# Lezione 09, 23/10/20

domenica 21 febbraio 2021 15:11

## Tradizione Archimedea:

La terza fase della tradizione archimedea avviene grazie a Guglielmo di Morbech. Dal codice A durante il rinascimento verrà c
quindi è grazie questi codici (A e B) che dobbiamo la conoscenza di Archimede durante il rinascimento. Quindi personaggi co
Cartesio o altri conoscono Archimede grazie a questi codici. Per esempio i Galleggianti che si trovavano solo nel codice B son
attraverso la traduzione latina di Guglielmo. Questa traduzione è molto difettosa in quanto questa opera è molto difficile, pe
in rinascimento quando questi testi vennero scoperti iniziò tutta un'opera di "impadronirsi" di questi testi. Verso il 1450 verr
nuova traduzione di Archimede fatta da Jacopo da San Cassiano (anche questa piuttosto manchevole) la cosa importante è c
traduzione verrà studiata da Regiomontano e alla base di questa ne fa una revisione che verrà pubblicata nel 1544 a Basilea e
editio princeps di Archimede. Quindi l' Archimede prima della nascita modera è quello mediato dalle traduzioni di Guglielmo
varie revisioni fatte durante l'umanesimo.
L' Archimede che conosciamo oggi invece è quello fornitoci da Heiberg. Il suo approccio però era condizionato dal tipo di visi
all'epoca avevano di Archimede stesso e della matematica greca.

Il metodo.

Questa opera ha la forma di una lettera a Eratostene in cui manda la dimostrazione di due teoremi, e illustra anche l'approcc
associato ai risultati che aveva trovato. Il metodo contiene 15-17 proposizioni, le prime 12 sono relative a risultati che Archin
diffuso.

## Come funziona l'approccio di Archimede?

### 1.1 Il paraboloide e il cilindro

Come funziona dunque questo τρόπος? L'esempio più semplice per illustrarlo è la Proposizione 4 del *Metodo* (cfr. [5, pp. 119 e sgg.]): il paraboloide di rotazione è la metà del cilindro ad esso circoscritto.

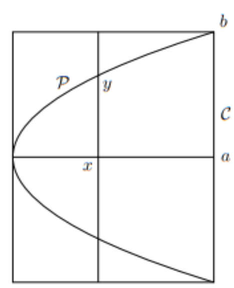



Figura 1: Il paraboloide e il cilindro.

In Fig. 1 è rappresentato un paraboloide $\mathcal{P}$ di asse $a$ e con raggio del cerchio di base uguale a $b$ e il cilindro $\mathcal{C}$ ad esso circoscritto. Indichiamo con $s_x(\mathcal{P})$ la sua sezione con un piano perpendicolare all'asse nel punto $x$ dell'asse e con $s_x(\mathcal{C})$ la corrispondente sezione del cilindro. Si tratta di due cerchi, aventi rispettivamente come raggi $y$ e $b$. Siccome i cerchi stanno fra loro come i quadrati dei raggi, si avrà:

$$s_x(\mathcal{P}) : s_x(\mathcal{C}) = y^2 : b^2$$

e, trattandosi di una parabola, $y^2 : b^2 = x : a$; in altre parole le sezioni del paraboloide sono proporzionali alla distanza $x$ in cui vengono effettuate:

$$s_x(\mathcal{P}) : s_x(\mathcal{C}) = x : a.$$

Archimede interpreta questo risultato in termini meccanici. Consideriamo una bilancia ideale, a bracci uguali, su uno dei quali si trovino il cilindro e il suo paraboloide inscritto. Se immaginiamo di trasportare $s_x(\mathcal{P})$ all'estremità dell'altro braccio, la relazione appena trovata ci dice che la sezione del

51

paraboloide collocata laggiù farà equilibrio alla sezione del cilindro lasciata ferma dove si trova (Fig. 2).

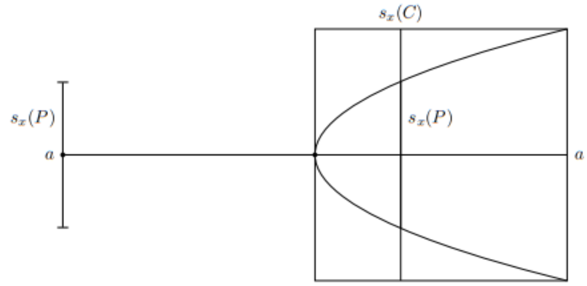



Figura 2: La bilancia virtuale.

passa dalla singola sezione a tutte.

