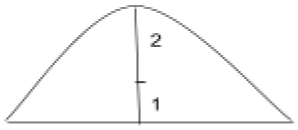
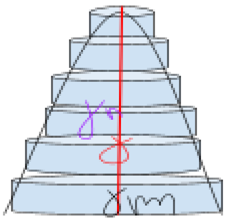
LEZIONE 20→ 30-11-2020

volta scorsa
Volta scorsa abbiamo visto il fenomeno del ritorno dei grandi classici. Questa matematica deve essere integrata e dominata, per capirla tutta. Sono presenti due o più strade:

1) integrazione matematica (Maurolico)
2) integrazione filologica (Commando).

Commandino pubblica una serie di opere, e questo ha un'importanza enorme perché rende disponibili sul mercato matematico una grande quantità di testi commentati che si prestano a essere studiati, e vanno oltre il testo stesso (in quanto sono commentati e comprensibili molto meglio).
Commandino ha una importanza particolare perché oltre questo ruolo di diffusione della matematica classica, egli è il primo a pubblicare un lavoro originale in cui cerca di riprendere la tradizione della matematica antica. Dovendo cercare di riportare alla chiarezza originaria il testo originale di Archimede (sotto incarico di Marcello Cervini), non solo si studia Archimede e Apollonio, ma rendendosi conto che è necessaria una teoria dei centri di gravità dei solidi, pubblica un libretto intitolato **"Liber de centro gravitatis solidorum" (1565),** in cui dice che non è concepibile che Archimede possa dire qualcosa senza dimostrarlo, quindi cerca di ricostruire una teoria adeguata per giustificare tale risultato. Per fare questo si ispira ai lavori di Archimede.
Per quanto riguarda invece il secondo libro fa una cosa simile. Commandino si rende conto che tale ragionamento vale in entrambi i casi, quindi per il centro di gravità di altre figure basta trovare degli approssimanti giusti.
Dato un paraboloide di rotazione o conoide parabolico vuole dimostrare che il centro di gravità sta nel punto individuato da Archimede ovvero sta nell'asse nel rapporto 1:2. Comincia col dimostrare che se tu hai una figura fatta da cilindri circoscritti e gamma è il centro di gravità del paraboloide si può costruire una figura fatta di cilindri inscritti tale che la differenza tra gamma e gamma n sia piccola a piacere- l'ho scritto in maniera anacronistico. Commandino ha scritto gamma n perché si può dare per certo che il centro di gravità della figura circoscritta (gamma n) stia sopra il centro di gravità del paraboloide (gamma). Questa cosa non è scontata. Poi dimostra anche che si può costruire una figura fatta di cilindri il cui centro di gravità disti da quello del paraboloide per una piccola quantità





$|\gamma n - \gamma| < \varepsilon$ $\qquad$ $\gamma - \gamma m < \varepsilon$

Questa cosa non è scontata perché si può dimostrare che

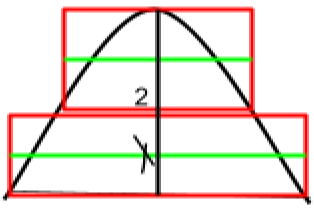
γn *sta sopra* γ *e* γm *sta sotto* γ

γn *centro di gravità approssimante esterno e* γm *centro di gravità approssimante interno*

Nel nostro linguaggio si ricava che la successione dei centri di gravità delle figure circoscritte e inscritte converge al centro di gravità del paraboloide.

Poi fa un ragionamento buffo.

Dato il nostro paraboloide consideriamo il punto lambda che divide l'asse nel rapporto 1:2. Commandino vuole dimostrare che ogni volta che si passa da una divisione in due(rosso) a una divisione in 4(rosso+verde) i centri di gravità dell'approssimante esterno e interno si avvicinano al punto lambda e questo succederà ogni volta che si raddoppia



$\Gamma 2 - \gamma > \Gamma 4 - \gamma$ e $\gamma - \gamma 2 > \gamma - \gamma 4$ e cioè $\Gamma_{2^{n+1}} - \gamma > \Gamma - \gamma$

Ma lui dimostra il caso particolare e non quello generale

Il secondo merito di quest'opera sta nei difetti, lui lascia il problema aperto.

Quindi con Commandino si apre il filone di ricerca di determinare i centri di gravità delle figure studiate da Archimede. Questo sarà un problema che interesserà molti matematici negli ultimi anni del '500 tra cui **Cristoforo Clavio e Galileo** (sceglie il problema di determinare il centro di gravità dei solidi per affermarsi). Ma colui che darà un contributo chiave introducendo un nuovo punto di vista sarà un allievo di Clavio, **Luca Valerio** 1553-1618.

Luca Valerio

Entra a 17 anni nella compagnia di Gesù e si contraddistingue per le sue capacità nel campo della logica del greco e della matematica. È al servizio di alcune potenti famiglie romane come i Colonna o gli Aldobrandini e in particolare Ippolito Aldobrandini diventa Papa Clemente VIII e grazie a lui, Valerio diventa lettore alla Sapienza di Roma, prima di Greco e di Matematica e poi di filosofia morale e matematica e manterrà il suo posto fino alla morte.

Approccio di Valerio

(Opera **Subtitium indagationes liber primus seu quadratura circuli et aliorum curvilineorum"** **(1558)** è un testo immaturo. La cosa importante è la parte evidenziata. Valerio vuole quadrare il cerchio usando il filo a piombo. Valerio per arrivare alla quadratura del cerchio (molto importante per i matematici di quel tempo) inventa un metodo che gli permette di quadrare qualunque figura, questa è la cosa importante.

Lui la nasconde questa opera. Galileo glielo chiede ma lui risponde di non saperne niente. Attenzione: le figure non sono proprio tutte, sono quelle che hanno determinate proprietà: frontiera convessa/concava.

Ragionamento:

Uso il filo a piombo, posso quadrare qualunque figura, non proprio tutte, solo quelle con determinate proprietà e quindi studio quelle con le proprietà interessate.

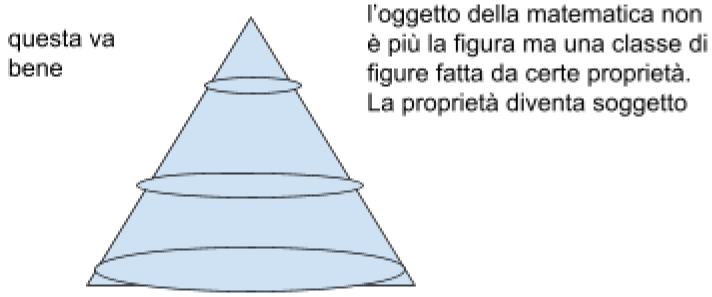
De centro gravitatis solidorum libri tres

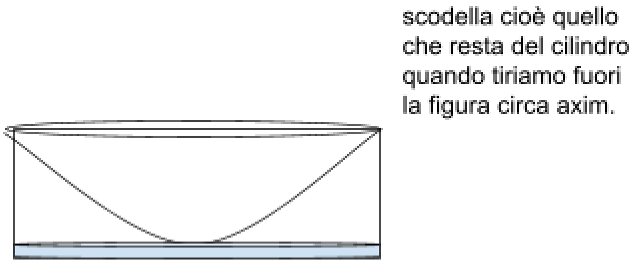
Questo tipo di ispirazione lo si vede nella sua opera più importante: **"I de centro gravitatis solidorum libri tres"** pubblicato a Roma nel **1604.**

Valerio invece di partire dalle singole figure che hanno una certa proprietà, prende quella certa proprietà e la trasforma nella definizione di una classe di figure, quale è tale proprietà? La proprietà interessata è quella che ci permette di dimostrare la proposizione 19 di Archimede. **Mi serve che le sezioni vadano uniformemente decrescendo dal basso verso l'alto**. Così nella proposizione 6 del primo libro considera le figure piane e le figure solide e dimostra che le figure piane che godono della proprietà detta(che la figura digrada uniformemente) possono essere approssimate con figure piane la cui differenza tra esterno e interno sia piccola a piacere, una volta identificata questa classe di figure che lui chiama figure digradanti attorno ad un'asse (per le solide) o attorno ad un diametro (per le piane), ha il lemma di approssimazione e il teorema che di dice che il centro stia sull'asse. **Figurae circa axim in partem deficentes**. **L'innovazione è il fatto che l'oggetto non sia più la figura ma la proprietà, una classe di figure.**

Inoltre in questo modo Valerio riesce a ricoprire una gamma di figure anche oltre a quelle che studia Archimede , in quanto vanno bene anche le figure concave. Archimede studiava solo figure convesse.

In I.22
Dimostra che ogni figura digradante(in termini moderni vuol dire che la funzione è monotona)(circa axim in partem deficentes.) ha il centro di gravità sull'asse.

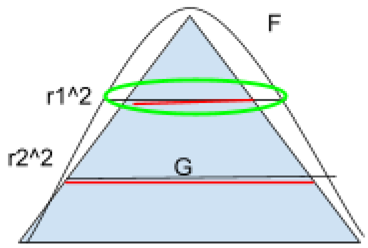




Valerio fa una grande rivoluzione, ma tuttavia resta sostanzialmente dentro quel mondo (il mondo greco), non arriva a pensare che vanno bene tutte le figure, pensa che vadano bene solo le figure di rotazione.

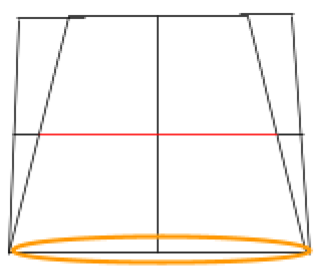
Cosa fa Valerio di Nuovo?
Trova il centro di gravità di molte figure, altra cosa importante è che in questa sua tendenza alla generalizzazione presenta una proposizione in cui condensa le varie tecniche usate nell'antichità e in qualche modo **è l'inventore del metodo di esaustione**. (funzione con doppia riduzione ad assurdo). Lui dimostra che :
II libro proposizione 1,2,3,
date due grandezze A e X di cui X è ignota e A è nota e vogliamo studiare il rapporto X:A. Se noi abbiamo delle grandezze E e F che approssimano rispettivamente X e A e sai che E:F stanno in un rapporto dato → anche X: A sono in quel rapporto.
Questo è un risultato notevole perchè da adesso tutte le volte che mi trovo in una situazione esaustiva non devo ricostruire tutta la riduzione ad assurdo come nella XII.2 di Euclide. Rispetto ad Euclide e Archimede lo fa in generale:
Valerio dimostra libro II prop 32:

supponiamo di avere due figure(solide o piane o una e una) F,G (circa axim) digradanti circa un medesimo asse o diametro + proprietà X tale che se prendiamo due sezioni abbiamo che la sezione 1 di F e la sezione 2 di G siano proporzionali cioè **S1(F):S2(F) = S1(G):S2(G) → centro di gravità di F= centro di gravità di G. E’ un teorema generale di riduzione di centro di gravità di una figura a un’altra figura che si conosce.** L’esempio che sta dietro è che questo è il paraboloide.
Supponiamo che F sia un paraboloide e G un triangolo. questa proprietà è soddisfatta perché le sezioni di F sono cerchi(in verde) e i cerchi stanno fra loro come i quadrati dei raggi cioè→
S1(F):S2(F) = $r_1^2 : r_2^2$
Ma questa è una parabola e r1 e r2 sono le ordinate della parabola e le ordinate stanno fra loro come le ascisse
S1(F):S2(F) = $r_1^2 : r_2^2 = x1 : x2$
Ma x1 e x2 stanno fra loro come i due segmenti in rosso, perchè questi due sono triangoli simili ovvero come le sezioni di G
S1(F):S2(F) = $r_1^2 : r_2^2 = x1 : x2 = S1(G) : S2(G)$
Quindi la dimostrazione che il centro di gravità del paraboloide coincide con quello del triangolo ammessa la proposizione 32 del libro II è immediata e cioè il centro di gravità del paraboloide divide l’asse nel rapporto 1:2.



Inoltre questo affermerà la veridicità del problema che aveva esasperato Commandino e cioè che il centro di gravità del tronco di paraboloide è uguale a quello del trapezio. Prendo il tronco (in giallo)

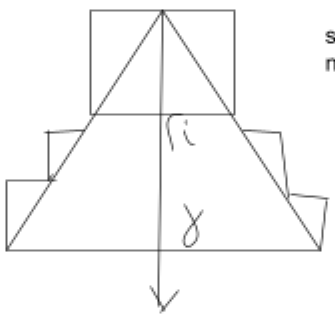
il centro di gravità del tronco di paraboloide dividerà
l’asse come lo divide il centro di gravità del trapezio



Lo aveva già fatto Maurolico è possibile che ha copiato da lui? No
Valerio stabilisce qualcosa che nessuno prima di lui aveva fatto:

1) determinare usando la prop 32 il centro di gravità dell'emisfero, del segmento di sfera e dell'ellissoide
2) il teorema è generale che vale per quasi tutte le figure (circa axim o circa diametro)di rotazione.

