum Geometricarum canonica recensio**"--> tutte le equazioni di 2° si traducono in costruzioni geometriche
- e nel **1593 "supplementum geometrie→** Per risolvere la duplicazione del cubo, trisezione dell'angolo, due medie proporzionali chiede che gli venga concesso un nuovo **postulato**→ ovvero che dato un punto tra due rette date e un punto si possa inserire una retta di lunghezza data che passi per quel punto.
  - ➔ Dopodiché fa vedere che la trisezione dell'angolo equivale a una equazione di terzo grado caso irriducibile,
  - ➔ mentre duplicazione del cubo equivale a una equazione del secondo grado di tipo puro $x^3 = a$, **quindi a suo avviso tutti i problemi di geometria sono risolti.**
  - ➔ Dato anche al fatto che ha mostrato come le eq di 4° si riducono a quelle di 3° riprendendo Ferrari e Cardano
- **1593 Zeteticorum libri quinque.**

COSA FA IN ALGEBRA
Zeteticorum libri quinque. + De aequationum recognitione et emendatione→ trattare tutti i tipi di equazione.

1) legge di omogeneità e uso di quantità solo positive
2) soluzione equazioni di 3° e 4°
3) formula generale per la risoluzione dei problemi diofantei
4) I teorema dell'algebra
5) il teorema sulle funzioni simmetriche elementari → formule di Viète

COSA FA IN GEOMETRIA

effectionum geometricarum canonica recension + supplementum geometrie→
E' una rassegna standard delle operazioni geometriche, ad ogni operazione viene collegata una equazione o una operazione algebrica.

1) costruisce una corrispondenza tra equazione e costruzione geometrica.
2) Nel **supplementum geometrie** introduce un assioma e dimostra che si può risolvere un'equazione pura di terzo grado e un'altra sulla trisezione dell'angolo.
3) Egli mostra che qualunque equazione di quarto grado si può ridurre a una di terzo che a sua volta si riduce a $A^3 = B$ oppure a $A^3 + pA = q$ → irriducibile

ALTRO

- Viète è tra i primi a cercare di affrontare i libri che Pappo descrive nel settimo libro della collezione: **dati tre cerchi trovarne uno che sia tangente a loro tre.** È uno dei problemi descritto nella collezione, è il libro sui contatti di Apollonio.

INFLUENZE

1) Lui vuole utilizzare l'algebra come strumento dell'analisi geometrica.
2) Viète concepisce l'algebra come mirata ad essere applicata alle geometrie le sue equazione devono essere omogenee.
3) risolve i problemi della matematica greca
4) in algebra dimostra che le equazioni di 4° si riconducono al 3°
5) risolve il problema di diofanto in maniera generale
6) Viète è importante non solo nei risultati che ottiene ma anche per il linguaggio che introduce.
7) Viète trova un'unificazione tra la nuova tradizione della matematica antica e la tradizione algebro-abachistica.
8) sarà solo a partire dalla fine degli anni 20 inizio anni 30 che l'algebra di Viète trova il suo continuatore ovvero Pierre de Fermat.
9) interpreta questo discorso dell'analisi e della sintesi, inventando l'algebra simbolica e inaugura la corrente dei "restauratori"
10) Esclude le quantità negative perché lui vuole applicare la sua algebra alla geometria.

IN PIÙ'

Benchè l'algebra fosse una disciplina antica, alla fine del XVI secolo essa non solo non era ben distinta dall'aritmetica ma anche non aveva basi logiche solide. La storia dell'Algebra si può dividere in tre periodi:

1) ***algebra retorica*** , anteriore a Diofanto di Alessandria (250 d.C.) nella quale si usa esclusivamente il linguaggio naturale, senza ricorrere ad alcun segno;
2) ***algebra sincopata***, da Diofanto fino alla fine del XVI secolo, in cui si introducono alcune abbreviazioni per le incognite e le relazioni di uso più frequente, ma i calcoli sono eseguiti in linguaggio naturale;
3) ***algebra simbolica***, introdotta da Viète (1540-1603), nella quale si usano le lettere per tutte le quantità e i segni per rappresentare le operazioni, si utilizza il linguaggio simbolico non solo per risolvere equazioni ma anche per provare regole generali. La

moltiplicazione veniva espressa con il termine latino ***in***, la divisione era indicata dalla linea di frazione, e per l'uguaglianza Viète usava un'abbreviazione del latino ***aequalis***.