E questo varrà per ogni singola sezione $s_x(\mathcal{P})$, e quindi per tutte insieme. Ma allora – poiché tutte le sezioni del paraboloide in qualche modo lo "riempiono", così come le sezioni del cilindro "compongono" il cilindro – si avrà che il paraboloide $\mathcal{P}$ collocato all'estremità della bilancia farà equilibrio al cilindro $\mathcal{C}$ lasciato dov'è con il suo asse che occupa uno dei bracci. Ma il centro di gravità del cilindro di trova a metà dell'asse; di conseguenza, per la legge della leva:

← punto delicato

$$\mathcal{P} : \mathcal{C} = a/2 : a$$

e dunque $\mathcal{P} = \mathcal{C}/2$.

Si tratta di una procedura un po' selvaggia: uso di bilance in geometria, concentrazione di una figura (il paraboloide) in un punto, concepire una figura come "composta o riempita" dalle sue sezioni... E, in effetti, Archimede segnala ad Eratostene che

> alcuni risultati che mi si erano in un primo momento rivelati per via meccanica sono poi stati da me dimostrati per via geometrica, dato che lo stabilire risultati per mezzo di questa procedura si situa al di fuori di un contesto dimostrativo ([5, p. 101]).

52

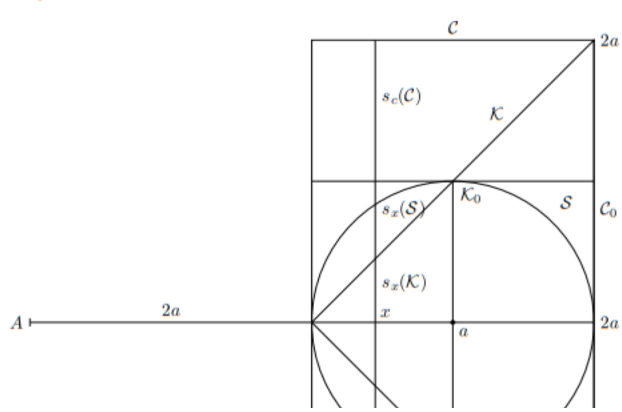
Questo è l'approccio di Archimede, è un approccio molto euristico che contiene almeno due salti argomentativi difficili da ac
In questa dimostrazione sembra effettivamente che Archimede stia "integrando" o per lo meno stia tentando un approccio d
come supposto effettivamente da Heiberg, la cosa importante è però che Archimede non usa sempre questo stesso approcci
dal finito all' "infinito", usa metodi diversi a seconda dei contesti che ha davanti. Pertanto è scorretto parlare di metodo di ir
quanto questo presupporrebbe un metodo alla base, caratteristica assente in Archimede.

Sempre nel Metodo abbiamo:

### 1.2 Una bilancia più complicata: il caso della sfera

Un approccio simile a quello appena visto viene adottato anche per determinare il rapporto fra la sfera e il cilindro ad essa circoscritto.

Indichiamo come prima con $s_x(\mathcal{F})$ la sezione perpendicolare all'asse di una figura $\mathcal{F}$ nel punto $x$ dell'asse. In Fig. 3 è rappresentata una sfera $\mathcal{S}$ di diametro $2a$ insieme con un cono $\mathcal{K}$ e un cilindro $\mathcal{C}$ aventi raggio di base $2a$ e altezza $2a$. Indicheremo inoltre con $\mathcal{C}_0$ il cilindro circoscritto alla sfera e con $\mathcal{K}_0$ il cono inscritto nella semisfera.



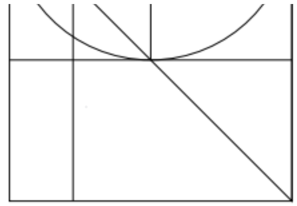


Figura 3: La bilancia virtuale per la sfera.

Notiamo che $s_x(\mathcal{S})$ è un cerchio di raggio $y$ e l'equazione del cerchio massimo della sfera è[3]:

$$y^2 = 2ax - x^2.$$

Di conseguenza:

$$s_x(\mathcal{S}) :: 2ax - x^2$$

e, d'altra parte, le sezioni del cono $\mathcal{K}$ e del cilindro $\mathcal{C}$ sono proporzionali rispettivamente a $x^2$ e a $4a^2$, quindi:

$$s_x(\mathcal{S}) + s_x(\mathcal{K}) : s_x(\mathcal{C}) = 2ax : 4a^2 = x : 2a.$$

STESSA SITUAZION

Archimede pa

Sezione di

Sfera + C

è qualcosa da

IMMAGINABILE

Cerchi me

Cosa vuol r

Ovvero, in termini di bilancia virtuale, le sezioni del cilindro lasciate dove si trovano fanno equilibrio alle sezioni della sfera e del cono prese insieme e trasportate nel punto $A$, collocato all'estremità della bilancia a distanza $2a$ dal fulcro. Ne segue, ragionando come nel caso del paraboloide, che $\mathcal{S} + \mathcal{K}$ equilibra il cilindro $\mathcal{C}$ dalle distanze $2a$ e $a$ e dunque, per la legge della leva:

$$(\mathcal{S} + \mathcal{K}) : \mathcal{C} = a : 2a.$$

???