La dimostrazione che Valerio fa si basa sul fatto che se io prendo degli approssimanti delle figure F e G i centri di gravità degli approssimanti devono comportarsi allo stesso modo perché gli approssimanti li prendo dalle sezioni e quindi siccome le sezioni di F e G sono proporzionali allora la successione dei centri di gravità degli approssimanti di F e G converge nello stesso punto
Quello di cui Valerio ha bisogno è di dimostrare che i centri di gravità degli approssimanti a delle figure circa axim e diametro convergono al centro di gravità della figura in questione.
Questo lo aveva fatto Commandino nel paraboloide e anche Maurolico però Commandino aveva dei limiti nel suo approccio Maurolico limiti non ne aveva se non il fatto che faceva un calcolo esplicito. Cioè lui diceva che ogni volta che raddoppiavo la divisione il centro di gravità delle figure si avvicinava di ⅙ dell'altezza del cilindro approssimante.
Valerio è in un caso più difficile perché non ha nessuna proprietà delle figure che vuole studiare. Comincia dal II.29 e II.30 e II.31
II.30
Data una figura circa axim/diametro (triangolo) digradante con il centro di gravità γ allora il centro di gravità delle figure approssimanti dall'esterno Γi sta sempre sopra γ

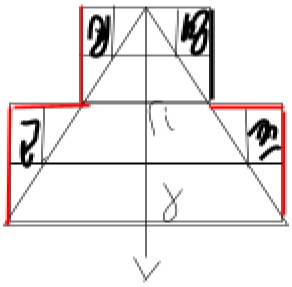


se oriento l'asse in questo modo
noi diremmo che

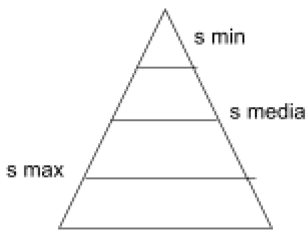
$\Gamma i < \gamma$

e noi diremmo che γ è *una limitazione* superiore per Γi
Che è quello che Commandino non aveva dimostrato. Valerio lo dice nella prefazione.
II.29
Dimostra che la successione è monotona cioè che se io passa da $\Gamma i \rightarrow \Gamma 2i$
$\Gamma 2i > \Gamma i$ Cioè se io raddoppio tutto quanto
II.31
Dimostra che Γi è un estremo superiore di γ
La prop 32 deriva da queste.

In particolare il problema di Commandino è che non si rende conto che la dimostrazione che lui fa per il paraboloide è in realtà generale l'unica cosa che non dimostra è che γn sta sopra γ. Quindi Valerio deve far vedere questa ultima cosa. Come fa?
Noi abbiamo la nostra figura e vorremmo far vedere che ogni volta che raddoppio il centro di gravità scende. Basta far vedere che quando passo da una divisione a quella doppia il cdg scende. Devo far vedere che quando io passo dalla divisione rossa a quella nera quello che tolgo di sotto è < di quello che ho tolto di sopra. Cioè perché scenda il cdg quando passo al nero vuol dire che levo più di sotto che di sopra.



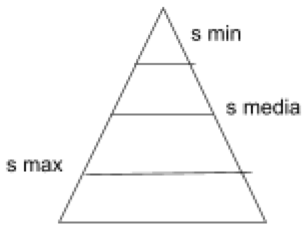
Quindi lui dice che se io ho una figura circa axim e la divido in 3 parti



perchè succeda che il cdg scenda basta chiedere che $\frac{smin}{smedia} < \frac{smedia}{smax}$
Il teorema II-32 si applica non a tutte le figure digradanti ma a una sottoclasse di quelle li. $\frac{smin}{smedia} < \frac{smedia}{smax}$ **Questa è una condizione sufficiente ma non necessaria.**
Questo fatto è significativo, perché dà l'idea che Valerio più di cercare il centro di gravità del paraboloide, dell'iperboloide e dell'emisfero, cerchi delle dimostrazioni per figure più generali, anche se alla fine abbandona l'idea.
Lui ha inventato il metodo di esaustione come vero e proprio metodo. Vede cosa c'è di comune nelle dimostrazioni di Euclide, Archimede e le trasforma in un teorema ma lui ha un'attitudine metodologica come si vede nella II.32. **Ora abbiamo il metodo per ridurci al cdg di una figura che non conosco a uno che conosco.**

LEZIONE 21→ 04-12-2020
Volta scorsa

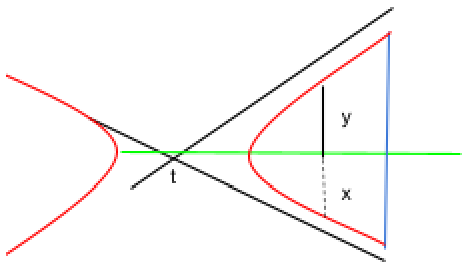
La volta scorsa abbiamo visto come Valerio ispirandosi alle opere di Commandino o forse anche Maurolico, sicuramente all'opera dell'equilibrio dei piani e conoidi e sferoidi, compie un passo decisivo che distacca la sua opera da tutta la matematica precedente. La sua ricerca ha come oggetto una proprietà, in particolare una classe di figure: quelle monotone, la cosa importante è che le sezioni vadano digradando dal basso verso l'alto. Questa è una classe di figure piuttosto vasta e con un solo teorema dimostra che tutti i solidi Archimedei hanno il centro di gravità sull'asse.
Osserviamo inoltre che Valerio nella dimostrazione del Teorema II.32 (vedi lezione scorsa) ha la necessità di limitare la classe di figure da prendere in esame. Il teorema da lui trattato non è semplicissimo a causa del linguaggio e degli strumenti che possiede inoltre deve introdurre delle ipotesi che restringono il campo di interesse. Per dimostrare il suo teorema:



ha bisogno che $\frac{smin}{smedia} < \frac{smedia}{smax}$

Queste sezioni possono essere cerchi,ellissi,segmenti a seconda della figure che stiamo trattando. Se noi abbiamo la classe di tutte le figure digradanti il suo teorema si applica a una sottoclasse M. Lui quando deve trattare di una figura precisa come l'iperboloide deve dimostrare che I(iperboloide) appartiene a M . All'inizio del III libro si accorge che le figure convesse C rientrano nella classe delle figure a cui è applicabile il teorema→ C contenuto in M. E quindi la dimostrazione dell'iperboloide è nulla perché è chiaro che l'iperboloide è convessa. In Valerio c'è la consapevolezza che tra gli oggetti della matematica ci POSSONO essere classi di figure. Questo perché Valerio è fortemente condizionato dalla matematica cha ha a che fare.

COME TROVA IL CDG DELL'IPERBOLOIDE:



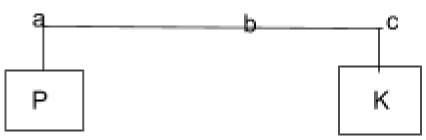
Data la nostra iperbole (rosso) la faccio ruotare attorno al diametro (verde) e

al suo asse(azzurro) e vogliamo trovare il centro di gravità.
Prendiamo una sezione dell'iperboloide in x che è proporzionale al quadrato dell' ordinata , cioè del raggio che è y.
Si(x):: y^2
Ma il quadrato di un'ordinata di un'iperbole è uguale(Secondo Apollonio)
y^2=px+qx^2 dove p è il lato retto e q= p/t dove t è il diametro
Ora questa y^2=px+qx^2 la posso scomporre in due pezzi:
1) y^2=px → Sezione di un paraboloide in x Sp(x)
2) y^2=qx^2→ Sezione di un cono in x Sk(x)
quindi la sezione dell'iperboloide in x è proporzionale a Sezione di un paraboloide in x + Sezione di un cono in x

Si(x):: Sp(x)+Sk(x)
Qui Valerio dimostra che cono, paraboloide e iperboloide sono figure per cui vale $\frac{smin}{smedia} < \frac{smedia}{smax}$

Poi posso applicare il teorema II.32 e si applica da una parte al solido iperboloide e dall'altro al paraboloide sommato con il cono cioè una figura un po' fantastica. Che figura si ottiene con P+K?
Valerio si rende conto di questa cosa infatti dopo II.32 c'è un grande corollario che spiega che può applicarsi anche alla somma di due figure.
Quindi lo usa qui e dice che il centro di gravità dell'iperboloide è uguale al centro di gravità del solido che si ottiene con la somma di un cono e di un paraboloide. Quest'ultimo si può provare.

immaginiamo di avere una bilancia in cui da una parte è appeso il paraboloide e dall'altra abbiamo il cono. Il centro di gravità del paraboloide + cono dividerà questa bilancia in un punto che sarà il centro di gravità in modo tale che ab : bc = Cono : Paraboloide. Questo rapporto si può comunque determinare



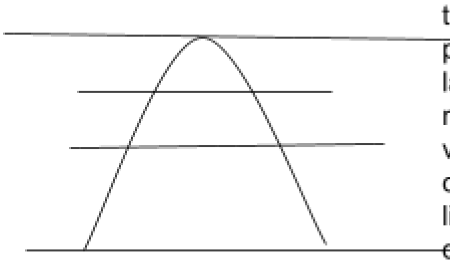
Procedure che lo portano fuori dal modus operandi della geometria greca:

1. Questo teorema è ottenuto applicando un teorema di carattere generale: da fig. ignota a fig. nota.
2. Fa intervenire in maniera NON euristica (come non fa Archimede nel Metodo con la sfera) all'interno della dimostrazione un solido impossibile, come visto prima.

Valerio a questo punto si spaventa. Il terzo libro è dedicato a ri-dimostrare il risultato sopra analizzato senza far intervenire la somma di un paraboloide e di un cono. In questa appendice lui abbandona tutto l'approccio sopra descritto, e dice che preferisce una "via più naturale" diciamo che quasi spaventato dalla sua audacia rifluisce sui metodi archimedei.

Bonaventura Cavalieri.

Egli è un matematico nato nel 1598 a Suna (forse) in Verbania (sul lago maggiore) piccola cittadina. Entra nell’ordine dei Gesuati (ordine molto più antico dei gesuiti creato nel medioevo) è appassionato di matematica, e successivamente viene mandato a Pisa. Lì insegna Benedetto Castelli, un allievo di Galileo. Castelli gli affida il compito di tenere lezioni al posto suo, vede che è in gamba e lo presenta a Galileo. Proprio in questi anni, forse influenzato da Galileo, (1620) concepisce una teoria che chiamerà **"teoria degli Indivisibili"**. Successivamente grazie all’appoggio di Galileo ottiene la cattedra di matematica a Bologna. Nel **1630** (forse) pubblica **“geometria invisibilibus nuova cadam retione promota”** (=geometria sviluppata grazie agli indivisibili con un certo metodo nuovo).
Questo nuovo metodo di Cavalieri consiste di obiettivi più generali di quelle di Valerio, che ha comunque studiato e per cui porta grande rispetto, lo descriverà come “l’Archimede dell'età nostra”. La classe di figura a cui Cavalieri vuol fare riferimento è la classe di qualunque figura (è un po' tanto). Con questa classe lui prende in considerazioni anche figure con buchi, figure del tutto irregolari e bucherellate… andiamo a finire in un ambito molto complicato nel quale gli strumenti del 600 non sono sufficienti per trattare figure di questo tipo. L’idea di Cavalieri è quella di accostare alle figure altri oggetti (ad esempio da una figura puoi distaccare il suo volume, il suo peso) ed usare una specie di teoria delle proporzioni che sta prendendo sempre più piede. (lo stesso Galileo nella descrizione della legge oraria, distacca la velocità lo spazio e il tempo, viste come grandezze geometrizzate) La grandezza che vuole staccare Cavalieri è la collezione di tutte le sezioni delle figure (o tutte le linee della figura) o i suoi indivisibili, nel caso di un fig. solida sono tutti i piani.



