# STORIA DELLA MATEMATICA

## LEZIONE 1→ 25-09-2020

**Panoramica sul corso**.
**I parte del corso** → matematica Greca **dal V sec a.C al VI sec d.C**
→ autori della matematica Greca :
→ **Euclide** → 340 a.C.
→ **Archimede**→ 212 a.C.
→ **Apollonio**→ III -II a.C.
→ **Pappo** → III-IV d.C

**II parte del corso** → fine dell'antichità, caduta dell'Impero Romano (V d.C.). Il mondo si divide in tre parti:

1. **L'Oriente**(Impero Romano con capitale Costantinopoli)
2. **L'Occidente**(regni romano-barbarici)
3. **Africa e Spagna**(musulmani)

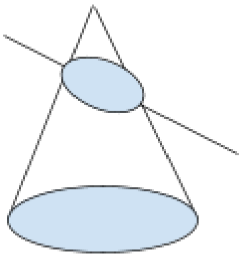
In Africa e Spagna a partire dal IX d. C. inizia uno sviluppo importante della matematica che ha due radici:

1. una radice è quella greca attraverso un processo di trasmissione e traduzione di opere greche in arabo.
2. l'altra radice consiste nel processo autoctono, cioè gli arabi inventano l'algebra, o meglio inventano un nuovo oggetto della matematica che è l'equazione.

Ad esempio **al-Khwarizmi** nel IX sec inventa l'equazione come un oggetto matematico a sé.
A partire dal XI-XII secolo la matematica araba si trasmette in Europa attraverso delle traduzioni in latino. Questo percorso si svilupperà soprattutto nell'Italia centro-settentrionale e darà luogo a un nuovo fenomeno detto delle scuole d'abaco in cui si insegnano gli algoritmi per l'uso delle cifre arabe, o meglio indiane; si insegna la matematica commerciale (quella che serve nel commercio). In questo fenomeno delle scuole d'abaco le traduzioni algebriche si sviluppano notevolmente. Nel 1540 queste traduzioni algebriche arrivano alle regole per la soluzione delle equazioni di 3° e 4° (da cui poi derivano i numeri complessi). Parallelamente a tutto questo si sviluppa l'Umanesimo. All'interno del movimento umanistico si cerca di accedere e ritornare alle fonti greche. Intorno al 400 e al 500 vengono recuperati i manoscritti greci e diffusi attraverso la stampa(nascita e diffusione della stampa).

**III parte del corso**→ Alla fine del 500 la tradizione algebrico-abachistica e la tradizione greca-umanistica confluiscono in un'opera del matematico francese

**François Viète**(1540-1603) e l'algebra dopo 7 secoli assume il ruolo di una disciplina matematica a tutti gli effetti come la geometria.
Questo nuovo punto di vista dell'algebra sarà alla base della rivoluzione cartesiana. Nel 1637 **Descartes** pubblica l'opera ''Il Discorso Sul Metodo'' (Discorso sul metodo per un retto uso della propria ragione e per la ricerca della verità nelle scienze più la diottrica, le meteore e la geometria che sono saggi di questo metodo.) Il sistema del dubbio sistematico lo applica alla Geometria, alla diottrica(studio degli specchi, riflessione), e delle meteore(arcobaleno)
La vera rivoluzione sarà quella della geometria. Fino ad allora gli oggetti matematici erano oggetti singoli.
Per esempio l'ellisse era la curva che si ottiene tagliando un cono che incontri tutte e due le generatrici. Questa è la definizione di ellisse. Da Cartesio in poi, l'ellisse diventa un' equazione in due variabili di 2° → $f(x,y)=0$



Dove è la differenza? Nella matematica pre-cartesiana ogni curva deve avere la sua generazione , cioè è una sformalizzazione del mondo concreto. Da Cartesio in poi assumono un aspetto generale. Prima di Cartesio ogni problema aveva una risoluzione particolare: data un'ellisse come trovo la tangente? Dopo cartesio ci chiediamo se esiste un metodo o un calcolo algebrico che mi permetta di trovare la tangente a una curva qualunque. Il problema della tangente si risolverà con la nascita del calcolo infinitesimale e con la nascita della matematica moderna. Quindi la Geometria è la più importante rivoluzione in Matematica.

**LEZIONE 2 → 28-09-2020**

La storia della matematica è una storia che si lega alla storia delle **culture umane** e in particolare alle civiltà in cui la matematica si è sviluppata. La matematica è una **letteratura** perché si trasmette con i testi al pari della poesia, del teatro, della storia. Questa si trasmette attraverso i testi proprio per le dimostrazioni e gli assiomi che ne fanno parte.
Per esempio la teoria delle coniche si comincia a sviluppare in Grecia a partire dal IV secolo a.C. Poi alla fine del III secolo arriva **Apollonio** che riformula completamente la teoria delle coniche,  cambiando la definizione e introducendo nuovi oggetti come il cono generalizzato con base circolare o

obliqua ecc… **Archimede** che è vissuto prima di Apollonio , utilizza le conoscenze note a quell'epoca per descrivere la teoria delle coniche producendo scritti diversi da quelli di Apollonio. Noi sappiamo quali risultati erano noti ad Archimede ma non sappiamo come quei risultati erano dimostrati a quei tempi, in questo modo abbiamo perso tutti (quasi) gli scritti di Archimede, è come se gli scritti di Apollonio avessero fagocitato(inglobato) quelli archimedei.
Essendo la matematica una letteratura dobbiamo adottare le tecniche che si usano per studiare la storia in particolare la **filologia**. Se prendiamo Archimede dobbiamo distinguere che tipo di Archimede dobbiamo studiare: quello Greco(vissuto a Siracusa)? Quello che viene riscoperto nel rinascimento(ma anche Apollonio viene riscoperto e quindi studiare Archimede sotto la luce di Apollonio)? Oppure quello che abbiamo oggi (Ricostruito da **Heiberg** e dalla letteratura contemporanea)? Questi sono punti di vista molto diversi. La matematica è anche un prodotto letterario delle culture umane e quindi bisogna approcciarlo con gli strumenti necessari.

### Perché si inizia dalla matematica Greca?

La civiltà egizia e babilonese hanno avuto una influenza decisiva sulla civiltà greca, perché non iniziare da loro? Per esempio il sistema sessagesimale deriva dai Babilonesi, così come gli studi astronomici.
**Cominciamo da quella greca perché i greci hanno inventato la matematica con dimostrazione.** Una matematica in cui per asserire qualcosa bisogna dimostrarlo. Questo non è stato un processo lineare, quello che avviene nella Grecia del VI-V secolo a.C. è che in Turchia si erano costituite una serie di colonie greche(le Ionie la cui città più importante era Mileto) in stretto contatto con il mondo mesopotamico(in particolare i Babilonesi). Proprio nella Ionia avviene un processo di razionalizzazione di miti e procedure del mondo occidentale, vedi ad esempio gli arché di Talete(acqua), Anassimandro ecc.. Questo tipo di matematica è un prodotto del mondo ellenico che si va raffinando via via fino a raggiungere i vertici della matematica ellenistica dal IV secolo fino al I secolo a.C. (con **Euclide, Archimede, Apollonio**), e diventare un corpus di scritti e di testi notevole. Quindi in qualche modo la matematica greca è l'antenata della nostra matematica. Il fatto che sussista questo non vuol dire che i greci facessero la nostra stessa matematica.