Ne segue che la sfera e il cono, presi insieme, sono la metà del cilindro e che, dato che il cilindro è il triplo del cono, la sfera risulta uguale a metà del cono:

$$2(\mathcal{S} + \mathcal{K}) = \mathcal{C} = 3\mathcal{K} \longrightarrow 2\mathcal{S} = \mathcal{K}.$$

Da questo segue immediatamente che la sfera è quadrupla del cono $\mathcal{K}_0$ inscritto nella semisfera che, a sua volta, è $1/6$ del cilindro $\mathcal{C}_0$ circoscritto alla sfera e quindi $\mathcal{S} = 4/6\ \mathcal{C}_0$:

La sfera è uguale a due terzi del cilindro ad essa circoscritto.

Quando Archimede utilizza questo approccio EURISTICO, utilizza anche delle proprietà specifiche della figura, non si può quir
metodo. Questo testo comunque risulta il più avanzato dal punto di vista dell'astrazione.

Cos'è per la geometria greca una dimostrazione di Geometria di misura?

Prop. 1 Misura del cerchio

Per cercare di rispondere a questa domanda presentiamo rapidamente la proposizione 1 della *Misura del cerchio*:

**Teorema 2.1.** *Un cerchio è uguale al triangolo rettangolo avente per cateti il raggio e la circonferenza rettificata.*

Doppia Riduzio

Assurdo, tipo

E

*Dimostrazione.* Indichiamo con $T(x, y)$ il triangolo rettangolo di cateti $x$ e $y$. Il cerchio $\Gamma$ abbia circonferenza $\gamma$ e raggio $r$. Se, per assurdo, non fosse $T(\gamma, r) = \Gamma$ dovrebbe essere

(1) $T(\gamma, r) < \Gamma$, oppure

(2) $T(\gamma, r) > \Gamma$.

Caso (1). In Fig. 4 si considerino i quadrati $q, Q$ rispettivamente inscritti e circoscritti al cerchio Γ; poiché $\Gamma < Q = 2q$, ne segue che, togliendo dal cerchio il quadrato inscritto, si toglie più della metà del cerchio stesso. Analogamente, se si dividono gli archi a metà inscrivendo un ottagono, e si tolgono dai segmenti $\sigma$ i triangoli $\tau$, si toglie più della metà dei segmenti.

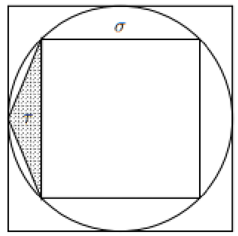



Figura 4: L'approssimazione del cerchio con poligoni inscritti.

Proseguendo in questo modo, si può arrivare a un poligono inscritto $P_i$ tale che $\Gamma - P_i$ sia minore di una qualunque quantità $E$ assegnata[4]. Si determini allora un poligono inscritto $P_i$ tale che

$$\Gamma - P_i < \Gamma - T(\gamma, r) \quad \text{ovvero} \quad P_i > T(\gamma, r).$$

Ma, indicando con $a_i$ l'apotema e con $p_i$ il perimetro del poligono, dovrebbe essere

$$P_i = T(p_i, a_i) > T(\gamma, r),$$

[4]Questo principio è codificato nella proposizione X.1 degli *Elementi* di Euclide: "Date due grandezze disuguali, se dalla maggiore si toglie continuamente una parte maggiore della sua metà, alla fine rimarrà una grandezza minore di qualunque grandezza preassegnata" ed utilizzato largamente nella geometria di misura prearchimedea, in particolare da Eudosso (IV sec. a.C.) i cui risultati sul cerchio, le piramidi, i coni e la sfera si trovano nel XII libro degli *Elementi*.

e siccome $a_i < r$ e $p_i < \gamma^5$ si ottiene una contraddizione dato che

$$T(p_i, a_i) < T(\gamma, r).$$

Caso (2). Si può dimostrare che anche per i poligoni circoscritti esiste una procedura costruttiva che permette di arrivare a un poligono circoscritto $P_c$ tale che $P_c - \Gamma$ sia minore di una qualunque quantità $E$ assegnata. In particolare si determini $P_c$ in modo che

$$P_c - \Gamma < T(\gamma, r) - \Gamma \quad \text{ovvero} \quad P_c < T(\gamma, r).$$

Ma, indicando con $p_c$ il perimetro del poligono, dovrebbe essere

$$P_c = T(p_c, r) < T(\gamma, r)$$

$T(P_c, r)$ = Tria che ha altezz $P_c$.

e siccome $p_c > \gamma^6$ si ottiene una contraddizione dato che deve essere

$$T(p_c, r) > T(\gamma, r).$$

Di conseguenza, non resta che una sola possibilità: $\Gamma = T(\gamma, r)$. □

Perché ha senso? poi non esi

qui si dà per scontato che le "grandezze" siano complete.

nella matematica greca questo concetto non definito.