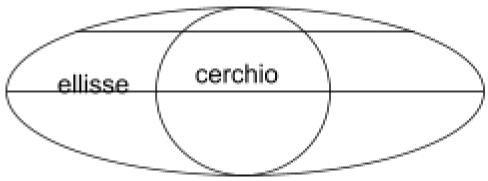
tu hai una figura la metti tra due parallele e poi fai muovere una parallela verso l’altra se la figura è piana. Se la figura è solida si mette fra due piani e fai muovere un piano verso l’altro. Tutte queste sezioni saranno chiamate prese insieme tutte le linee omnes linee della figura o i suoi indivisibili. Nel caso ~~di una~~ figura solida avremo tutti i piani

Problema:

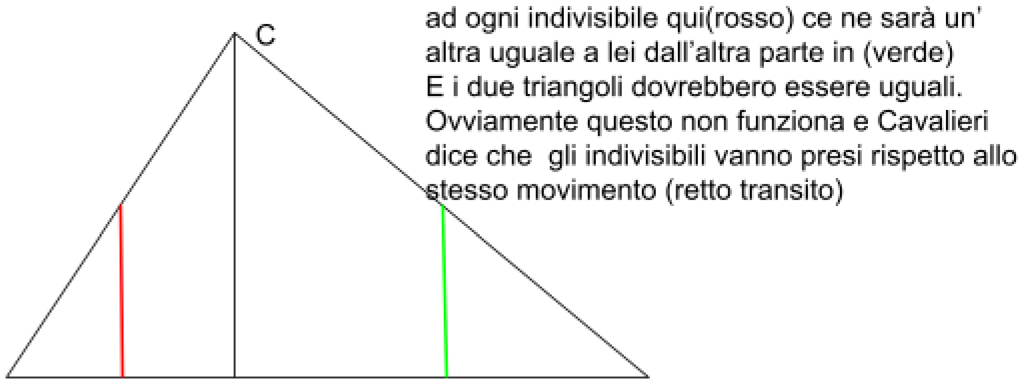
una figura non è fatta dai suoi indivisibili (una retta non è fatta di punti, è un segmento prolungabile). L’ambizione di Cavalieri sarebbe di mostrare che:

“**due figure stanno tra loro come tutte le linee della prima figura stanno a tutte le linee della seconda**”, cioè F1 : F2 = OL1 : OL2 (OL=omnes linee) in questa maniera non si afferma che il continuo sia costituito dagli indivisibili, ma si tirano fuori dal continuo i suoi divisibili. Se prendiamo un ellisse e un cerchio, tutte le linee dell’ellisse hanno un rapporto costante con tutte le linee del cerchio, quindi l’ellisse sta al cerchio come asse maggiore sta al diametro.

ellisse : cerchio = asse maggiore : diametro



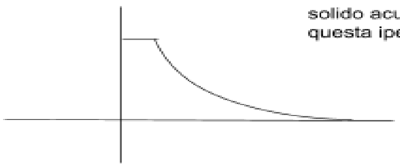
Punto importante: La classe OL (collezione di tutte le linee) è tale da poter applicare ai suoi oggetti la teoria delle proporzioni?, da cui viene la seconda domanda: “cosa è un multiplo di tutte le linee della figura?” Una soluzione parziale alla prima domanda è confrontare le linee a due a due, in altre parole appoggiarsi a quello che faceva Archimede nel Metodo pur senza saperlo. Sullo sviluppo di questa teoria rimangono però molteplici interrogativi, la domanda due suscita molti dubbi. Qui Cavalieri si infila in problemi non da poco, dove i ragionamenti sono **zoppicanti**. Uno degli scogli di fronte a cui Cavalieri si arena è un teorema di questo tipo (che è costretto a usare in molte sue dimostrazioni): “se $\frac{a}{b} = \frac{a_1}{b1} = \frac{a_2}{a_2} = \frac{a_n}{b_n} \rightarrow \frac{\Sigma a_i}{\Sigma b_i} = \frac{a}{b}$ Questo risultato per Cavalieri è vitale in molte situazioni, ma **deve riuscire a passare dal finito all’infinito,** lo fa ma senza mai dimostrare la validità di questo passaggio. Questo assomiglia molto al lemma 11 del Metodo, hai dei rapporti che valgano sezione per sezione, vuoi che valgano tutti insieme.
Nonostante il fatto che la teoria sia fallimentare e nonostante le forti critiche venute fuori esempio quelle degli indivisibili di un triangolo :



Al di là di tutto questo il metodo degli indivisibili di Cavalieri ha avuto molto successo. Questo metodo ha fatto sì che

1. si possano classificare figure simili in maniera generale,
2. ottenere risultati molto generali,
3. creare figure nuove ha dato la luce a parabole di ordine superiore (vedi primitiva di integrale)
4. studiare problemi strani cioè data una placca trovare il centro di gravità in cui il peso specifico della placca varia in maniera uniformemente accelerata cioè col quadrato della distanza e sarà una delle teorie più in voga fino alla fine del '600, sarà ripresa da Pascal, Leibniz stesso.

Il fatto importante è che in un certo senso: **"Archimede sta a Valerio come Valerio sta a Cavalieri"** questo perché Cavalieri nel 1647 (**de esercitatione matematica)** cercherà di dimostrare il suo principio del metodo degli indivisibili. Prende una figura qualsiasi e rifacendosi a quello che aveva fatto Valerio cerca di scomporla in un numero finito di parti monotone (simile Funzione monotona è integrabile). **Quindi Il recupero della geometria classica produce sì un nuovo punto di vista (Archimede, commandino/maurolico, valerio, cavalieri), però nella produzione di questo nuovo punto di vista si ha un reflusso sullo step precedente: Archimede tratta una figura alla volta, Valerio tratta classi di figure solo monotone, troppo precise (quelle digradanti) Cavalieri fa il passo più lungo della gamba e la sua teoria ricade su quella valeriana afflosciandosi si su stessa, così come quella valeriana ricade alla fine su Archimede. È come se la nuova matematica archimedea entra in un vicolo cieco.** Anche perché questi nuovi metodi si applicano a ben poche cose, il metodo degli indivisibili di Cavalieri non si applica a molto, bisogna inventarsi cose strane: placche con densità che varia in maniera uniformemente accelerata. Un allievo Castelli, altro matematico geniale (forse il più tra quelli trattati qui) **Evangelista Torricelli** (muore giovane, **1648** circa) che applicando e sviluppando i metodi di Cavalieri arriverà a sviluppare un tipo di matematica barocca scrivere **"de quadratura parabola"** dove propone 20/40 quadratura delle parabola fatte con metodi archimedei e degli indivisibili, studierà la spirale logaritmica, il solido acutissimo (solido di rotazione fatto ruotare da una iperbole).



solido acutissimo si ottiene facendo ruotare
questa iperbole che ha volume finito

il recupero della matematica archimedea produce un nuovo approccio generale della matematica , bisogna studiare classi di figure ma questo porta a un vicolo cieco. Parallelamente a questo vicolo cieco ne abbiamo un altro: diverso dalla matematica umanistica che abbiamo affrontato ultimamente, ovvero quello della matematica dell'abaco.

Matematica dell'abaco

Anche qui ci si trova di fronte a una situazione di difficile soluzione.
Sia un'equazione di terzo grado, la formula è un radicale complicato.

$x^3 + px + q = 0$

$$\sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} \cdot - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

Il discriminante $\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}$ di un'equazione di terzo grado può essere sia positivo che negativo, **in particolare il delta è negativo se e solo se** $x^3 + px + q = 0$ **ha tre radici reali.** È una situazione imbarazzante perché gli algebristi a partire da Cardano riescono a trovare le soluzioni, nonostante la formula risolutiva non gliele fornisca.

Cosa può essere la radice quadrata di un numero negativo? In modo che la formula risolutiva abbia sempre senso. **Il vero punto in gioco è cosa è una radice cubica?** Per loro una radice cubica ha una sola soluzione.

A questa domanda risponde un grande matematico: **Rafael Bombelli,** egli era di Bologna (nato nel 1526, morto nel 1572). Bombelli è un ingegnere idraulico, il suo lavoro lo porta nella bonifica delle paludi pontine, in ambito romano. Egli conosce Anton Maria Pazzi che insegna alla Sapienza di Roma, e gli presenta un codice di Diofanto. Bombelli ha già pubblicato: **"la parte maggiore dell'aritmetica"** (pubblicata nel **1572**) divisa in tre parte: la prima tratta dei radicali quadratici e cubici, la seconda equazioni e la terza problemi. La terza parte è tipica della tradizione abachista (talora difficili), ma dopo aver conosciuto Pazzi, si mettono a tradurre Diofanto e la terza parte la riscrive da capo sotto forma di problemi diofantei. Questi problemi sono soggetti a essere trattati con radici radicali e teoria di equazioni che ha sviluppato nel secondo libro.

Elementi importanti:

1. Fa il suo ingresso nella tradizione dell'algebra arabo abachista Diofanto. È importante perché Diofanto tratta problemi che hanno soluzioni razionali o intere. Ora si pone il problema delle soluzioni con radici con radicali ecc…
2. Il secondo elemento importante è l' applicazione dell'algebra (da Bombelli sviluppata) a problemi geometrici non senza difficoltà, si

chiama **algebra sincopata,** ovvero non è algebra con parole e basta ma è algebra anche con simboli. Per esempio per $x^3 + 3x = 5$ lui scriverebbe (3)+3(1)→ 5

Bombelli è uno dei primi a trattare problemi che si traducono in equazioni quadratiche o biquadratiche e trovare il risultato via costruzioni geometriche

IL contributo per cui Bombelli ci è più noto è quello relativo ai **numeri complessi.** Nella formula risolutiva delle equazioni di terzo grado compare:

$\sqrt[3]{a+\sqrt{b}}$ questa Bombelli la chiama radice cubica legata.

Nella prima parte dell'opera lui discute di come si possono sciogliere le radici cubiche legate.Già era presente in Euclide nel X libro in termini di grandezze.

$\sqrt[3]{a+\sqrt{b}} = \sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}$. Di questo si occupa il I libro.

Ad un certo punto lui dice di aver trovato altri tipi di radici cubiche legate che servono per equazioni di terzo grado, questo avviene quando la radice è negativa da cui i**ntroduce un nuovo sistema di segni**.

Dato che +.+=+ e +.-=- Per avere un qualcosa che moltiplicata per se stessa mi dia - introduce il " più da meno" e le regole con cui questi segni funzionano sono:

1) $\sigma \, x \, \sigma = -$
2) $-\sigma \;\; x \; -\sigma = -$
3) $-\sigma \;\; x \;\; \sigma = +$

Lui chiama più da meno un nuovo segno tale che moltiplicato per se stesso da meno, e deduce così tutte le nuove regole di moltiplicazione. **Bombelli introduce questo nuovo segno per dare senso al radicale negativo**. Riuscire a risolvere quella radice cubica come somma di 2 numeri complessi equivale a risolvere una equazioni di terzo grado con discriminante negativo, è un cane che si morde la coda

Anche la tradizione abachista del '500 che ha conosciuto grandi risultati si ritrova al pari della sua sorella umanista in un vicolo cieco. Come la matematica ha fatto a uscirne?

LEZIONE 22→ 07-12-2020

Volta scorsa

Abbiamo visto come "la nuova matematica antica" che si fonda sulla lettura della matematica classica: Euclide, Archimede, Apollonio Teodosio… si componga di tre caratteristiche importanti:

1. da una parte si ha il cambio dell'oggetto matematico che però diventa problematico perché si infrange la regola aurea della matematica classica
2. fatica a trovare il giusto punto di generalità (ancora troppo specifico per Commandino, troppo generale per Cavalieri)
3. l'ultima cosa sono le classi che sono scarsamente popolate di individui, gli oggetti rimangono essenzialmente quelli della matematica greca. Una volta studiati gli oggetti greci, poi questa matematica tende al barocco un eccessivo riempimento, vedi Torricelli con le 20 quadrature della parabola

Questa matematica entra in un vicolo cieco, come successe per Archimede, a causa della individualità che avevano gli oggetti nella matematica greca.
Un po' la stessa cosa succede con la matematica abachista. Vedi Bombelli.