### Esiste una matematica greca?

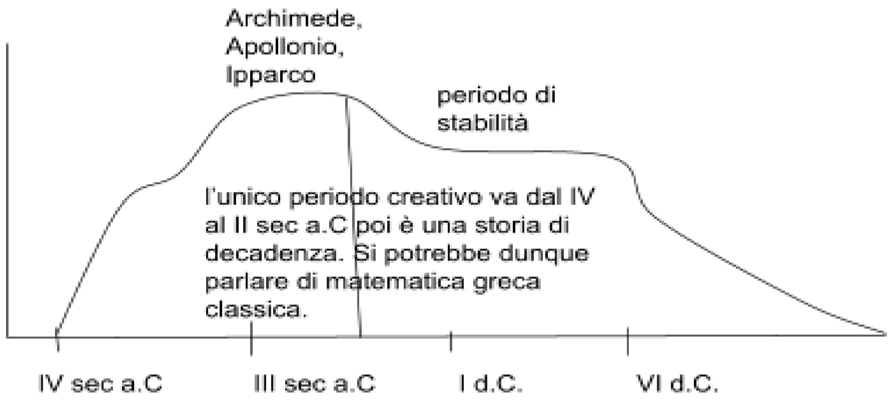
La matematica greca sembra essersi sviluppata dalla fine del V secolo a.C. fino al VI secolo d.C. (10-11 secoli) ha senso parlare di matematica greca per tutto questo periodo? **La matematica greca nell'arco di questi 10 secoli mostra una notevole unità interna.** **Pappo** che è uno degli ultimi matematici greci (III-IV sec d.C.) scrive un'opera intitolata ''Collezione Matematica'' fatta di otto libri, in cui riprende la matematica di Apollonio, Archimede, autori vissuti 500 anni prima. Oppure **Eutocio**(scrittore bizantino) scrive commenti alle opere di Archimede e di Apollonio (conosciamo Apollonio grazie a Eutocio). Quindi in qualche modo la matematica greca ha una notevole stabilità, i temi che vengono sviluppati in questi mille anni sono essenzialmente stabili. Ad esempio c'è un problema che attraversa tutti questi secoli, da **Ippocrate di Chio** (fine del V sec a.C) fino a **Pappo/Eutocio** (VI d.C.).

**Problema di due medie proporzionali:**
*Date due grandezze A e B, trovare due grandezze x e y tali che rispettano la seguente proporzione→* $A : x = x : y = y : B$

E' un problema di terzo grado che non si risolve con righe e compassi.Ci sono quindi questioni che attraversano tutti il corso di questi 1000 anni, questo è uno degli elementi che ci permettono di parlare di esistenza di una matematica greca.

**Un altro elemento importante è il fatto che la matematica greca sia scritta in greco, in un greco particolare.** È un linguaggio altamente formalizzato, non conosce formule, ma per parlare di proporzioni di angoli, di quadrati di rettangoli si usa sempre lo stesso linguaggio.
Quindi la matematica greca ha una continuità di linguaggio e di problemi che attraversano questi mille anni.

Contro questa idea che sia esistita una matematica greca si potrebbe obiettare il fatto che l'unico periodo di creatività della matematica greca è molto ridotto. (Vedi grafico).



## Chi erano i matematici greci?

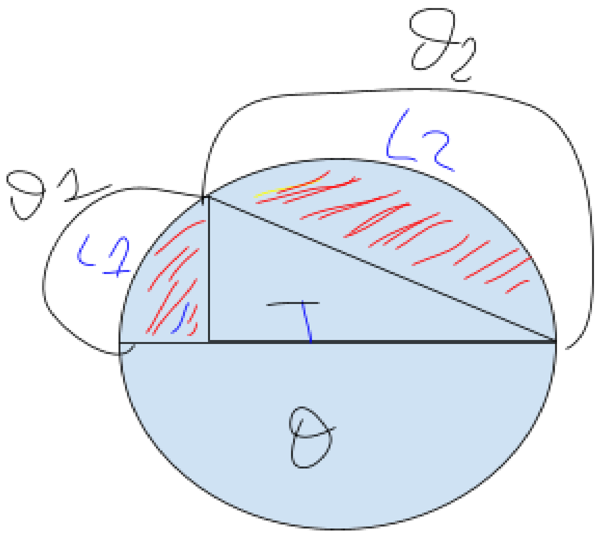
Nel mondo greco la matematica non sembra essere il linguaggio universale del sapere (come nel nostro), non è neppure chiaro che ruolo sociale abbia, qui dobbiamo introdurre un'altra distinzione. Se prendiamo **Archimede, Apollonio o Euclide** questi parlavano e trattavano di cose molto astratte.
**Markus Asper** (uno storico) dice che il mondo antico ha conosciuto due tipi di matematica differenti:
Nel mondo antico c'era una netta separazione tra **gli aspetti pratici e teorici.** La matematica di **Archimede, Apollonio** è quella teorica, di quella pratica(misure di campi) ci è arrivato ben poco, in particolare si vede anche dalle fonti che ci sono arrivate che si tratta di matematica nettamente diversa. Sarà all'inizio del '600 che queste due tradizioni si fonderanno in qualcosa di nuovo, dove il processo di dimostrazione subirà diversi colpi e il rigore dimostrativo calerà molto.
Una possibile risposta a cosa facevano chi erano i matematici greci è che la matematica greca era una sottobranca di discussioni filosofiche. È probabile che i matematici greci teorici costituissero una specie di nicchia dentro gli ambienti intellettuali.