Nel tentativo di sostituirle il termine arabo di algebra, che non gli piaceva, Viète aveva osservato che in problemi che comportavano la "cosa" o quantità ignota, si procedeva generalmente nella maniera che Pappo e gli antichi avevano descritto come **analisi**. Ossia, invece di procedere da ciò che è noto a ciò che si doveva dimostrare, gli algebristi invariabilmente partivano dall'assunzione che l'incognita fosse data e ne deducevano una conclusione necessaria dalla quale era poi possibile determinare l'incognita. In pratica, l'analisi deve essere seguita dalla dimostrazione sintetica.Viète diede il nome di "***arte analitica***" a questa disciplina.

- Il trattato che fa da cardine a tutta l'opera viètiana è infatti ***In artem analiticam Isagoge del 1591.***
  Da questo piccolo e fondamentale saggio traspare quell'atteggiamento e quella visione d'insieme che in qualche modo determinarono in Viète anche la concezione della geometria. Nell'Isagoge sono descritti da un lato i metodi dell'analisi e dall'altro i fondamenti delle tecniche di manipolazione algebrica.
  Il **Cap. I dell'Isagoge** inizia facendo appunto riferimento ai due classici metodi (dell'analisi e della sintesi). L'analisi - dice Viète - fu inventata per le ricerche matematiche da Platone. L' analisi è un metodo mediante il quale si prende come concesso ciò che si domanda e si giunge passo dopo passo ad una verità incontestabile. Nella sintesi al contrario si parte da ciò che è assegnato per giungere all'obiettivo che è la tesi, cioè a quel che si domanda.
  Per Viète sono tre i tipi di analisi (ars analytica) che si possono condurre in matematica: la **Zetetica, la Poristica e la Retica esegetica**; i primi due - come afferma - erano noti anche agli antichi (Pappo) , il terzo viene invece proposto da lui. Volendo riassumere, lo schema metodologico viètiano consiste in quanto segue.

1) **Enunciazione del Problema** (da «risolvere»).
2) **Zetetica**: prima fase dell'analisi che partendo dai dati del problema conduce ad una prima uguaglianza o ad una proporzione. La parola zeteticum proviene dal greco:vuol dire «cercare», «indagare». Pertanto zetetico sta per problema.
3) **Poristica**: seconda fase dell'analisi. Dalla precedente uguaglianza (cioè da dove arriva la Zetetica), sviluppando grazie alle regole algebriche, si giunge («ci si apre») ad una nuova uguaglianza, dalla quale scaturisce la soluzione del problema.
4) **Enunciazione del Teorema, in base al risultato della Poristica.**
5) **Sintesi:** si procede in modo inverso rispetto all'analisi, «dimostrando» cioè il teorema.
6) **Retica esegetica**: consiste nel dare un senso geometrico o aritmetico al risultato della Poristica.

- Ma il cuore del «programma viètiano» sono gli ***Zeteticorum libri quinque*** (1593) che rappresentano la trattazione per eccellenza dell'arte analitica, la presentazione e la risoluzione di problemi algebrici con ottica geometrica nell'ambito della logistica speciosa.

- Alla teoria delle equazioni algebriche Viète dedica il ***De aequationum règcognitione*** (pubblicato postumo nel 1615) con l'intento di esaminare, sempre alla luce della logistica speciosa, i risultati degli algebristi del Cinquecento su questo argomento. Proprio nel De recognitione troviamo l'aspetto più rilevante dell'operazione teorica vièiana di geometrizzazione dell'algebra. Questa viene sostanzialmente realizzata mediante la riduzione delle equazioni ad opportuni zetetici. Infatti ridurre a zetetici significa in ultima analisi ricondursi alla teoria delle proporzioni, cioè, tenendo presente il libro V degli Elementi euclidei, alla forma più astratta della geometria classica.

È in questo modo che, come potremmo dire, Viète getta un ponte tra l'algebra e la geometria. Prima di lui tanto Diofanto quanto gli algebristi del Cinquecento avevano presente per lo più gli aspetti aritmetici dell'algebra, anche se, come sappiamo, vanno considerate le costruzioni geometriche delle equazioni. Queste costruzioni ebbero peraltro un ruolo teorico primario.