Bombelli

Sia l'equazione $x^3+px+q=0$ abbiamo la formula risolutrice di Tartaglia-Ferrari-Cardano:

$$\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}+\sqrt[3]{-\frac{q}{2}\cdot-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}} \quad (*)$$

questa ha vari problemi:

1) se il discriminante $\Delta=\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}<0$ a differenza dell'equazione di secondo grado (che non abbiamo soluzioni) abbiamo soluzioni in R, ad esempio:
   $x^3=15x+4 \rightarrow$ 4 è soluzione perchè 64=15.4+4.
   Ma se vado a mettere queste soluzioni $x^3-15x-4=0$ in (*) il
   $\Delta=\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}=4-\frac{15^3}{27}<0$
   Quindi la soluzione 4 da dove viene fuori?
   C'è di peggio, se considero:

$x^3+x-2=0 \rightarrow$ ha come soluzione 1 . Ma se metto questi numeri nella formula (*)mi viene fuori che $1=\sqrt[3]{1+\sqrt{1+\frac{1}{27}}}+\sqrt[3]{1-\sqrt{1+\frac{1}{27}}}$

Per noi le equazioni di 3° hanno 3 radici. Quando diciamo $x^3=1 \rightarrow$ per noi ci sono 3 radici di cui una è 1 e le altre due sono le radici dell'unità. Ma questo è completamente sconosciuto all'algebra abachistica

La risoluzione di equazioni di terzo grado occupa moltissimo tempo, inizia dal '300 e si sviluppa nel '400 fino a Cardano. Il tentativo di Bombelli di uscire da questa strada cercando di introdurre un "nuovo segno" (i) tale che i*i=-, **è una cosa che riesce a superare il caso irriducibile solo in certe situazioni,**

ovvero solo quando sai estrarre una radice cubica di un numero complesso, cosa che non si riesce a fare in generale (se vuoi farlo in generale ricadi nel problema di partenza), vedi esempio:

$\sqrt{a+ib} = x+iy$ Provo a risolverla. Elevo al cubo → a+ib =
$x^3 - iy^3 + 3i(x^2y) - 3(x\,y^2) = (x^3 - 3xy^2) + i(3x^2y - y^2)$

In alcuni casi questo sistema si risolve. Per esempio

$\sqrt[3]{2+11i} =$ { 2= $x^3 + 3xy^2 = x(x^2 - 3y^2)$
{11= $y(3x^2 - y^2)$

Questo caso particolare si risolve ma in generale no

$\sqrt[3]{a+bi} =$ { a= $x^3 + 3xy^2 = x(x^2 - 3y^2)$
{b= $y(3x^2 - y^2)$

Nonostante Bombelli abbia dimostrato che in certi casi si riesce a risolvere il sistema, nel caso generale però no. Bombelli quindi nonostante porti la tradizione abachista ad alti livelli si trova in un **vicolo cieco.**

La congiunzione tra queste due tradizioni porta a una rivoluzione che culmina con **De Cartes**

Diofanto

Egli compare nella scena matematica per la prima volta nel **1575**, quando viene tradotto per la prima volta.

Oss: l'algebra si diffonde in tutta Europa grazie **all'ars magna di Cardano**

Diofanto diventa una sfida per applicare questi metodi algebrici nella aritmetica diofantea stessa, da cui nasce una diatriba che dura fino ad oggi: "Diofanto è il padre dell'algebra?", Per Bombelli sì (e gli Arabi? Perché si pensava che gli arabi fossero il padre dell'algebra). **Diofanto quindi costituisce una specie di ponte tra tradizione abachista e quella greca.**

Il secondo elemento fondamentale che si verifica verso la fine del secolo è la pubblicazione delle collezioni di Pappo.

Pappo viene tradotto in latino da **Commandino e pubblicato nel 1589**, la collezione di Pappo offre un panorama nuovo ai matematici di fine '600 inizi '500. In questo libro troviamo cose importanti quali:

1) (nel terzo libro) classificazioni di problemi in piano, solidi e problemi di linea.
2) introduzione di curve diverse dalle coniche: cissoide, concoide, quadratrice, ripresa delle spirali archimedee.
3) esposizione di Corpora testuali e in particolare Del corpus dell'analisi, qui abbiamo l'esposizione di una serie di test (non pervenuti all'occidente latino)i: i data di Euclide, Contatti, Inclinazioni luoghi piani sezione di rapporto sezione d'area sezione determinata, le coniche tutto questo di Apollonio, poi i Porismi di Euclide, luoghi solidi di Aristeo. Ed

inoltre per la gran parte di queste opere Pappo, oltre che a fornire un riassunto, fornisce anche una serie di lemmi dedicati a spiegarne punti difficili.

4) tutte queste opere si fondano sull'**approccio "efodos"**, approccio dell'analisi e della sintesi. Cenni a questo si trovavano anche in Eutocio, Archimede, Apollonio (coniche). Oltre a quello che dice Pappo nell'analisi e nella sintesi, avevano a disposizione esempi che spiegassero questo metodo. Tale metodo consiste che:

Prop 1 di Sfera e Cilindro

Data una sfera costruire un cilindro uguale a lei. Archimede dice: supponiamo di averlo già fatta mediante dei passaggi logici arriva alla tesi.
Analisi: problema già risolto e sviluppare un ragionamento che permetta di arrivare a uno dei dati del problema.
Quindi verso la fine del 500 si ha la diffusione di Diofanto. Egli come già accennato prima viene visto come ponte, come la dimostrazione che l'algebra è una disciplina matematica degna di essere studiata e coltivata.
In Pappo invece abbiamo tutta una serie di problematiche:

1. prima di tutto un aumento del vestiario matematico (altre curve da studiare)
2. l'esigenza che i problemi vadano classificati (è una classificazione abbastanza rozza)
3. una serie di sfide perché molti testi sono perduti. Per questi matematici (vedi Commandino) la sfida è di colmare questa lacuna.

Questo complesso si verrà a sbloccare grazie all'opera di **Francois Viète.**

Francois Viète 1540-1603

Questo è un periodo molto travagliato. È il periodo delle guerre di religione che avvengono in Francia. Molto famosa è la strage degli Ugonotti che erano convenuti a Parigi per le nozze del capo dei partiti ugonotti. Queste guerre di religione tra il partito protestante e cattolico si trascinano fino agli anni 90 del secolo quando Enrico IV diventa re di Francia. Per diventare re si converte al cattolicesimo e inizia un'opera di pacificazione e rilancio della potenza francese. In questo periodo chi è Francois Viète?
Egli non è un accademico (è un matematico) ha una formazione giuridica, e in particolare diventa segretario di una casata importante. Quasi tutta la sua vita viene spesa prima al servizio dei Partenes, poi come membro del parlamento di Tur (città francese sulla Loira) poi consigliere di re, cariche molto importanti a livello di ministro, sottosegretario del consiglio. Quindi in tempi così difficili in cui è facile sbagliare mosse, **Viete non ha tempo di pubblicare le sue opere**

matematiche. Queste vengono pubblicate a pezzi e bocconi. Altre opere sue vengono poi pubblicate da collaboratori, segretari, amici. Un'altra opera fondamentale dedicata alla teoria delle equazioni il cui titolo è **"de emendatione et ricognizione equazionum**" sarà pubblicata postuma nel **1615**. Quindi Viet compie una vera e propria rivoluzione nel campo dell'algebra, che però richiede diverso tempo. Questo perché egli è estraneo alla vita accademica ha poco tempo per sviluppare le sue opere e non fa parte del "giro dei matematici", vengono stampate in posti periferici, scritte in un linguaggio completamente nuovo. **Introduce i termini parabolismo e ipobasismo** (dividere per il termine noto o per l'incognita rispettivamente). **Lui vuole utilizzare l'algebra come strumento dell'analisi geometrica**. Però è qualcosa non facile da fare perché l'algebra trattata fino a quell'epoca è un tipo di algebra retorica o numerica. Questa strada era già stata seguita dagli arabi, Fibonacci, Montano, Bombelli. **La novità di Viète è di introdurre nell'algebra il calcolo letterale, quello che noi impariamo in prima seconda liceo,** e questa è la strada che permette di tradurre un problema geometrico in equazione algebrica.

Cosa c'è in questa opera?

In questa opera Viète introduce nell'algebra il

1) calcolo letterale, che può sembrare abbastanza ovvia come cosa ma è l'inizio della strada per tradurre un problema geometrico in un problema algebrico.
2) Viète introduce **la logistica speciosa**: il calcolo con le specie, ovvero il calcolo letterale (specie deriva da species che vuol dire forma o idea). È un oggetto che non ha più un riferimento immediato in una cosa (l'oggetto della matematica greca è il numero come molteplicità di unità, è il triangolo, la parabola…) ma sono oggetti astratti che vengono rappresentati mediante lettere.

Le due principali caratteristiche di questa logica sono:

1. Aggiungere una grandezza a una grandezza (chiuso per somma e per prodotto). Hai la specie A e la specie B puoi avere A+B e il loro prodotto.
2. È necessario distinguere tra le grandezze incerte (o ignote)e note. Per cui le grandezze ignote lui le denota con le vocali e quelli note con le consonanti, un'equazione vietiana è qualcosa del tipo: siamo nell'opera **Isagoge in artem analyticam**

Aq(quadratum) + A aeq B vietiana 1591→ $x^2 + x = B$ Cartesiana 1637

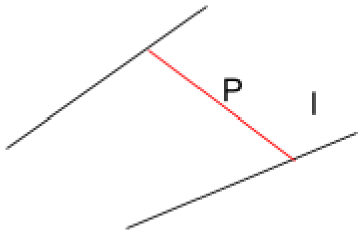
3. Abbiamo il primo teorema di algebra: Antitesi non modifica l'equazione . (l'antitesi fa parte dei modi per modificare l'equazione, portare da membro a membro le componenti dell'equazione)
Si consideri Aq -Dpi =Gq -B in A → $x^2 - d = g^2 - bx$
Per Viete aggiungere da entrambe le parti che a cose uguali si possono aggiungere cose uguali: se aggiungo Dpi+B in A non cambia niente.
Aq + B in A =Gq +Dpi

Cos'è Dpi = Di piano?

Per Viete concepisce l'algebra come mirata ad essere applicata alle geometrie **le sue equazione devono essere omogenee.** Quindi ad esempio lui non concepisce $x^2 + x = b$ → Area +Lunghezza non ha senso
Viète può concepire $x^2 + ax = b$
Inoltre le specia hanno una loro scala di importanza

1) lato→
2) quadrato → piano
3) cubo→ solido
4) quadrato quadrato→ piano piano
5) quadrato cubo→ piano -solido
6) cubo cubo

Questa scala qui viene poi ripresa da Diofanto cercando di mantenere una omogeneità tra le potenze
Viete riesce a applicare questa logistica speciosa a tutti i problemi costruibili con riga e compasso: traduce tutte le equazioni di secondo grado in problemi costruibili con riga e compasso. Questo nell'opera del **1592:** **"Effectionum Geometricarum canonica recensio**" e nel **1593** **"supplementum geometrie"**. In particolare da una parte fa vedere quanto affermato prima cioè che tutte le equazioni di 2° si traducono in costruzioni geometriche lui traduce le equazione nella costruzione geometrica, e nel **supplementum geometrie** (supplemento alla geometria) lui dice che per sopperire ai vari problemi della geometria (che non permette di risolvere la duplicazione del cubo, trisezione dell'angolo, due medie proporzionali, qui si vede Pappo e la sua classificazione dei problemi), chiede che gli venga concesso un nuovo postulato, **ovvero che dato un punto tra due rette date e un punto si possa inserire una retta di lunghezza data che passi per quel punto**.
Postulato:



Con questo postulato lui dimostra che si può risolvere il problema della trisezione dell'angolo e della duplicazione del cubo o problema delle 2 medie proporzionali. Dopodiché fa vedere che la trisezione dell'angolo equivale a una equazione di terzo grado caso irriducibile, mentre duplicazione del cubo equivale a una equazione del secondo grado di tipo puro $x^3 = a$, **quindi a suo avviso tutti i problemi di geometria sono risolti.** Dato anche al fatto che ha mostrato come le eq di 4° si riducono a quelle di 3° riprendendo Ferrari e Cardano. **Viète è importante non solo nei risultati che ottiene ma anche per il linguaggio che introduce**. A differenza di tutti gli altri riesce a dare la soluzione generale del problema diofanteo che dà la soluzione in specie mentre Diofanto dice dividere un quadrato in due quadrati lo risolve per 144, Viète da la soluzione generale. Se il quadrato dato è biquadro allora i due quadrati sono questi e assegnando il valore a una variabile ottengo tutti i risultati possibili. **Viète trova un'unificazione tra la nuova tradizione della matematica antica e la tradizione algebro-abachistica.**

LEZIONE 23→ 11-12-2020

Volta scorsa:

Il '500 è una epoca dove non solo ritorna la grande matematica antica, ma è una epoca dove si affrontano anche numerosi nuovi problemi.

a) Nel piano della nuova matematica antica, abbiamo diversi personaggi **(Cavalieri, Valerio, Torricelli)** che sviluppano l'idea che l'oggetto matematico non può essere quello della matematica greca, quello di cui si deve occupare la matematica deve essere la trattazione di una classe generale di oggetti. Si deve cercare di creare una classe generale ma non troppo, vedi Valerio e Cavalieri: troppo restrittivo o troppo generale. Questi metodi generali tendono poi a non avere più oggetti su cui lavorare, la tendenza è di rifluire su situazioni "barocche" come ad esempio successe con Torricelli.

b) Il filone della matematica dell'abaco invece si scontra con altri problemi, ovvero equazioni di terzo grado con il caso irriducibile, il caso in cui il discriminante dell'equazione è negativo (tipo per le equazioni di secondo grado), in questo caso il discriminante è negativo proprio quando ci sono soluzioni, da cui nasce l'interpretazione della radice quadrata di un numero negativo. **Bombelli,** forse il matematico più importante di questa tradizione, introduce un nuovo segno (il più da meno) per estrarre la radice quadrata di un numero negativo, che però non riesce a risolvere completamente il problema, lo può risolvere equazione per equazione solo in casi particolare. Pertanto anche il tentativo di Bombelli si ripiega su se stesso.