## Quanti erano, e in quale contesto si sviluppano?

**Reviel Netz**: studioso della matematica antica ha fatto una specie di conto basandosi sui fatti storici ed è pervenuto a dire che in 1000 anni ci siano stati 1000 matematici. La matematica essendo una letteratura ha bisogno di **testi scritti**. Un'altra caratteristica della matematica antica è il fatto che **si sviluppa attorno a comunità,** e queste comunità si sviluppano attorno a centri di potere che mettono a disposizione le cose per vivere, centri di questo tipo sono: Atene (IV sec) e Alessandria (III-II sec d.c.)(i Tolomei fanno la biblioteca di Alessandria e il museo cioè la casa delle muse che ospitava importanti intellettuali), Rodi, Pergamo.
Fino all'invenzione della stampa, (quando si riesce a svincolare dalla necessità della matematica vincolata ad un luogo) la matematica è legata all'esistenza di questa centri. Il problema è che se uno di questi centri viene a estinguersi, l'attività intellettuale scompare. Un esempio è Archimede (287 a.C - 212 a.C) alla corte di Gerone di Siracusa, e quindi è protetto e sostenuto da questo re. Con la fine di Siracusa si ha la fine anche della matematica a Siracusa. Quindi la matematica è legata a dei luoghi, proprio perché i matematici hanno bisogno di una nicchia ecologica in cui poter vivere, e sviluppare quindi le proprie idee.

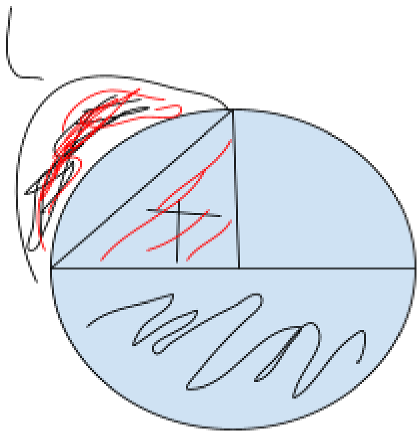
## Rapido Excursus sulla storia della matematica Greca

La matematica greca viene fatta iniziare con Talete e Pitagora (VI secolo a.C.). La maggior parte degli studiosi ritengono che **Pitagora** con la matematica avesse poco o niente a che fare. Pitagora era capo di una setta religiosa politica che coltivava dottrine della reincarnazione, sul mangiare le fave ecc.. Quindi è difficile pensare che quei fatti possano essere attribuiti a lui quanto bensì a una corrente di pensiero che si rifà a Pitagora.
**Talete** invece, vive a Mileto. Ci sono giunte notizie che lui abbia predetto una eclisse di sole, sapesse misurare la distanza dalle navi ecc…
Un'altra attribuzione importante di Talete è che *Il cerchio è diviso in due dal diametro,* Questo ci è pervenuto da un filosofo neoplatonico **Proclo** (V d.c) che a sua volta si rifà a una storia della geometria scritta da **Eudemo** vissuto nel IV secolo a.C. c'è da crederci? Che Talete fosse in grado di fare queste dimostrazioni? Quello che si può dire è che questi risultati vadano assegnati a un altro matematico: **Ippocrate di Chio** (forse il vero primo matematico) 50/60 anni successivo a Talete.
Succede che le colonie greche della Ionia finiscono sotto il dominio dell'impero Persiano. Poi queste colonie si ribellano, Mileto si pone a capo di queste colonie, e questo porta a una migrazione degli Ioni dalla Ionia ad Atene. Ippocrate si stabilisce quindi ad Atene e secondo Proclo è il primo a scrivere degli elementi, quindi possiamo dire che la matematica greca inizi (dopo un periodo di gestazione nelle Ionie) alla fine del V secolo a.C. con Ippocrate. Di Ippocrate di Chio ci è pervenuto tramite **Simplicio**, un testo in cui Ippocrate tratta della *quadratura delle lunule.*




Consideriamo un semicerchio e un triangolo rettangolo inscritto al semicerchio.costruisco delle lune sugli archi e ottengo sigma 1 e sigma 2. la cui somma fa sigma. Se tolgo la parte in comune ovvero quella in rosso. ottengo che la somma delle due mezze lune L1 +L2= T dove T è il triangolo

$$\sigma_1 + \sigma_2 = \sigma$$
$$L_1 + L_2 = T$$

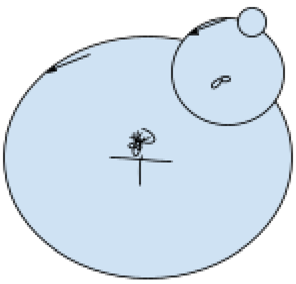


considero un semicerchio. lo divido a metà ottengo un triangolo T che è uguale alla semiluna L e cioè L=T

**Da qui si ha la prima quadratura di oggetti curvilinei che si conosca**. Questa tendenza a articolare gli elementi inglobando risultati nuovi si va a sviluppare fino al V secolo. **In questo secolo si ha l'invenzione della teoria delle coniche da una parte, e dall'altra si ha la scoperta delle grandezze incommensurabili e in terzo luogo, una riformulazione della teoria delle proporzioni**. La scoperta di queste grandezze incommensurabili ha dei riflessi sulla teoria delle proporzioni:
cosa significava dire a : b = c : d ?
si fa l'Algoritmo di Euclide:
a= b . q1 + r1
b= r1 . q2 + r2
r1= r2 . q3 + r3
………………
r(n-2) = r(n-1) . qn + rn

se a e b sono commensurabili a un certo punto l'A.E. dovrà terminare in quanto la successione dei quozienti ci dice che a entra in b q1 volte e così via e cioè mi dice quante volte la prima grandezza entra nella seconda e quindi la successione dei quozienti mi da una definizione di rapporto. Questo si chiama **antanairesis** e sta alla base della definizione di rapporto. Due numeri sono in proporzione (antanairesis) se mi danno la stessa successione di quozienti
Con la diagonale del quadrato (incommensurabile) la successione dei quozienti non finisce (mi da sempre 1) quindi si cerca di cambiare la teoria della proporzioni. Questo viene fatto da **Eudosso di Cnido** metà del IV secolo. Eudosso inventa anche una tecnica dimostrativa per trattare questo tipo di problemi : **il metodo di esaustione**. Sempre in questo periodo grazie ad un allievo di Eudosso, **Menecmo,** si sviluppa la teoria delle coniche. In questo modo la matematica si va ampliando, sarà all'inizio del III secolo che tutti questi nuovi risultati verranno codificati da Euclide nei suoi Elementi.