Le grandezze si possono confrontare, ma non viene mai detto da nessuna parte come si sommano o altro.
Ci sono delle costanti nell'approccio che variano di caso in caso. Vediamo la **quadratura della parabola**. Per quadrare la para usa due dimostrazioni: una con le bilance e una in modo geometrico.

## QUADRATURA DELLA PARABOLA

**Segmento di parabola**

Torniamo ad Archimede (figura 4). Nella *Quadratura della parabola* troviamo un'applicazione della doppia riduzione molto meno aderente al modello astratto o al

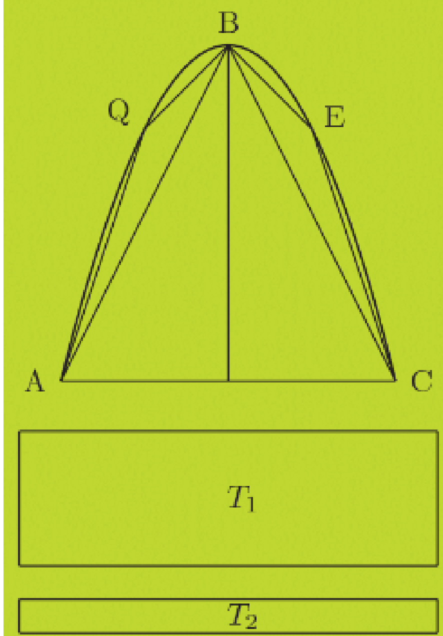



FIGURA 4

$= \triangle ABC$

$= \frac{1}{4} \triangle ABC$

procedimento dei *Conoidi e sferoidi*. Nel segmento di parabola ABC sia inscritto il triangolo ABC avente stessa base e stessa altezza del segmento ("stessa altezza" significa che il punto B è il "vertice" del segmento parabolico, cioè il punto più lontano dalla base AC sulla curva parabolica tra A e C; in altre parole, la tangente alla parabola al punto B è parallela alla base AC). Archimede dimostra che il segmento di parabola ABC è quattro terzi del triangolo ABC.

Poniamo che la superficie $T_1$ sia uguale al triangolo ABC. Il segmento parabolico ABC risulta composto dal triangolo ABC e dai due segmenti di parabola residui, AQB e BEC. Siano Q e E i vertici di questi segmenti rispettivamente e si costruiscano i triangoli AQB e BEC. Si dimostra che i due triangoli AQB e BEC costruiti dentro i segmenti, presi insieme, sono uguali a un quarto di $T_1$. Consideriamo la superficie $T_2$ uguale a questi due triangoli: avremo che $T_2 = 1/4T_1$ . Nei quattro segmenti residui tra AQ, QB, BE, EC, si costruiscano quattro triangoli nello stesso modo. Si dimostra che questi quattro triangoli presi insieme sono un quarto di $T_2$; poniamoli uguali alla superficie $T_3$. Così si può continuare a costruire i triangoli nei segmenti residui. La figura inscritta *I*, costruita in questo modo, è la somma della serie geometrica di ragione 1/4:

$$I = T_1 + \frac{1}{4}T_1 + \frac{1}{4^2}T_1 + \cdots + \frac{1}{4^n}T_1 + \cdots$$

Noi concluderemmo subito che l'intero segmento parabolico è uguale a:

$$\sum_{n=0}^{\infty} T_n = \frac{1}{1-\frac{1}{4}}T_1 = \frac{4}{3}T_1.$$

Archimede, non disponendo né del concetto di limite né tantomeno di quello di somma di una serie (che se ne deriva), fa ricorso alla doppia riduzione all'assurdo. Sia *P* il

segmento di parabola e sia $K = 4/3T_1$. Constata:
1. che $P - I$ può essere minore di qualsiasi area data [3];
2. $K > I$;
3. $K - I$ può essere minore di qualsiasi area data.

Allora, se $P > K$, da (1) si può prendere una figura inscritta $I$ in modo che $P > I > K$, il che è contro (2). Se invece fosse $P < K$, si potrebbe prendere $I$ in modo che risulti $P < I < K$, il che contraddice il fatto che $I$ è una figura inscritta a $P$. Quindi, $P = K$.

Come nel caso della XII.2 di Euclide, in questa nella dimostrazione di Archimede viene utilizzato un trucco. Quindi questa unif dimostrazione è tutt'altro che uniforme. La geometria di misura di Archimede è per certi versi simile a quello che facciamo no aspetti è decisamente legata all'individualità delle figure che vengono trattate.

Gli oggetti che Archimede tratta non sono generali, inoltri gli approcci che adotta sono plasmati rispetto alla singola figura o affronta.