Quindi la matematica del 500 segna una grande avanzata nelle sua varie incarnazioni (algebra, geometria delle coniche, geometria greca…) ma entra in un vicolo cieco. Questo è esattamente quello che succede per la matematica greca, e anche per quella araba che è molto simile a quella occidentale, parte dagli stessi materiali (riappropriazione della geometria greca e algebra) si ripiega su se stessa. Per le equazioni di terzo grado gli arabi riescono a trattarle solo geometricamente, ovvero per mezzo di intersezioni di coniche. **Pertanto Le matematiche che hanno origine dalla matematica greca tendono a ripiegarsi su se stesse.** Sono matematiche che non hanno più niente da scoprire e studiare, anche lo stesso Pappo trattata sostanzialmente gli stessi tipi di problemi di Apollonio e Archimede. **Quello che avviene alla fine del '500 inizi del '600 è qualcosa di completamente nuovo.**

(il fatto significativo della matematica occidentale è il fondersi insieme di due tradizioni diverse quella araba e quella greca, che danno origine all'algebra simbolica applicata alla geometria, non è una cosa universalmente accettata.)

Verso la fine del '500 e inizi del '600 avviene qualcosa di nuovo. Quello che avviene è la fusione tra geometria classica e tradizione aritmetico algebrica.

1) Queste caratteristiche le possiamo trovare in **Maurolico**, lui vuole sviluppare una aritmetica in grado di trattare la quantità in quanto tale, al di là della sua incarnazione specifica, siamo nel **1575.**
2) **Valerio e Cavalieri** abbiamo invece l'idea di trattare oggetti generale, in Valerio si ha la necessità di distinguere la quantità dalla forma, un obiettivo che alla fine viene raggiunto nel calcolo del centro di gravità dell'iperboloide.
3) In **Viete** matura un processo che è durato per tutto il '500 e che non è riuscito a sbocciare né nella tradizione classica né in quella algebrica.

Opere di Viète

- **1591: Isagoge in artem analyticam**
- **1593: effectionum geometricarum canonica recension + supplementum geometrie + Zeteticorum libri quinque.**
- **1615: De aequationum recognitione et emandatione,**

a) **In Algebra→ Zeteticorum libri quinque. + De aequationum recognitione et emendatione,**

Questi ultimi due sono strettamente collegati tra loro. Gli zeteticorum sono cinque libri di indagine, il titolo viene ripreso da Pappo che vuol dire ricercare. In questi due libri Viète si prepara gli strumenti algebrici (negli zetetici) per **poter trattare tutti i tipi di equazione**.

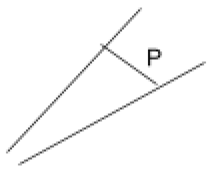
1) Viet mantiene la legge di omogeneità e l'uso di solo quantità positive. In Viete ci sono equazioni del tipo: A(x)=0 cioè ci sono solo equazioni omogenee (Le grandezze scalari hanno una dimensione),
2) Viète fornisce una soluzione di equazione di terzo e quarto grado con trasformazioni diverse da quelle di Tartaglia, utilizzando gli strumenti algebrici che ha messo a punto negli Zetetici.
3) Negli zetetici Viete affronta anche numerosi problemi Diofantei, questo dimostra anche la potenza dei suoi strumenti: se consideriamo il problema più famoso di Diofanto della divisione di un quadrato come somma di 2 quadrati egli fornisce una sola risoluzione, invece Vietè con i suoi strumenti algebrici riesce a trovare anche la formula generale per la risoluzione del problema. **Con gli strumenti di Viète si ottiene una prima generalità**, tu ha una formula per la scomposizione di un quadrato come somma di quadrati.
4) Abbiamo anche un primo teorema di algebra: l'antitesi non cambia l'uguaglianza ma abbiamo anche un teorema di altri livello:
5) il teorema sulle funzioni simmetriche elementari:
   Se abbiamo $x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0 \rightarrow \quad a_0 = \Pi x_i$ =prodotto delle radici per un'equazione di 3° $x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 \rightarrow$
   $a_0 = \; -(x1.x2.x3)$
   $a_1 = \; x1.x2 + x1.x3 + x2.x3$
   $a_2 =-(x1 + x2 + x3)$
   Queste si chiamano formule di Viète, cioè funzioni simmetriche elementari e il legame tra le radici delle equazioni e coefficienti di un'equazione stessa. **Data un'equazione dire se ha soluzioni per i radicali in funzione dei coefficienti**.

Questo dà inizio alla teoria delle equazioni che sviluppa fino a Galois. Si sviluppa molto nel 700 con Lagrange, Cauchy, Abel, Ruffini fino a Galois che stabilirà se l'equazione è risolubile per radicali.

b) in geometria→ effectionum geometricarum canonica recension + supplementum geometrie

E’ una rassegna standard delle operazioni geometriche, ad ogni operazione viene collegata una equazione o una operazione algebrica.
esempio
Tipo date tre grandezze proporzionali e date la media e la differenza tra le estreme trovare le estreme, viete la mette in corrispondenza con:
Cioè abbiamo 3 grandezze/linee proporzionali e data la media e la differenze delle estreme trovare l’estreme. → A.(A+B)=Cq → $x(a+b)=c^2$
costruisce una corrispondenza tra equazione e costruzione geometrica.
Questa impostazione è barocca e pesante e richiederà un certo tempo per essere superata.
Nel **supplementum geometrie** introduce un assioma e dimostra che si può risolvere un'equazione pura di terzo grado e un'altra sulla trisezione dell’angolo. Grazie a questo assioma egli dimostra che si possono costruire due medie proporzionali o effettuare la trisezione dell’angolo.
Assioma:

Date due rette di lunghezza data e un punto inserire una retta di lunghezza data passante per il punto e per le rette date



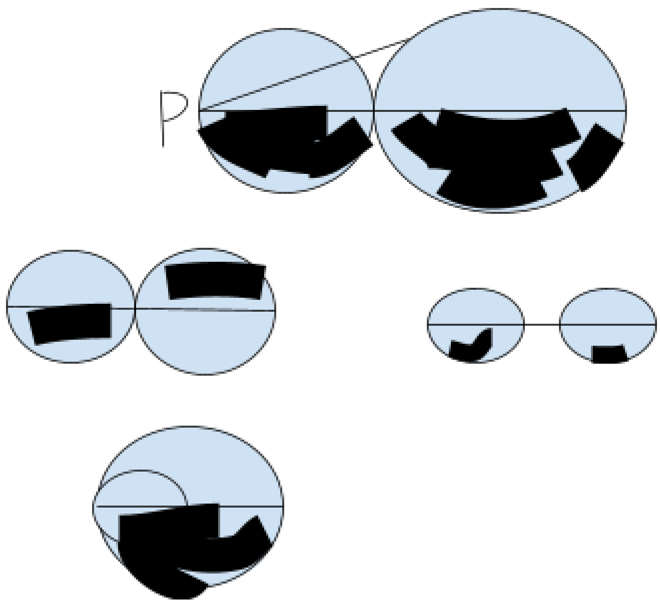
Egli mostra che qualunque equazione di quarto grado si può ridurre a una di terzo che a sua volta si riduce a $A^3 = B$ oppure a $A^3 + pA = q$ → irriducibile così dice di aver risolto tutti i problemi della geometria.
Remind: nel 1589 è uscita la traduzione di Commandino della Collezione di Pappo
Viète è tra i primi a cercare di affrontare i libri che Pappo descrive nel settimo libro della collezione: dati tre cerchi trovarne uno che sia tangente a loro tre. È uno dei problemi descritto nella collezione, **è il libro sui contatti di Apollonio.**
Pappo lo descrive così:
date tre cose tra punti rette e cerchi trovare un cerchio che passi o sia tangente alle tre cose date.
Questo è un problema piano, che non può essere risolto con le coniche ma solo con figure piane. **Fan Rumen** (aneddoto dell'equazione di 45° grado) risolve il problema intersecando due iperboli. Viète è il primo a prendere sul serio la classificazione dei problemi di Pappo.

Marino Ghetaldi

Muore nel **1629** è un allievo di Viète

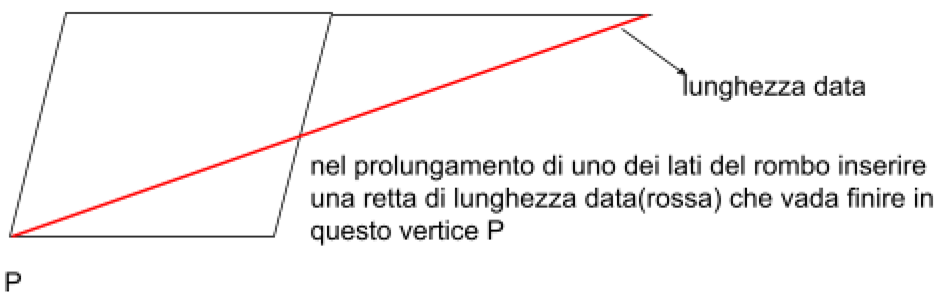
Marino Ghetaldi è di Ragusa in Croazia è un appassionato di matematica nei suoi viaggi a Parigi conosce Viete, diffonde le opere di Viète tra i suoi amici e comincia a utilizzare tecniche vietiane per risolvere problemi fra cui la **Apollonius illyricus** pubblicato nel **1611** e poi con un supplemento nel **1613** Apollonio aveva risolto con riga e compasso.

Risolve il problema delle inclinazioni: date due semicirconferenze inserire tra loro due una retta di lunghezza data che finisca in questo punto, ci sono troppi casi per questo problema.



Si confluisce in una matematica barocca, troppo piena.

Problema del rombo:



Questo problema va risolto con riga e compasso perchè Pappo dice che sono problemi piani, tutti gli altri però li risolve per via algebrica.

Nel 1611/13 quando pubblica **Apollonius illyricus** o anche nel 1607 quando pubblica un altro problema non pubblica la parte algebrica, pubblica solo le costruzioni geometriche.

Nel **1630** quando pubblica un testo "**de risoluzione et compositione"** ovvero su analisi e sintesi matematica in cui fa vedere come tutti i problemi che si

riducono a equazioni di primo e secondo grado se ne può costruire la soluzione algebrica. Dando poi esempi di cosa aveva fatto nell' **Apollonius illyricus**. La cosa interessante è nel quinto libro, ovvero in problemi che non cadono sotto l'algebra, tra questi c'è il problema del rombo. **Questo fa vedere le difficoltà tra cosa si possa o non possa fare**. Dal problema del rombo si ottiene un'equazione di 4° grado completa, non si sa come collegarla all'algebra, e come collegarla a problemi piani. Ma dato che il problema è piano l'equazione deve essere di secondo grado oppure riconducibile a una biquadratica. **Cartesio** darà une trattazione semi-completa del problema risolvendolo per il caso del quadrato. Bisogna aspettare **Newton** per una trattazione soddisfacente del problema, l'equazione di 4° grado si riconduce a una biquadratica.
L'altro aspetto interessante sulla figura di Ghetaldi è la diffusione di diffusione dell'**ars analitica di Viet.** In Italia il peso della tradizione classica e della influenza Galileiana ha fatto sì che la diffusione dell'algebra non fosse così immediata. Lo stesso Clavio amico di Ghetaldi nel 1608 sulla questione delle equazioni di terzo grado ha solo sentito dire che Viete ha trattato meglio le equazione di terzo grado rispetto agli altri, questo dimostra la difficoltà nella diffusione dell'algebra. Nella stessa Francia l'algebra di Viète si diffonde lentamente.
Negli anni successivi al 1615 verranno pubblicati opere in francese delle opere di Viète, trattati di algebra, gli zetetici e **sarà solo a partire dalla fine degli anni 20 inizio anni 30 che l'algebra di Viète trova il suo continuatore ovvero Pierre de Fermat.**

Aspetto importante

La matematica italiana: Valerio, Cavalieri, Torricelli, Tartaglia, Cardano sono tutti legati ad ambienti accademici. Con il '600 **la figura del matematico non è più una figura legata alla università**, ma viene vista come una figura dilettante, ovvero si impara la matematica da sé. Questo aspetto è molto importante perché ci ricorda la matematica dell'abaco che permette una maggiore libertà di ricerca, e questo è un po' quello che succede con la matematica in generale. Il non doversi più sottoporre a regole rigide, situazioni istituzionalizzate concede alla matematica una maggiore libertà (vale per Viete vale per Cartesio, per Fermat), le cui cose si diffondono attraverso reti private che verso la seconda metà del '600 si vanno a trasformare in accademie scientifiche, come istituzioni private di studiosi e ben presto saranno riconosciute dagli stati.
Altra cosa importante è la **nascita di riviste scientifiche** in cui si scambia idee nuovi approcci, in generale la vita scientifica cambia proprio natura,

uscendo dalle università e andando a svilupparsi nei singoli studiosi e questo vale anche per la matematica.