**Euclide** vive ad Alessandria, legato alla corte dei Tolomei. E la teoria delle coniche si sviluppa molto ad Alessandria tanto che verso la fine del III secolo inizio del II, **Apollonio di Perga** riformula l'intera teoria delle coniche scrivendo molti testi che hanno a che fare con la geometria delle posizioni cioè lo studio delle possibili posizioni che rette e curve possono avere fra di loro . Sempre in questo periodo **Archimede** di Siracusa sviluppa la Geometria di misura meccanica teorica che era stata inaugurata prima da Ippocrate poi da Eudosso, ottenendo risultati impressionanti, trova la quadratura della parabola, la cubatura della sfera, il paraboloide, l'ellissoide, iperboloide.
In pochi secoli si passa da problemi elementari a problemi di notevole difficoltà. Un importante esponente della matematica ellenistica è **Ipparco**, che ha svolto diversi studi nel campo dell'astronomia. Egli sviluppa il sistema nel II sec a. C. per cui il moto di un pianeta viene descritto in questi termini:la terra sta al centro dell'universo e che tutti i pianeti girano attorno, sole compreso. Questo sistema verrà poi ripreso e riassunto da Tolomeo nel II d. C



il pianeta si muove su questo cerchietto chiamato epiciclo e il centro di questo cerchietto si muove sul deferente

Fino a Ipparco c'è un forte sviluppo, poi abbiamo un "buco" nello sviluppo della matematica. Questo buco è la curva di cui si parlava prima, ed è dovuto a cause esterne: finito il centro di potere finisce la matematica legata ad essa. I romani si stanno espandendo con guerre su guerre e saccheggi, poi nel I secolo a.C. l'impero romano è afflitto da guerre civili. Con Ottaviano Augusto nel 33 a.c. ritorna la pace, il mondo viene unificato dalla pace universale di Augusto. Quindi c'è una lenta ripresa delle arti delle scienze e della matematica stessa.

## LEZIONE 3 → 2 -10-2020

### Volta scorsa

**Perché la matematica greca?** Abbiamo osservato che la matematica greca è una delle radici della nostra matematica in quanto con lei nasce il metodo dimostrativo. È vero che la matematica greca è una delle radici della nostra matematica, ma non la sola. Abbiamo altri filoni di matematica non

dimostrativa che si intreccia con la matematica greca e questi filoni daranno un contributo fondamentale per la nascita della matematica moderna.
**Si può parlare di matematica greca?** La cosa all'inizio può sembrare strana perché è difficile pensare in maniera omogenea a un periodo di 1000 anni. Abbiamo però visto che c'è una forte continuità per quanto riguarda metodi dimostrativi, oggetti, problemi che percorrono tutto questo periodo.
**Ippocrate di Chio**: primo matematico greco e primo a dimostrare teoremi inseriti in una struttura dimostrativa.

*Panoramica Matematica Greca:*

1. *Nel IV secolo scoperta delle grandezze incommensurabili e quindi la necessità di riformare la teoria delle proporzioni.*
2. *L'invenzione di un nuovo oggetto di studio: le sezioni coniche*.

tutto questo confluisce da una parte negli Elementi di **Euclide** e l'inizio di uno studio sistematico della teoria delle sezioni coniche. Questo porterà ad **Apollonio**, mentre nel campo della geometria di misura e i risultati sviluppati da **Eudosso** con la tecnica dimostrativa della **doppia riduzione ad assurdo** saranno poi concetti ripresi da **Archimede** (III secolo a.c.) con risultati e dimostrazioni molto elaborate. Questi filoni, per quanto riguarda le sezioni coniche, gli aspetti di costruzione di elementi, aspetti di astronomia arrivano a maturazione con **Teodosio e Menelao** che scrivono dei trattati di geometria sferica, con **Ipparco** che applica queste teorie sviluppate all' astronomia.

A questo punto inizia la fase ultima della matematica greca, dove piuttosto che ottenere risultati nuovi ci si concentra sul commento e sull'elaborazione di risultati già studiati, l'opera per eccellenza di questo campo è la ''Collezione Matematica'' di **Pappo** (è una sorta di complementi ed esercizi della matematica precedente) in cui viene approfondito il corpus della matematica creato 4/5 secoli prima di Pappo stesso. Abbiamo anche **Eutocio** che farà l'edizione delle coniche di **Apollonio** e altri matematici minori.

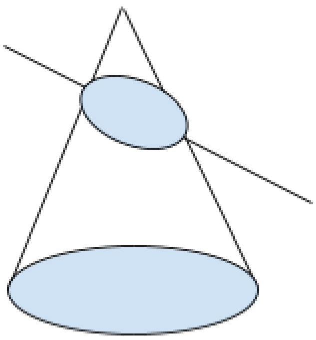
**Come mai dopo Archimede Apollonio non c'è uno sviluppo ulteriore?**
Osserviamo che dopo il III secolo a.C. quindi dopo che Roma sconfisse Cartagine con le guerre puniche e dopo le guerre civili fino alla pace di Augusto si ha un periodo di stasi dal punto di vista culturale. A spiegare questo andamento della matematica greca non bastano solo le cause esterne, c'è qualcosa nella matematica greca che l'auto-limita.

## Di cosa si occupa la matematica greca?

Partiamo da un esempio: cosa è per noi un ellisse? Per noi è un luogo di zeri di un polinomio di secondo grado in due variabili che soddisfa certe condizioni.
Per i Greci è la curva che si ottiene sezionando un cono con un piano che incontri tutte le sue generatrici.

## Quale è la differenza tra la nostra e la definizione greca?

Per noi una curva è un oggetto generale di cui a priori non sappiamo nemmeno se esista, noi prendiamo una certa proprietà e la oggettifichiamo.
Per i greci il procedimento è il contrario. Si parte da una figura e si ottiene l'oggetto ellisse da cui poi se ne ricavano le proprietà.



per i Greci $f(x,y)=0$ per noi

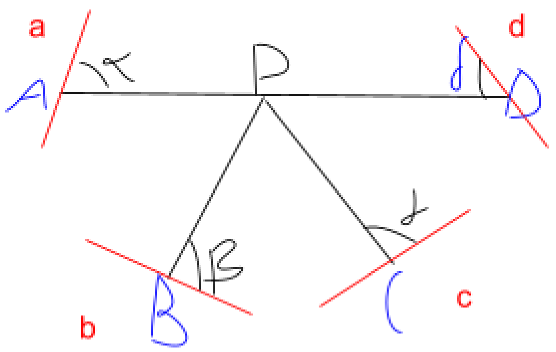
Per noi le proprietà vengono prima dell'oggetto, per i greci è il contrario. Se noi abbiamo un oggetto generale, ovvero la curva algebrica, possiamo anche porci problemi generali e inventarci dei metodi generali ad esempio con le tecniche di derivazione. Invece per i greci il problema è quello di trovare la tangente all'ellisse, al cerchio, alla parabola,( cioè a una curva specifica).
L'oggetto ha una sua individualità e questo deriva dal fatto che l'oggetto non appartiene ad una classe ma è generato da un procedimento costruttivo.
Per i greci la **retta** è ciò che giace ugualmente rispetto ai suoi estremi, oppure **punto** è ciò che non ha parti. Cosa vuol dire la prima definizione? Una retta si costruisce prendendo due chiodi e agganciando ad essa una corda e tirarla fino a che la corda smetta di toccare per terra e non sia tesa.
Oppure il **cerchio** nella Definizione di **Euclide**:
*"Dicesi cerchio una figura piana delimitata da un'unica linea tale che tutte le rette che terminano su di essa a partire da un medesimo punto fra quelli interni alla figura siano uguali fra loro."*
Per noi il cerchio è il luogo dei punti del piano equidistanti dal centro.
**Quindi gli oggetti hanno la caratteristica di essere oggetti individui piuttosto che oggetti classe**. Nella matematica greca si parla della sfera e del cilindro, della parabola e dell'iperbole, non esiste il concetto di curva

generale oltre le sezioni coniche e poche altre curve (spirale di Archimede o concoide).