MARINO GHETALDI

QUANDO COLLOCARLO→ muore nel 1629, conosce Viete
OPERE→

- **Apollonius illyricus** pubblicato nel **1611** e poi con un supplemento nel **1613**
  → problema delle inclinazioni
  → problema del rombo
- Nel **1630** quando pubblica un testo "**de risoluzione et compositione"** ovvero su analisi e sintesi matematica in cui fa vedere come tutti i problemi che si riducono a equazioni di primo e secondo grado se ne può costruire la soluzione algebrica.

CARATTERISTICHE

- non pubblica la parte algebrica, pubblica solo le costruzioni geometriche
- La cosa interessante è nel quinto libro, ovvero in problemi che non cadono sotto l'algebra, tra questi c'è il problema del rombo. Questo fa vedere le difficoltà tra cosa si possa o non possa fare. Dal problema del rombo si ottiene un'equazione di 4° grado completa, non si sa come collegarla all'algebra, e come collegarla a problemi piani. Ma dato che il problema è piano l'equazione deve essere di secondo grado oppure riconducibile a una biquadratica. Cartesio darà une trattazione semi-completa del problema risolvendolo per il caso del quadrato. Bisogna aspettare Newton per una trattazione soddisfacente del problema, l'equazione di 4° grado si riconduce a una biquadratica.

INFLUENZA

- con François Viète che allora lavorava alla ricostruzione dell'opera perduta di Apollonio; Ghetaldi collaborò con Viète al progetto, servendosi della descrizione del contenuto fatta da Pappo di Alessandria.Ghetadi usa l'algebra vietiana per ricostruire un libro di Apollonio, presenta un tipo di approccio completamente diverso da quello di Viète. Se Viete all'equazione associa una costruzione geometrica, Ghetaldi cerca di interpretarla. L'idea diventa quindi l'interpretazione della formula.
- si intuisce che Ghetaldi stava applicando l'algebra alla geometria; la formalizzazione della geometria analitica introdotta da Descartes seguì pochi anni più tardi.

- La ricostruzione effettuata da Ghetaldi del lavoro di Apollonio fu tradotta in linguaggio simbolico dal francese Pierre Hérigone nel suo lavoro *Cursus mathematicus* del 1634. Questa stessa ricostruzione ebbe un'eco anche nel diciottesimo secolo nel lavoro di tre scienziati inglesi: John Lawson, Samuel Horsley e Reuben Burrow

CARTESIO

QUANDO COLLOCARLO→ **1596- 1650**

IN CHE CONTESTO→ dispone di terre. Dopo aver studiato dai gesuiti si dedica alla carriera militare

OPERE→

1) **1637 discorso sul metodo per ben condurre la propria ragione e trovare la verità nelle scienze**"--> Dubbio sistematico
2) **la meteora**
3) **la diottrica**
4) **Geometrié**.--> è il primo testo che noi possiamo leggere come se si trattasse di un testo moderno→ **La geometriè è centrata intorno al "problema di Pappo".** gran parte di questa opera si svolge **attorno al problema di Pappo**. La prima innovazione è l'abbandono del principio di omogeneità vietiano, inoltre facendo vedere come si possono interpretare somme prodotti o estrazioni di radici medianti linee. A differenza di Viète, Cartesio propone l'interpretazione diretta delle equazioni. La Geometrie è divisa in tre libri:
   a) Inizia con una Nuova Analisi algebrica dei problemi geometrici applicata a Pappo.
   b) nel secondo libro si ha la questione di cosa sono le linee curve.
   c) Inizia con un trattato sui polinomi . Nel terzo libro si ha lo studio dei problemi geometrici che conducono a equazioni di grado maggiore o uguale a 3.

CONCETTO DI LUOGO DI PAPPO→ Per noi il luogo geometrico è l'insieme dei punti che godono di una certa proprietà, questo non è ammissibile nella geometria greca. Il luogo per i matematici greci deve essere visto come: **hai una curva con in essa una certa proprietà, bisogna quindi vedere se tale proprietà è caratteristica della curva, si deve dimostrare che tale proprietà è sintomatica**

APPROFONDIMENTI

- come risolva i problemi di 2°cartesio
- somma,prodotto ed estrazione di radice
- Quindi tutti i problemi fino a secondo grado si sanno costruire e per le equazioni di grado superiore? Il problema viene diviso in due:
  1. Costruire l'equazione risolvente
  2. Trovare dove cadono i punti