LEZIONE 24→ 14-12-2020

Volta scorsa:

Abbiamo parlato del fatto che la riscoperta di Pappo rafforza la "moda" che già si era iniziata a manifestare verso la seconda metà del '500 del restauro della reinvenzione di opere e risultati andati perduti. Tutto il filone Archimedeo sui centri di gravità nasce dal fatto che i testi di Archimede non ci sono pervenuti. Il caso di Pappo è ancora più significativo.
Dopo che il testo di Pappo diventa disponibile con la traduzione di Commandino del 1589, inizia la moda di ricostruire i libri che Pappo elenca nel settimo libro, inoltre si cerca di capire il metodo dell'analisi e della sintesi. Abbiamo anche visto che **Viete** interpreta questo discorso dell'analisi e della sintesi, **inventando l'algebra simbolica e inaugura la corrente dei "restauratori"**: appolloni francesi, gallesi, ecc in particolare l'algebra Vietiana è un'algebra pesante (barocca) la legge di omogeneità, l'esclusione di quantità negative. Esclude le quantità negative perché lui vuole applicare la sua algebra alla geometria.
L'idea di polinomio stenta a venire fuori e inoltre Viete stesso non è un accademico, è un politico un amministratore e le sue opere si diffondono lentamente e con diversa fatica, anche a causa dello stile stesso di Viète.

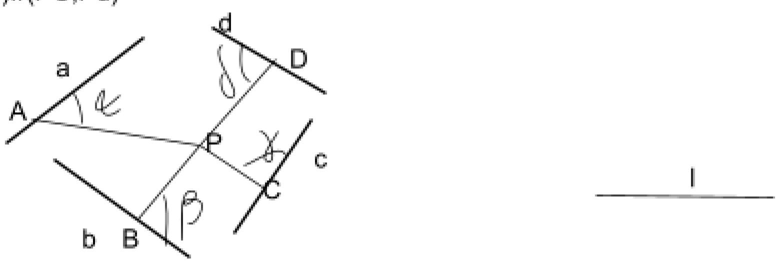
Ghetadi usa l'algebra vietiana per ricostruire un libro di Apollonio, presenta un tipo di approccio completamente diverso da quello di Viète. **Se Viete all'equazione associa una costruzione geometrica, Ghetaldi cerca di interpretarla.** L'idea diventa quindi l'interpretazione della formula. Questi due aspetti: il tentativo di riappropriazione di opere perdute e l'utilizzo dell'algebra in queste operazioni saranno alla base della novità del corso degli anni '30.
I protagonisti di questa rivoluzione sono Cartesio e Fermat.
Sia Cartesio che Fermat non sono matematici di professione.

Cartesio

Il primo vive di rendita e dispone di terre. Dopo aver studiato dai gesuiti si dedica alla carriera militare, durante una sosta ha delle illuminazioni che lo porteranno a tirare fuori il discorso sul metodo. Successivamente si ritira in Olanda, perché vuole stare lontano da Parigi dalle varie dispute, e nel 1637 pubblica il "**discorso sul metodo per ben condurre la propria ragione e trovare la verità nelle scienze**". Prima del discorso sul metodo aveva scritto cose che non pubblicherà in cui ci sono moltissime cose che riguardano matematica, analisi e sintesi. L'opera del discorso sul metodo ci manda al dubbio sistematico. Questo libero è accompagnato da tre saggi: **la meteora la diottrica e la Geometrié**. L'ultima è un testo difficile, è il primo testo che noi possiamo leggere come se si trattasse di un testo moderno. Cartesio si vuol tenere lontano dalle polemiche ma è uno che la polemica la ama parecchio, in una lettera a Mersenne dice che è stato volutamente oscuro in certi passi, per vedere se gli "intelligentoni" sapessero risolvere quei passi oscuri. **La geometriè è centrata intorno al "problema di Pappo":**

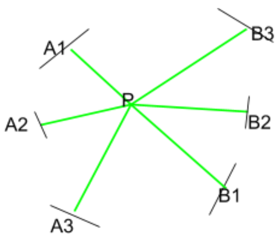
problema delle 3\4 linee o problema di Pappo.
Ne parla anche Apollonio nell'introduzione delle coniche dicendo che la soluzione data da Euclide senza quello che dimostro nel 3 libro non sta in piedi.
Enunciato
Trovare il luogo su cui si trovano i punti P tali che le 4 retta a,b,c,d condotti ad angoli dati accada che il rettangolo (PA ,PB) abbia un rapporto dato con il rettangolo(PC,PD)

r(PA,PB):r(PC,Pd)



Se le rette fossero solo 3 si prende una retta fissata l e invece del rettangolo (PC,PD) si prende il rettangolo (PC,l). Oppure il rettangolo (PA,PB) abbia un rapporto dato con il quadrato costruito su PC

A questo Pappo aggiunge un lungo commento e se la prende con Apollonio il quale non doveva dire queste cose di Euclide perché senza di lui non avrebbe risolto il problema, e comunque è stato dimostrato che i punti P vanno a cedere in una delle sezioni coniche, questo problema poi dice, si potrebbe generalizzare ulteriormente. Se le linee dovessero essere 6 allora dovremo considerare che un determinato parallelepipedo Pl abbia un rapporto tale che:



$$\frac{Pl(P_{A1}, P_{A2}, P_{A3})}{Pl(P_{B1}, P_{B2}, P_{B3})}$$

Potremmo generalizzarlo ulteriormente e considerare anziché il parallelepipedo (con 8 linee avremmo un solido) il rapporto composto

$$\frac{PA1}{PB1} x \frac{PA2}{PB2} x \frac{PA3}{PB3} x \frac{PA4}{PB4}$$

Poi afferma che si può generalizzare a qualsiasi rette si vogliano. Tutto sommato questa generalizzazione non serve a molto, perché il luogo delle 5-6 linee lo hanno studiato e i punti vanno a cadere su luoghi non ancora conosciuti, e di questi luoghi non è stato nemmeno uno, nemmeno il più semplice o il più manifesto [testo di Pappo].

Concetto di luogo:

Pappo trasmette 3 cose importanti:

1. Idea di analisi e sintesi
2. Lista di opere che stimola la ricerca
3. Concetto di luogo che appare in Pappo e che non si capisca bene cosa voglia dire

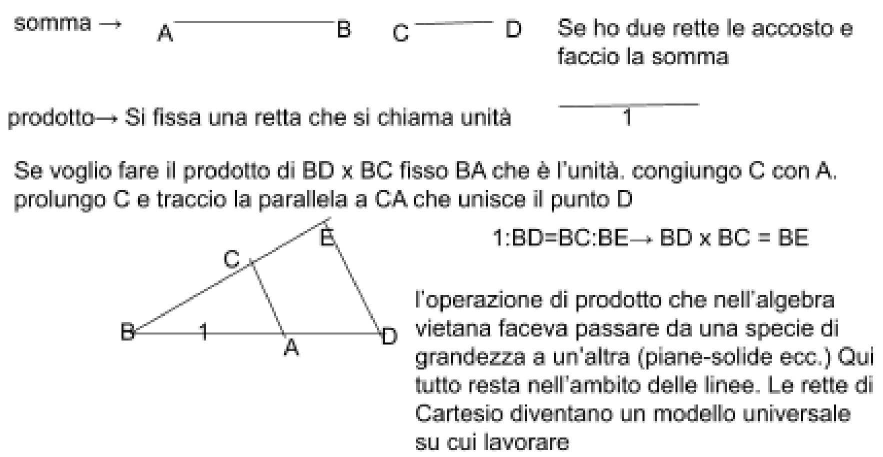
Per noi il luogo geometrico è l'insieme dei punti che godono di una certa proprietà, questo non è ammissibile nella geometria greca. Il luogo per i matematici greci deve essere visto come: **hai una curva con in essa una certa proprietà, bisogna quindi vedere se tale proprietà è caratteristica della curva, si deve dimostrare che tale proprietà è sintomatica.** Questo non è chiaro però in Pappo, non è trasmesso bene nel testo di Pappo. Nel testo di Pappo si parla di luogo come cosa che già si sa.

Quindi il problema è quello di riuscire a interpretare cose sia il luogo. Qui abbiamo un momento di svolta decisivo, lo abbiamo separatamente in Fermat e Cartesio.

Altra cosa da segnalare del testo di Pappo: La traduzione di Commandino recita " e di questi luoghi ne trovarono uno che non è il più semplice è il più manifesto" cade la particella negativa. E' importante questo stimola a trovare la soluzione e Cartesio ci prova.

Come affronta Cartesio il problema di Pappo.

Inizio della Geometrié. Inizia quasi con una bestemmia, tutta la problematica legata all'incommensurabilità viene buttata via senza rimpianti.   Cartesio dice:

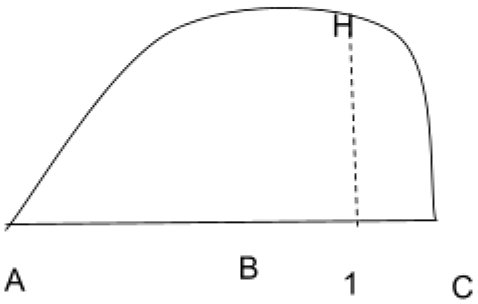


Se con Viète si avevano delle grandezze, qui tutto resta nell'ambito delle linee. In qualche modo le rette di Cartesio diventano un modello universale su cui lavorare, dovemmo aspettare fino '800 per far si che queste rette diventino numeri reali.

Per estrazione di radice:

estrazione di radice

voglio estrarre la radice quadrata di AB. Aggiungo la retta 1. Costruisco il semicerchio che ha come diametro AB+1 dove 1=BC e poi prendo l'altezza BH sarà uguale alla radice di AB



$BH = \sqrt{AB}$

Come si risolve un problema per Cartesio?

I problemi si riconducono a risolvere equazioni.

Se io ho l'equazione:

$z^2 = az + b^2 \rightarrow z^2 = az + bb$ $\leftarrow$ questa è la scrittura di Cartesio

la si costruisce interpretando la formula risolutiva

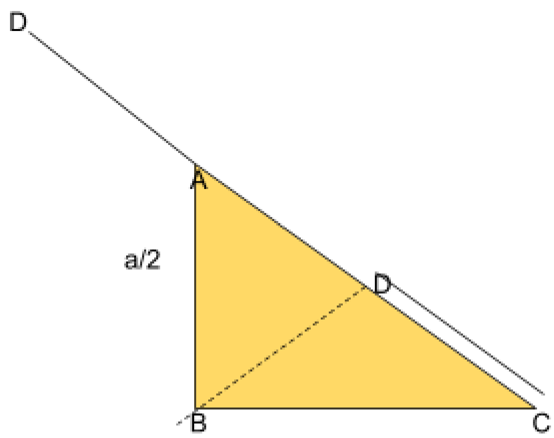
Costruisco il triangolo rettangolo ABC in cui prendo BC=b e AB=a/2

Prolungo il lato AC di una quantità pari ad a/2 fino ad ottenere D e allora DC=z. La soluzione è data algebricamente da $z = \frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2+4b^2}{2}}$

Per il Teorema di Pitagora AC= $\sqrt{b^2 + \frac{a^2}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{ab^2 + \frac{a^2}{2}}$

e così farà anche per gli altri tipi di equazioni di 2°

Se ho $z^2 =- az + b^2$ dovremo staccare da Ac un pezzo ottengo il punto D e DC sarà la mia soluzione



Quindi tutti i problemi fino a secondo grado si sanno costruire e per le equazioni di grado superiore? Il problema viene diviso in due:

1. Costruire l'equazione risolvente
2. Trovare dove cadono i punti

il luogo diventa come quello nostro.