### Problema delle 3 / 4 linee

Molto importante per trattare di questo argomento è il problema di **Pappo:**
*"Nel famoso problema di Pappo risolto da Cartesio bisogna individuare il luogo geometrico descritto da un punto C per il quale il prodotto tra le distanze tra C e due rette sia uguale (o sia k volte) al prodotto delle distanze da C verso altre due rette. "*

Viene chiamato anche problema delle tre/quattro linee: determinare i punti P tali che se si conducono con angoli dati delle rette da uno di questi punti P alle quattro rette date, succeda che il rettangolo PAPB abbia un rapporto dato con il rettangolo PCPD




una retta nella geometria greca è quella che noi oggi chiamiamo segmento prolungabile. Non esiste la retta e neanche la linea infinita.

Date 4 rette (in rosso) determinare i punti P tali che se si conducono con angoli dati (alpha, beta, ganna,delta )delle rette da uno di questi punti {A,B,C,D} alle 4 rette date succede che il rettangolo compreso fra PA e PB abbia un rapporto dato

$$\frac{r(PA,PB)}{r(PC,PD)}$$

Si è dimostrato che per 3/4 rette i punti cadono su una delle sezioni coniche e sotto certe condizioni vanno  a cadere su una parabola un'ellisse o un'iperbole.
C'è chi si è posto il problema per 5/6 rette, Pappo dice che in questo caso i punti vanno a cadere su luoghi ancora sconosciuti, che nessuno ha mai trovato e di questi luoghi nessuno è riuscito a trovarne nemmeno uno che fosse il più semplice di tutti.
Questo problema sarà alla base della **"rivoluzione cartesiana"**. **Cartesio** traduce le curve geometriche in curve algebriche, con Cartesio egli dice "non mi pongo il problema su quale oggetto cadano i punti", l'oggetto sarà il luogo

geometrico degli zeri di una opportuna equazione che mi rappresenti tale curva.
**Questa stessa cosa avviene anche nel campo aritmetico**, per esempio i numeri greci non sono i nostri numeri naturali(che sono dati dagli assiomi di Peano).
Per i greci la **definizione di numero** è:

1. *Unità: tutto ciò che è detto uno è uno. Quello che vuol dire è che l'unità è ciò su cui ci si mette d'accordo sia uno.*
2. *Numero è molteplicità di unità*

I numeri greci sono i numeri per contare. Quindi anche i numeri hanno questa natura individua, ogni numero fa "razza per se". Quindi questa matematica ha dei grossi limiti nello studiare oggetti generali, quindi questa mancanza si ripercuote nella mancanza di oggetti generali. **Un altro aspetto strettamente connesso è il fatto che nella matematica greca gli aspetti aritmetico algebrici e geometrici sono nettamente separabili**, per non dire incomunicabili.
Il numero è molteplicità di unità, non deriva da un processo di misura. In particolare tutti i risultati di teoria di misura di Archimede, Eudosso o altri, vengono ottenuti tramite il confronto diretto tra un oggetto ignoto e uno che viene considerato più noto, ad esempio:
*La sfera è ⅔ del cilindro circoscritto oppure che il paraboloide è la metà del cilindro circoscritto a lui.*
In questo caso la sfera è considerata più ignota del cilindro. Non si trova:
*"area del triangolo si ottiene moltiplicando base per altezza e dividendo per due"*
*ma si trova: "il triangolo sta al rettangolo di egual base e altezza come 1 sta a 2".*
Quindi un aspetto fondamentale è che non entrano in gioco quelle considerazioni di tipo aritmetico algebrico. Questo è dovuto anche al fatto che in tutto il mondo antico non esistono unità di misura (almeno fino alla rivoluzione francese), in quel periodo "città che vai misura che trovi" le misure cambiavano in luoghi talvolta molto vicini.
Quindi un teorema viene enunciato in termini di proporzioni tra oggetti, piuttosto che proporzioni tra numeri. **La teoria delle proporzioni quindi è il linguaggio fondamentale della geometria greca.**
La matematica Greca ha però sviluppato anche aspetti aritmetici e anche aspetti algebrici..

Ad esempio **Euclide**(nel 7-8-9 libro) ha ottenuti risultati sulle progressione geometriche, aritmetiche, algoritmo di Euclide(9 libro), l'infinità dei numeri primi, numeri perfetti.
La matematica greca è si una radice importantissima della matematica moderna ma non è l'unica radice, questa nasce dall'ibridazione tra due correnti molto diverse.
**Diofanto** (II a.C.-III/IV d.c) di Alessandria scrive un'opera intitolata Aritmetica di 13 libri(ce ne sono pervenuti 10, 3 in arabo e 7 in greco), in cui tratta problemi diofantei cioè di analisi indeterminata. Il più famoso di tutti è: *dividere un quadrato in due quadrati.Dato un quadrato a scriverlo come* $a = x^2 + y^2$
Diofanto traduce il problema in equazione. **Dato che l'opera di Diofanto si chiama Aritmetica, si limita a cercare le soluzioni razionali/intere al problema. Quindi è difficile vedere in Diofanto l'origine dell'algebra.**
Supponiamo questo, ovvero che i greci abbiano coltivato delle tecniche algebriche, rimane comunque il fatto che tali tecniche algebriche rimangono separate da molti campi matematici in particolare dalla geometria. Questo è l'altro filone(radice), quello algebrico di soluzione dei problemi da cui si alimenta la matematica moderna.