INFLUENZA

1) Se con Viète si avevano delle grandezze, qui tutto resta nell'ambito delle linee. In qualche modo le rette di Cartesio diventano un modello universale su cui lavorare, dovemmo aspettare fino '800 per far si che queste rette diventino numeri reali.
2) Da Cartesio in poi il mondo della geometria è il mondo delle curve che possono essere descritte mediante equazioni, le curve algebriche.
3) **Problemi ordinati da Cartesio:**

- Primo genere: equazioni di primo e secondo grado
- Secondo genere: equazioni di terzo e quarto grado

4) il problema di trovare la tangente ad una curva data apre il sipario alla matematica moderna.

5) la tangente si cerca in una curva generale. Questo introduce l'oggetto polinomio

6) Le operazioni che fa **Hudde** è una cosa che ha senso sul polinomio, no sull'equazione. Così come tutto il metodo dell'idea di Cartesio Però ha allo stesso tempo un limite, le curve che ha escluso, ci sono e sono sempre più presenti.

PROBLEMA DI PAPPO

1) Come lo risolve Pappo→ per 3/ 4 linee i punti vanno a cadere in sezioni coniche da ⅚ linee vanno a cadere in luoghi sconosciuti
2) Come lo affronta Cartesio→ lo divide in due fasi
   a) Fa vedere come la distanza si esprima in termini lineari in funzione delle quantità incognita, questo significa che il problema si riduce a equazione di secondo grado (nel caso di 4 linee).
   b) Poi la domanda è come trovare i punti per equazioni di grado superiore al secondo?
      La risposta a questa domanda è data nel terzo libro, col problema della costruzione dell'equazione. Secondo Cartesio le curve ammissibili in geometria sono quelle che cadono sotto una misura precisa ed esatta, ovvero quelle generate da un movimento continuo senza interruzioni. La spirale di Archimede non è ammissibile secondo Cartesio. Se quindi bisogna ammettere in geometria sono solo quelle sopra descritte allora queste possono essere messe in corrispondenza con delle equazioni polinomiali.

PROBLEMA DELLE TANGENTI

Gli antichi erano in grado di trovare tangenti, vedi Apollonio. Qui cambia che la tangente si cerca in una curva generale.

1) Considera un polinomio in due variabili e lo eguaglia a 0 $F(x,y)=0$
2) Anziché cercare la tangente cerca la normale ovvero la perpendicolare alla tangente.
3) Se io considero un cerchio che abbia centro sull’asse di riferimento, in generale intersecherà la curva in due punti.
4) Se io voglio il cerchio tangente cioè quello che mi fornisce il raggio normale alla curva dovrò chiedere che l’intersezione fra il cerchio che ha raggio normale alla curva e il cerchio generico che ha il centro sull’asse x abbia una sola soluzione

I calcoli iniziano a semplificarsi. **Jan Hudde** notò che un polinomio ha una radice doppia se e solo se $Q1(x)$ ha una radice nello stesso punto.
Verso la fine del 700 il metodo delle tangenti si è trasformato in un calcolo, che però è molto difficile da potersi applicare. Se la curva algebrica non si esprime sotto forma di polinomio, non è possibile applicare questo tipo di calcoli.

FERMAT

1) Egli parte dai luoghi piani (altra opera di Apollonio), a partire da questa opera arriverà a concepire il luogo come quello cartesiano.
2) La curva a partire da cartesio Fermat viene vista come generata da una equazione.
3) Fermat dimostrerà che tutte le equazioni di secondo grado rappresentano coniche.

4) Fermat pubblica un metodo per trovare le tangenti→ il metodo applicato alla parabola:L'idea è di leggere la proprietà caratteristica invece che sulla curva stessa, sulla tangente.

Osserviamo che il "rigore Euclideo" si è molto allentato. Il metodo di Fermat permette di affrontare quello che i metodi algebrici non potevano fare. Si può avere un calcolo che permetta di trovare la tangente e tutto quello che la tangente consegue senza arrestarsi alle radici quadrate? Sì ed è quello che fa Leibniz. Tra il 1591 e il 1684 troviamo: isagoge di Viète, la Geometrie di Cartesio, nova methodus di Leibniz, si può dire che la matematica moderna venga fuori da questi tre libretti.

LEIBNIZ

calcola la tangente alla curva usando i differenziali→ problema risolto con **De Baunne**