Fermat

Egli parte dai luoghi piani (altra opera di Apollonio), a partire da questa opera arriverà a concepire il luogo come quello cartesiano. La curva a partire da cartesio Fermat viene vista come generata da una equazione. Fermat dimostrerà che tutte le equazioni di secondo grado rappresentano coniche.

Cartesio

A questo cartesio, dopo aver visto che l'equazione è di secondo grado, afferma che il problema è piano. Se le rette sono di più in gradi aumentano.

Geometrie

Geometrie è divisa in tre libri:
Inizia con una Nuova Analisi algebrica dei problemi geometrici applicata a Pappo. Questo libro apre due primi: nel terzo libro si ha lo studio dei problemi geometrici che conducono a equazioni di grado maggiore o uguale a 3, nel secondo libro si ha la questione di cosa sono le linee curve. Da come interpreta il problema di Pappo si ha la necessità di ridurre il problema ad una equazione, se l'equazione è di secondo grado okey, se è di grado superiore al secondo devi riuscire a capire come ricondurti a cose note. Questo è il problema della costruzione delle equazioni.

Da Cartesio in poi il mondo della geometria è il mondo delle curve che possono essere descritte mediante equazioni, le curve algebriche.

Problemi ordinati da Cartesio:

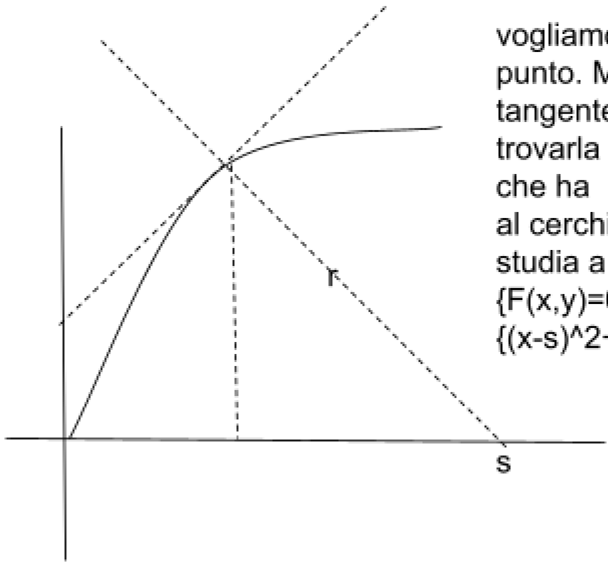
- Primo genere: equazioni di primo e secondo grado
- Secondo genere: equazioni di terzo e quarto grado

Questa visione della geometria permette di risolvere il problema di Pappo. Algebrizzata la questione cartesio si pone il **problema di trovare la tangente ad una curva data.** Questa domanda apre il sipario alla matematica moderna.

Perché è così importante?

Gli antichi erano in grado di trovare tangenti, vedi Apollonio. Qui cosa cambia? Qui cambia che la tangente si cerca in una curva generale. Si cerca

di determinare un metodo che data una qualunque curva algebrica si vuole trovare la tangente, questo introduce l'oggetto polinomio.
Una curva algebrica quindi sarà data da:
F(x,y)= G(x,y) →sarà meglio considerarla così F(x,y)=0
E’ molto importante perchè la differenza sta nel fatto che F(x,y)= G(x,y) è un’equazione mentre F(x,y)=0 è un polinomio
In particolare il terzo libro della Geometrie comincia con un trattato sui polinomi. Infatti la regola dei segni è nota coma la regola di Cartesio. Il polinomio è un nuovo oggetto matematico che f Per la prima volta il polinomio compare nella geometrie di Cartesio e negli scritti di Fermat



vogliamo trovare la tangente in questo punto. Ma Cartesio anziché trovare la tangente vuole trovare la normale e per trovarla basterà trovare il centro del cerchio che ha centro sull’asse x e che è tangente al cerchio. quindi per trovare questo cerchio studia a sistema
{F(x,y)=0
{(x-s)^2+y^2=r^2

Se elimino una delle due incognite (x o y). Se il polinomio ha grado n ottengo un polinomio a una solo incognita x di grado 2n Q2n(x)=0

A Cartesio non importa sapere come si risolve questo polinomio ma gli interessa sapere per quali valori di s ed r il sistema ha solo una soluzione cioè quando il polinomio Q2n lo potrò scrivere come→ Q2n(x)=(x-x0)^2P2n-2(x) e cioè quando avrà in x0 non una radice semplice ma una radice doppia. Qui il concetto di polinomio è cruciale (Teorema di Ruffini o della Radice)

I coefficienti di Q che dipendono da r e da s a(r,s)
$a(r,s)x^{2n} + b(r,s)x^{2n-1} + ... + m(r,s) = (x - xo)^2$ per un polinomio da determinare che avrà $2n - 2\ coefficienti\ \ a_{2n-2}x^{2n-2} + ...$
Ottengo un sistema di 2n+1 equazioni
{a(r,s)= a_{2n-2}
{b(r,s)=
{....
Ho 2n-2 incognite +r+s. Risolvendo questo sistema troverò r ed s e avrò trovato la mia tangente.
È una cosa molto complicata, negli anni successivi (1650 e fine del secolo) i matematici si dedicheranno a cercare di semplificare questo metodo. **La**

cosa importante è che in questo modo Cartesio ha fissato un metodo generale per le tangenti a una qualsiasi curva.

LEZIONE 25→ 18-12-2020

Geometria di Cartesio.

Questa opera è il punto culminante, in cui si propone un punto di vista completamente nuovo, gran parte di questa opera si svolge **attorno al problema di Pappo**. La prima innovazione è l'abbandono del principio di omogeneità vietiano, inoltre facendo vedere come si possono interpretare somme prodotti o estrazioni di radici medianti linee. A differenza di Viète, Cartesio propone l'interpretazione diretta delle equazioni.

IL problema di Pappo, Cartesio lo vede in 2 fasi.

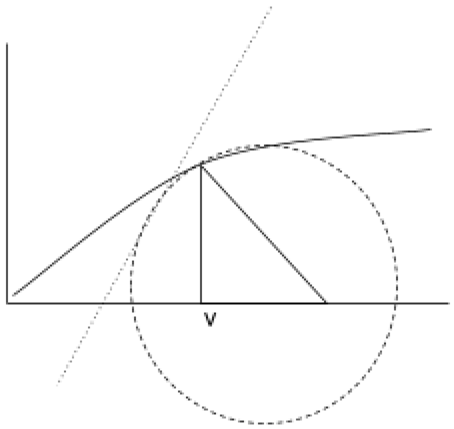
1) Fa vedere come la distanza si esprima in termini lineari in funzione delle quantità incognita, questo significa che il problema si riduce a equazione di secondo grado (nel caso di 4 linee).

Poi la domanda è come trovare i punti per equazioni di grado superiore al secondo?

2) La risposta a questa domanda è data nel terzo libro, col problema della costruzione dell'equazione. In particolare, Il cuore della Geometrie sta nel secondo libro. Secondo Cartesio le curve ammissibili in geometria sono quelle che cadono sotto una misura precisa ed esatta, ovvero quelle generate da un movimento continuo senza interruzioni. La spirale di Archimede non è ammissibile secondo Cartesio. Se quindi bisogna ammettere in geometria sono solo quelle sopra descritte allora queste possono essere messe in corrispondenza con delle equazioni polinomiali.

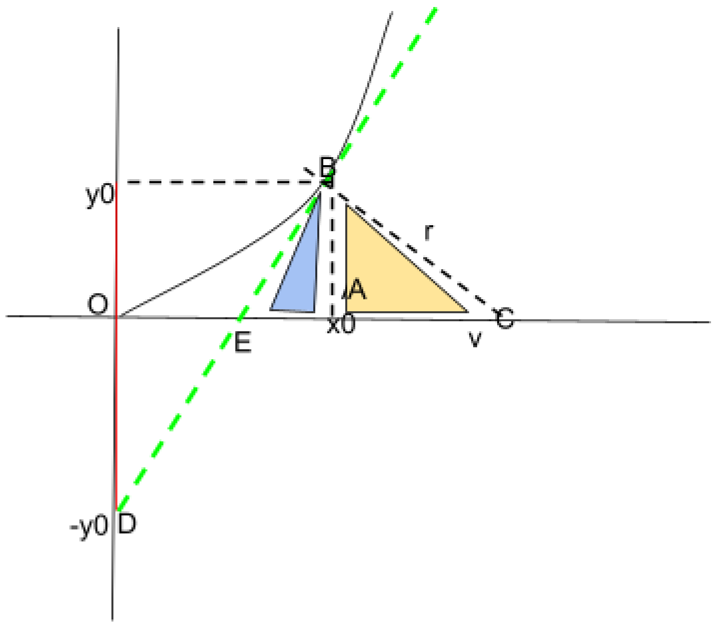
Attenzione questo è un punto molto discusso, quello che è certo, è che immediatamente dopo l'oggetto della geometria è una classe ben definita e sufficientemente generale di oggetti, e per questo tipo di classe si tratta di dare metodi o calcoli che si applicano a tutti gli oggetti della classe, l'esempio principe è il problema delle tangenti.

1) Considera un polinomio in due variabili e lo eguaglia a 0 F(x,y)=0
2) Anziché cercare la tangente cerca la normale ovvero la perpendicolare alla tangente. Se io considero un cerchio che abbia centro sull'asse di riferimento, in generale intersecherà la curva in due punti. Se io voglio il cerchio tangente cioè quello che mi fornisce il raggio normale alla curva dovrò chiedere che l'intersezione fra il cerchio che ha raggio normale alla curva e il cerchio generico che ha il centro sull'asse x abbia una sola soluzione



{F(x,y)=0
{(x-v)^2+y^2=r^2
Se F(x,y)=0 aveva grado n si ottiene un polinomio Q2n(x) di grado 2n che avrà sicuramente una radice x0. Non voglio trovare le soluzioni di questo polinomio ma voglio che questo polinomio si divisibile per (x-x0)^2→ Q2n(x)=(x-x0)^2P2n-2(x)
Imponendo questa condizione si ottiene un sistema di 2n -2 variabili che fornisce la coordinata del centro e la lunghezza del raggio.
Esempio concreto
$y = mx^2$

1) La tangente(verde) so già calcolarla da Apollonio
2) La sottotangente(in arancione) è doppia del piede dell'ordinata



Come funziona il metodo di Cartesio

1) dobbiamo intersecare $y = mx^2$ con ‘equazione del cerchio che ha raggio r e centro sull’asse x
   $\{y = mx^2$
   $\{(x - v)^2 + y^2 - r^2 = 0$
2) Ottengo un polinomio $Q(x) = (x - v)^2 + m^2x^4 - r^2 = 0$
3) ora io voglio che questo polinomio abbia una radice doppia in x0
   $m^2x^4 + x^2 - 2vx + v^2 - r^2 = 0$ e io voglio che questo in quanto polinomio sia uguale a $m^2x^4 + x^2 - 2vx + v^2 - r^2 = (x - x0)^2(ax^2 + bx + c)$
4) I coefficienti di questo polinomio sono P4=Σaix^i dove gli ai sono funzioni di a, b, c mentre a sx i coefficienti sono funzioni di m, v, r
5) Facendo i conti e uguagliando i coefficienti ottengo
   $\{a = m^2$
   {b-2ax0=0
   {c-2bx0+ $ax0^2 = 1$
   $\{bx0^2 - 2cx0 =- 2v$
   $\{cx0^2 = v^2 - r^2$
   sistema di 5 equazioni in 5 incognite di cui le uniche due di interesse sono v ed r
6) facendo i conti ottengo che $v = x0 + 2m^2x0^3$
7) geometricamente parlando $x0 + 2\frac{yo^2}{x0^4}xo^3 \to v = x0 + 2\frac{yo^2}{x0}$ ma va ancora geometricamente interpretata
8) i due triangoli rettangoli sono simili
   OE=EA→ y0O=O(-y0)

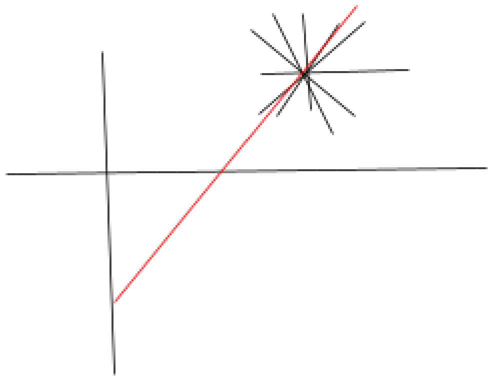
Con questo metodo si può trovare la tangente a qualunque curva algebrica
Supponiamo ora di avere $\sqrt{xy + x + \sqrt[2]{y}} + c = 0$