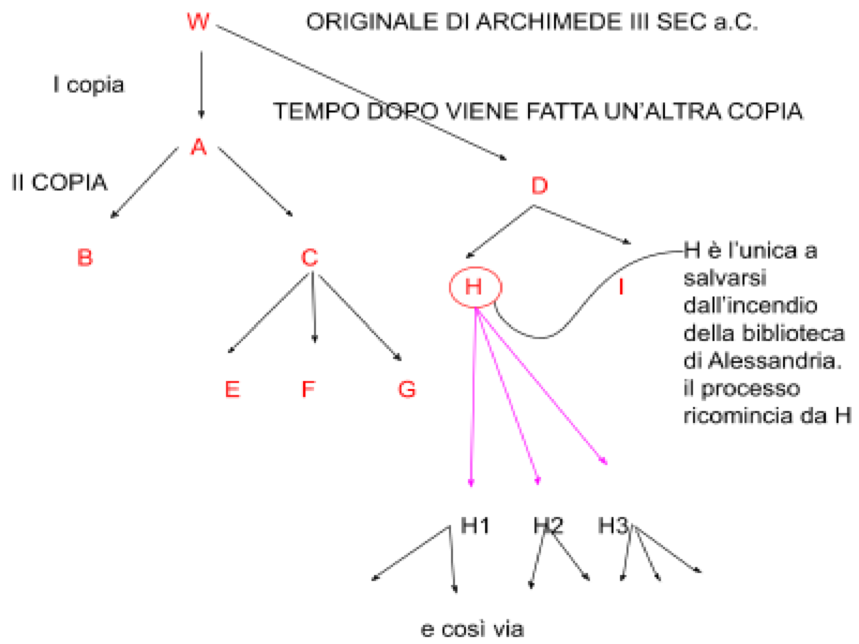
### La matematica moderna ha due avi: la tradizione algebrica e la tradizione della geometria greca.

Osservazione: la maggior parte dei matematici greci non hanno datazioni certe. L'unico matematico greco di cui abbiamo delle datazioni più certe è **Archimede**, questo perché è strettamente legato alle attività della sua città natale: Siracusa.
Ad esempio per **Euclide** si è arrivato a pensare che si trattasse di un gruppo di matematici. Si riesce solo a collocare nella prima metà del terzo secolo.
Gli oggetti della geometria di misura sono oggetti che hanno una forma, una sfera non è pura quantità, ha una forma in quanto io posso confrontarla con un il suo cilindro circoscritto. Il fatto di avere una descrizione puramente quantitativa emergerà quando la nozione di numero, soprattutto grazie agli arabi, passano da numeri per contare a numeri per operare, cioè i numeri assumono un aspetto algebrico e dunque possono essere usati per misurare.

### Come è arrivata fino a noi la matematica greca?

La matematica è considerata una letteratura. Quindi uno studioso della storia della matematica deve usare gli oggetti della filologia. Uno degli oggetti principali della filologia è il concetto di **TRADIZIONE**.

Tradizione: è il processo di trasmissione di un testo. Viene dal latino che vuol dire consegnare. Attraverso una catena di testimoni(lapidi, manoscritti) ci arriva il testo a noi.
Immaginiamo Archimede: inventa i teoremi della sfera e del cilindro, a questo punto chiama uno schiavo a cui detta cosa scrivere. Lo schiavo lo scrive su un rotolo di papiro e lo manda ad Alessandria al suo amico , ad Alessandria viene messo in biblioteca dove poi si fanno varie copie, da cui viene fuori una cosa del tipo:




Nel caso di Archimede noi conosciamo dei codici(tutti rinascimentali) D(codice del XV sec), E(codice di ½ XV sec), G(primo quarto del XVI sec), H, N(1544), Basilea 1544(prima edizione)  ma non sappiamo la relazione tra questi codici. Ricostruire l'albero fino al codice w non è possibile, potremmo arrivare al più ad H, prima che la tradizione si interrompa. Quindi la matematica greca originaria, cioè cosa ha veramente scritto Euclide, Archimede è nella maggior parte dei casi un **"noumeno"** un qualcosa a cui non possiamo arrivare.

Ad esempio un testo come gli Elementi di **Euclide** è stato soggetto di potature e sviluppi,  quali sono queste cause:

1. Cause naturali, perdita materiale del testimone
2. Tecnologia di scrittura: la scrittura sul papiro andrà avanti fino alla metà del II sec d.c. ma già si era sviluppata la scrittura su pergamena. Attenzione perché i papiri sono molto fragili quindi successivamente si è preferito passare oltre. Poi il rotolo ma questo è scomodo da leggere soprattutto per la matematica. Successivamente viene usato il codice, molto più comodo per

trovare le informazioni. In particolare a partire dall'inizio del tradizione volgare la tradizione del rotolo di papiro cade in disuso, quindi per l'esistenza del testo si ha la necessità di cambio di tecnologia di scrittura.

3. Tecniche di scrittura: prima si aveva la scrittura maiuscola continua successivamente a partire dal IV secolo si passa dalla maiuscola alla minuscola. E quindi i libri scritti in maiuscolo non li vuole più nessuno, in particolare non si sanno più leggere.
4. Le mode: le cose più nuove distruggono le vecchie. Gli elementi di Ippocrate non li possiamo più leggere perché dopo ci sono stati quelli di Euclide che erano molto più completi, quindi gli elementi di Ippocrate sono andati persi. La stessa cosa con Apollonio, egli riformula tutta la teoria delle coniche, quindi tutta la teoria pre-apolloniana viene andata persa.

Quindi ci sono una serie di cause che fanno si che l'albero della tradizione venga potato selvaggiamente. Questo è molto importante perché specialmente per la matematica fino alla diffusione della stampa, il possesso materiale del testimone tende a equivalere con il possesso del testo stesso. Succede che ho un manoscritto, leggo un teorema ad esempio il teorema di Pitagora:

- Lo leggo, vedo che si può trovare un risultato analogo anche per triangoli non rettangoli (Carnot) e lo dimostro
- Scrivo il risultato a margine di pagina
- Poi il manoscritto viene copiato, e la dimostrazione nel margine viene scritta nel corpo del testo

Morale, il processo di traduzione corrompe il testo. Anche negli elementi di Euclide è presente questo fenomeno.

### Come leggiamo la matematica greca oggi?

La leggiamo grazie a **Johan Ludvig Heiberg** (1840-1925 circa). Costui era un filologo danese il quale nella sua tesi di dottorato fece una edizione dell'opera di **Archimede** e l'anno dopo fece la prima edizione critica (=edizione che tiene conto di tutta la tradizione accessibile del testo). Oltre che di Archimede ha fatto l'edizione critica anche di **Euclide, Apollonio, Tolomeo, Sereno, Teodosio** e altri ancora. Per fare l'edizione critica si spende moltissimo tempo, è un lavoro immenso. In un certo senso si può dire che Heiberg è il creatore della matematica greca che leggiamo noi oggi. Ovviamente l'autore non è neutro, nella costruzione delle sue edizioni ci mette del suo. Inoltre

Heiberg era amico di un matematico di un certo valore **Hieronymus Zeuthen** con cui insieme condividono diversi lavori. Questo ha avuto conseguenze importanti sullo studio della storia della matematica nel corso del 1900. Le uniche edizioni critiche disponibili ad oggi:
**Archimede** → **Heiberg**
**Diofanto**→ **Paul Tannery**
**Pappo**→ **Hultsch**
**Apollonio** →**De Corps Foulquier** (2008 che tiene conto anche della tradizione araba)
Tutto questo significa che la visione di questi filologi ha influito pesantemente sulla visione della matematica greca dalle loro edizioni critiche in poi, questa influenza ha portato a una parziale deformazione dell'idea della matematica greca quella che la matematica greca sia la nostra matematica moderna travestita.
Zeuthen addirittura pensa che il secondo libro degli Elementi di Euclide fosse un trattato algebrico travestito da geometria.

**LEZIONE 4→5-10-2020**

Dei matematici greci si sa poco o nulla, l'unico di cui sappiamo qualcosa è Archimede. Quello che si può ricavare lo abbiamo dalle lettere di accompagnamento nelle loro opere, questa caratteristica riguarda in maggior modo Euclide, noto come **Euclide di Alessandria.**

**Euclide:**
**Proclo** nel V secolo d.C. scrive un commento al primo libro degli Elementi. Egli era un filosofo neoplatonico e le notizie che forniscono vanno prese con le molle. Per quanto riguarda Euclide egli afferma che **visse prima di Archimede** perché Archimede cita Euclide. Questo è vero ma solo per una cosa ed inoltre si pensa che fosse colpa di uno studioso che lo aveva annotato sul testo. Prendendo comunque per buono ciò che ci è stato detto da Proclo otteniamo che il punto di maggior splendore di Euclide si verrebbe a collocare circa nel **300 a.C.**
Non abbiamo un'idea sicura di quali fossero i rapporti di Euclide con Alessandria. Pappo se la prende con Apollonio perché egli critica una dimostrazione di Euclide sulle tre line. Succede quindi che se Apollonio che è collocabile III- II sec a.c ha studiato con gli allievi di Euclide, questo tende a portare Euclide verso il **250 a.C**, questo è un indizio. Un altro indizio fa riferimento ad Archimede di cui abbiamo delle date abbastanza certe 287-212 a.c., Archimede non cita Euclide ma c'è di peggio perché in vari parti della sua

opera avrebbe potuto citare gli elementi di Euclide, non lo fa mai! Il che fa pensare che Archimede gli elementi di Euclide non li avesse a disposizione. Quindi intorno al 240 a.c. risulta strano che non cita mai Euclide anzi cita teoria dissimili se non discordanti, quindi la produzione di Euclide ce lo fa collocare intorno **al 270-260 a.C.**
Altro “indizio” lo troviamo in Elefantina, sono stati trovati dei cocci (per annotare) ostraka, che contengono dei teoremi del 13° libro di Euclide con un testo molto simile a ciò che si legge attualmente anch’essi **non posteriori alla metà del terzo secolo**.
**Quindi si conclude che Euclide va collocato intorno alla metà del terzo secolo.**
Cosa è un libro (degli Elementi di Euclide)? E’ l’equivalente di un rotolo di capitolo che è l’equivalente di un nostro capitolo, ci entrano circa 50 teoremi. Poi abbiamo Ottica, Catottrica e i Data queste sono opere ritenute genuine. Ottica si occupa di raggi visuali, Catottrica della riflessione mentre l’ultima è una sorta di manuale che “data una cosa è data un’altra” una sorta di condizione necessaria per la costruzione di figure. Gli è attribuito anche un trattato di musica teorica, ovvero su come dividere l’intervallo musicale in terza quarta e quinta… poi ci sono opere non pervenute, ci sembra che Euclide abbia scritto Elementi di conica, un trattato intitolato Porismi, una sorta di corollario, questo è descritto se pure sommariamente da Pappo.

Grosso modo questo è il corpus Euclideo di cui disponiamo oggi.

**Elementi**: questi sono stati un’opera fondamentale nella storia della matematica, della cultura occidentale, islamica e in qualche modo anche della cultura cinese. D’altra parte gli Elementi sono costruiti con il **sistema ipotetico-deduttivo** (Da degli assiomi si deducono risultati) che è la principale eredità della matematica greca, questi diventano un paradigma del ragionamento corretto in contrapposizione al ragionamento filosofico.Fino al ‘700 la geometria euclidea diventa protagonista del ragionamento certo (poi vengono scoperte le geometrie non euclidee).

### Come sono organizzati?

1. proprietà elementari del triangolo e del parallelogramma per finire con Teorema di Pitagora;
2. proprietà elementari di quadrati e rettangoli;
3. proprietà elementari del cerchio;
4. costruzione dei poligoni regolari fino all’esagono, decagono e pentadecagono;

5. teoria delle proporzioni tra grandezze;
6. similitudine tra triangoli e parallelogrammi;
7. **8**. e **9.** teoria dei numeri;
10. incommensurabilità, classificazione di grandezze incommensurabili;
11. geometria solida teoremi su rette come possono essere messe sullo spazio e prismi;
12. cono piramide e loro rapporti, cono- cilindro, piramide- prisma, rapporti tra le sfere;
13. costruzione dei poliedri regolari e dim. Che ne esistono solo 5 ( solidi platonici);

**Tradizione degli Elementi:**

Euclide vive nel terzo secolo a. C. Nel I-II sec d.c. **Erone di Alessandria** scrive un commento agli elementi di Euclide e pubblica vari "articoli" che rappresentano dei riassunti della geometria elementare, quindi già al tempo di Erone vi era stato messo mano al testo. Nel quarto secolo **Teone di Alessandria** (padre di Ipazia: filosofa e matematica) che scrive vari commenti a diversi libri (in mezzo c'è Pappo), fa una edizione degli Elementi. Succede quindi che tutti i manoscritti greci di Euclide, Teone, sulla base di tutta la massa di materiale e di aggiunte varie costruisce la sua edizione, che ci è trasmessa da una serie di codici, e tutti tranne uno (codice P) dipendono dall'edizione di Teone. Anche nel codice P si capisce che l'editore di questo codice aveva a disposizione il testo tramandato da Teone, quindi questo codice non si discosta molto. Succede quindi che Heiberg costruisce la sua edizione critica di Euclide, verso la fine del '800. Heiberg ebbe una disputa con un arabista che sosteneva che anche la tradizione araba aveva la sua rilevanza nella edizione critica degli Elementi di Euclide, Heiberg non gli diede retta, ha fatto bene!
Perché? Perché gli arabi ,dopo la rivelazione di Maometto, nella metà dell'ottavo secolo si espansero moltissimo, e vennero in contatto con culture molto differenti e questi cominciarono a tradurre dal siriaco all'arabo molti testi, anche dal greco all'arabo. Queste traduzioni si diffondono in tutto il mondo arabo, per quanto riguarda gli Elementi succede che quasi sicuramente le traduzioni arabe dipendevano da quelle di Erone. Per esempio prendiamo il 10° libro: nella versione greca ha 110 proposizioni in quella araba ne ha una 90-ina, le traduzioni arabe tendevano a modificare il testo, i matematici arabi erano molto bravi per questo modificavano.
Heiberg quindi fece bene a fare la sua edizione critica solo dai manoscritti greci, per come ci è stato trasmesso.