1) trasformarla in equazione polinomiale:
   $\sqrt{xy + \sqrt[2]{y}} = x + c \to xy + y + 2\sqrt{x}\,y = (x + c)^2 \to$
   $xy + y - (x + c)^2 =- 2\sqrt{x}\,y \to [xy + y - (x + c)^2]^2 = 4xy^2$
2) Procediamo come prima

Si iniziarono a fare calcoli più semplici
$\{y = mx^2$
$\{y = y0 + m(x - x0)$
Q aveva grado n com F
A partire dalle prime traduzioni della Geometrie la cosa inizia a semplificarsi. Una prima semplificazione avvenne verso la fine del 600 con **Jan Hodde**. Egli notò che un polinomio ha una radice doppia se e solo se Q1(x) ha una radice nello stesso punto. Q1 è:

Q(x)= Σaix^i e ko...kn è una progressione aritmetica qualunque a+nb→
Q1(x)= $\Sigma kiaix^i$ Si può prendere come progressione aritmetica 0,1… n
Vediamo il teorema applicato alla parabola

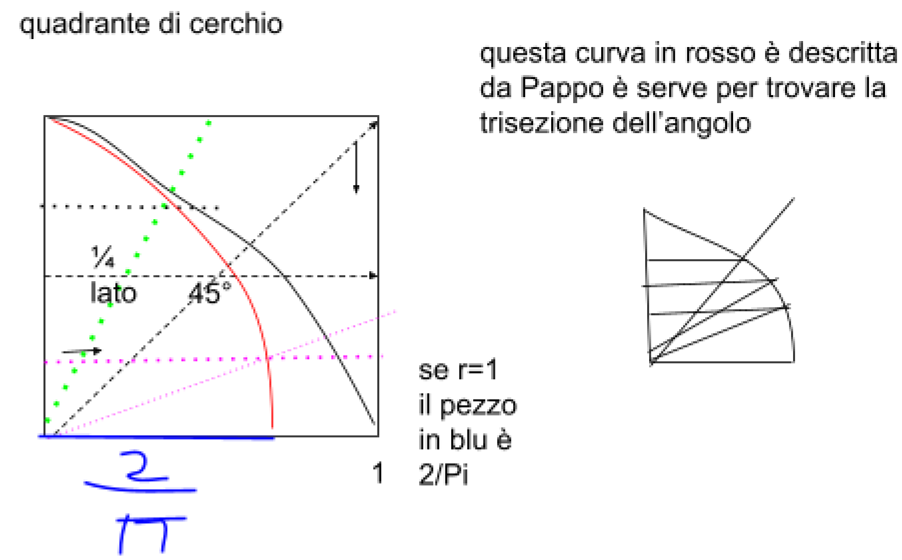
Consideriamo la parabola $y = px^2$ e mettiamola a sistema con
$\{y = px^2$
$\{y - y0 + m(x - x0)$ cioè interseco la parabola con il fascio di rette e fra tutte queste voglio la retta tangente

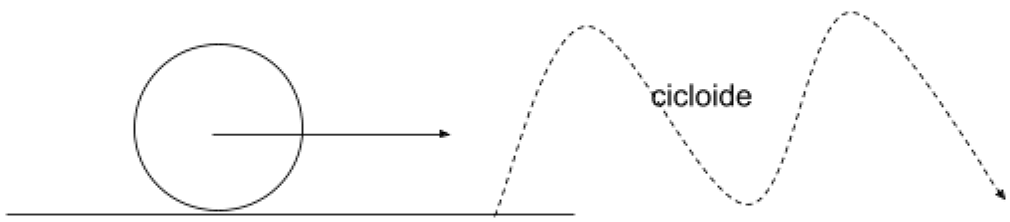


otteniamo Q(x)= $px^2 - mx + (mx0 - y0)$
Q1(x) prendo il polinomio che ottengo usando la successione usando 0, 1,2
Q1(x)= $2px^2 - mx$ Per trovare la tangente mi basta risolvere questa equazione
$2px^2 - mx = 0$ e ottengo che m= $\frac{1}{2p}$
Q1(x) è una sorta di derivata del polinomio moltiplicata per x

Verso la fine del 700 il metodo delle tangenti si è trasformato in un calcolo, che però è molto difficile da potersi applicare. Se la curva algebrica non si esprime sotto forma di polinomio, non è possibile applicare questo tipo di calcoli.

Passo indietro:
Questi metodi cartesiani funzionano solo sulle curve algebriche e hanno il merito di mettere in luce il polinomio. Le operazioni che fa **Hoode** è una cosa che ha senso sul polinomio, no sull'equazione. Così come tutto il metodo dell'idea di Cartesio. E prima di parlare della costruzione delle equazione Cartesio scriverà molte pagine sui polinomi quasi a preparazione della Geometrie. **Però ha allo stesso tempo un limite, le curve che ha escluso, ci sono e sono sempre più presenti.**
Ad esempio la spirale di Archimede di cui la tangente si conosce, un'altra curva è la quadratrice, che serve per trovare la trisezione dell'angolo, poi abbiamo anche la quadratura logaritmica, quelle del seno e del coseno. Abbiamo anche la cicloide nominata per la prima volta da Galileo

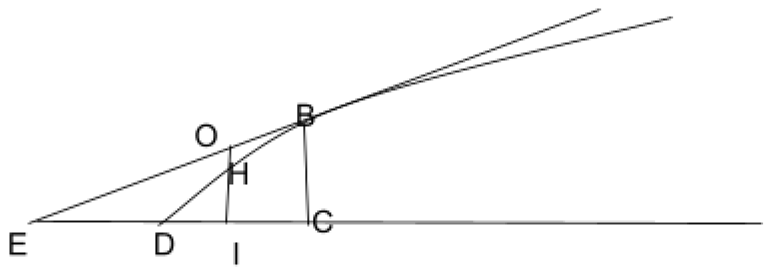




I metodi algebrici su queste curve sembrano inapplicabili, non per nulla Cartesio le ha escluse :)

FERMAT

Accanto a Cartesio troviamo Fermat. Egli è dilettante molto più di Cartesio, scrive molte cose di matematica e circoleranno molte di queste attraverso Mersenne.
Oss: Mersenne è un frate parigino, conosce molti matematici e filosofi, lui costruisce una accademia privata e tiene una corrispondenza vastissima. La sua corrispondenza svolge la funzione che da lì a poco svolgeranno le riviste scientifiche.
Quindi Fermat invia agli amici e a Mersenne i suoi risultati, in particolare
Fermat pubblica un metodo per trovare le tangenti, vediamo il metodo applicato alla parabola:
prendiamo una parabola e vogliamo trovare la tangente nel punto



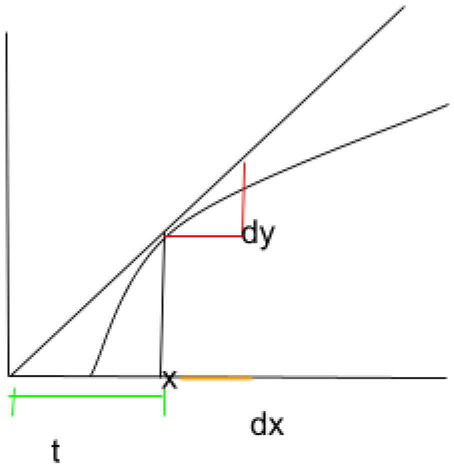
La proprietà caratteristica della curva è quella che i quadrati delle ordinati sono proporzionali alle ascisse quindi se prendiamo un punto I otteniamo che IH^2 : BC^2 = DI : DC . Fermat anziché leggerla sulla curva la legge sulla tangente e introduce il concetto di adeguazione, cioè prendiamo il punto O e leggiamo la proprietà anziché in H in O→ IO^2 : BC^2 ≈ Di:DC. Il vantaggio è che a questo punto possiamo trasferire la proprietà della parabola dalla curva alla tangente e poi possiamo riportarla sugli assi perché i triangoli sono simili→ IO: BC = EI : EC → EI^2 : EC^2 ≈ DI : DC
DA qui succede che se noi assegniamo dei valori incogniti (usiamo la notazione vietiana) e poniamo:
a=DE → a è quello che vogliamo trovare
e=CI→ e è una grandezza variabile che dipende da dove si trova I
b=CD

Facendo queste sostituzioni otteniamo un adeguazione di questo tipo
$e^2 b - 2b^2 e \approx - a^2 e - b^2 e$
A questo punto divide tutto per e→ $eb - 2b^2 \approx - a^2 - b^2$ e la trasforma in un eguaglianza riportandola dove era e cioè ponendo tutto=0 ottenendo alla fine
$a^2 \approx b^2 - eb \rightarrow a^2 = b^2 \rightarrow$ a=b
L'idea è di leggere la proprietà caratteristica invece che sulla curva stessa, sulla tangente.
Osserviamo che il "rigore Euclideo" si è molto allentato. Il metodo di Fermat permette di affrontare quello che i metodi algebrici non potevano fare. Si può avere un calcolo che permetta di trovare la tangente e tutto quello che la tangente consegue senza arrestarsi alle radici quadrate? Sì ed è quello che fa Leibniz.

Leibniz
Leibniz compie un'altra svolta decisiva. **Tra il 1591 e il 1684 troviamo: isagoge di Viete, la Geometrie di De Carte, nova metodus di Leibniz, si può dire che la matematica moderna venga fuori da questi tre libretti.**

Cosa fa Leibniz.

Supponiamo di voler trovare la tangente a una certa curva

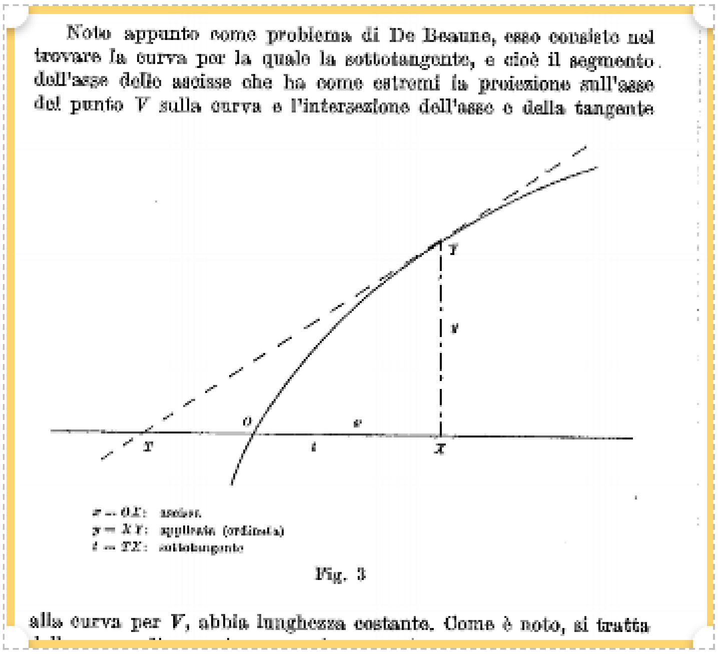


fino ad allora il problema si riduce a trovare la sottotangente (t in verde). Lui dice consideriamo un incremento della x dx(arancio) e definiamo dy(rosso) come il quarto proporzionale dopo x,dx e t. Per cui avremo che t: dx= y:dy. Il differenziale viene definito in base alla tangente che è quello che si vuole trovare. e comincia a dare le regole di differenziazione:

1) il differenziale di una somma = la somma dei differenziali
2) il prodotto
3) quoziente

Senza nemmeno dire che si possono dimostrare
Si passa poi ai punti di crescenza e decrescenza, massimi e minimi, flessi

Con i differenziali è più semplice aggiustare le equazioni per farle venire polinomiali. Infine viene risolto il problema di **De Beaunne.**



Noto appunto come problema di De Beaune, esso consiste nel trovare la curva per la quale la sottotangente, e cioè il segmento dell'asse delle ascisse che ha come estremi la proiezione sull'asse del punto Y sulla curva e l'intersezione dell'asse e della tangente

Fig. 3

alla curva per Y, abbia lunghezza costante. Come è noto, si tratta

La matematica del '600 si costruisce attraverso una fusione di diverse matematiche: greche, arabe, abachiste… ma nessuna di queste può pretendere di essere l'unica radice della matematica moderna. Questo ci fa vedere come sia sbagliato proiettare i nostri concetti di rigore e formalismo, alla matematica prima di Cartesio.