**Traduzioni latine:**

**Boezio** aveva tradotto dal greco le opere di Euclide, che vennero ben presto perdute. Euclide risorge nel 11° secolo, dopo le ondate barbariche. In spagna avvennero scambi tra tradizione araba e latina in particolare vengono scambiati gli elementi di Euclide. Nel 13° secolo **Campano da Novara**, basandosi sulle varie traduzioni latine fa una sua versione degli Elementi che diventa la versione di riferimenti fino alla fine del 16° secolo. Questo ramo della tradizione arabo latina ha una importanza rilevante. Verso la fine del 15° secolo la tradizione umanistica ha presente l'antichità classica come un modello insuperabile di civiltà e di sapere, insuperato ma da superarsi, bisogna riscoprire il sapere classico greco. Verso il 1505 **Bartolomeo Zamberti** traduce tutte le opere di Euclide. Campano e Zamberti iniziano a essere concorrenti per la "giusta" traduzione di Euclide. Il problema diventa quindi un problema filologico ovvero di come ricostruire quello che Euclide aveva veramente scritto, problema che termina con Heiberg.

**LEZIONE 5→9-10-2020**

**Volta scorsa:**

Su Euclide, come sulla maggior parte dei matematici greci, abbiamo notizie scarsissime, collezionando vari elementi possiamo collocare Euclide ad Alessandria, circa a metà del III secolo a.C. Di Euclide ci sono pervenuti: gli Elementi, l'Ottica la Catottrica e i Data. Questi ultimi sono una sorta di riassunto di proposizioni fondamentali degli Elementi. Gli sono attribuiti anche Elementi di Conica, i Trattati Porismi ( che vuol dire conseguenza) e un Trattato di Musica Teorica considerato apocrifo(non autentico). Abbiamo anche un trattato sulla Bilancia, i Fenomena, questi sono un trattato di Astronomia.

**La tradizione del testo Euclideo.**

Il concetto di tradizione è fondamentale nel concetto di storia in generale. La tradizione degli Elementi, comincia con Euclide ma per la natura del testo Euclideo questo va soggetto a modifiche nel corso dei secoli, anche perché diventa la base dello studio di qualunque tipo di matematica, da Euclide fino all'unità d'Italia (vedi Betti e Brioschi). Questa tradizione si svolge in una prima fase, in cui il testo subisce sicuramente dei rimaneggiamenti ad esempio sappiamo che **Teone d'Alessandria** ha tradotto il testo in greco nel IV secolo d.C. in questi anni i matematici piuttosto che concentrarsi sul cercare della nuova matematica si sono concentrati su traduzioni e commenti. Teone stesso oltre all'edizione degli Elementi scrive un commento dell'Almagesto di

Tolomeo. Il testo di Teone ci è stato trasmesso da tutti i manoscritti greci tranne uno, noto come  il codice P di cui si ha sia una versione pre-teonina degli Elementi. Questo è diciamo contemporaneo della fase di Teone, ed è su questa base che **Heiberg** produrrà la sua edizione critica di Euclide.

**Tradizione diretta:** uno che vuole trasmettere il testo in quanto testo
**Tradizione indiretta/parallela:** uno che trasmette il testo in un'altra lingua o con parafrasi.

Una tradizione importante di Euclide è quella Araba. Questi espandendosi iniziano ad assimilare le culture che conquistano. All'inizio del IX secolo verranno fatte due traduzioni di Euclide e si diffonderanno per tutto il mondo Arabo, arriveranno in Spagna e verranno fatte altre traduzioni in arabo. Particolarmente importanti sono quelle di: **Adelardo di Bath, Ermanno di Carinzia, Gerardo da Cremona.** Oltre a queste circola nella Sicilia Normanna, una versione Greco-Latina. Sulla base di queste versioni, nel XIII secolo alla corte di Viterbo, che è la corte dei papi che hanno trionfato sugli imperatori nella battaglia di Benevento, **Campano da Novara** fa una sua edizione commentata di queste varie edizioni che circolavano ed è sulla base di questa versione che si studierà la geometria. A partire dal XV secolo inizia il movimento umanistico e quindi anche la riscoperta dei testi greci, tanto che **Zamberti** nel 1505 produce una nuova traduzione dell'opera omnia (Elementi, Data, Ottica e Catottrica) di Euclide, queste due edizioni circoleranno per tutto il XVI secolo in maniera affiancata. Fino a quando personaggi come **Commandino** o altri produrranno nuovi testi euclidei che ormai sono diversi, perché tengono conto di tutto quanto scoperto nel corso dei secoli precedenti. E da qui in poi la tradizione Euclidea si scinderà tra:

- Autori che cercano la restituzione filologica del testo
- Autori che cercano di produrre loro libri prendendo informazioni dagli Elementi

### Gli Elementi.

**Thomas Heath**(contemporaneo di Heiberg) è un personaggio molto importante nella storia della matematica. Egli svolse un lavoro enorme nello studio della matematica Greca, tradusse gli Elementi, fece parafrasi delle coniche di Apollonio, lavorò su Diofanto, su Archimede.  Heath è uno dei maggiori responsabili della formazione di un certo tipo di visione della matematica Greca.

### 1) I LIBRO

## Postulati di Euclide:

### Postulate 1.

To draw a straight line from any point to any point.

Un segmento di linea retta può essere disegnato unendo due punti a caso.

### Postulate 2.

To produce a finite straight line continuously in a straight line.

Un segmento di linea retta può essere esteso indefinitamente in una linea retta

### Postulate 3.

To describe a circle with any center and radius.

Dato un segmento di linea retta, un cerchio può essere disegnato usando il segmento come raggio ed uno dei suoi estremi come centro

### Postulate 4.

That all right angles equal one another.

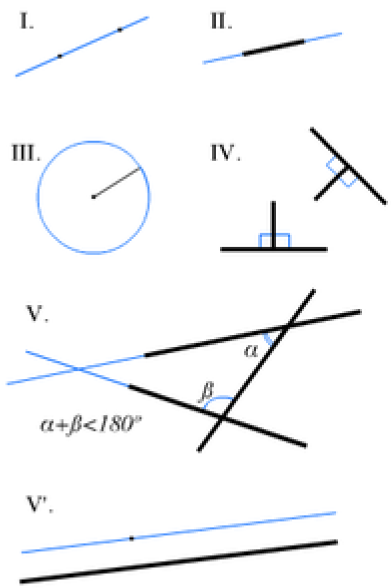
Tutti gli angoli retti sono congruenti tra loro

### Postulate 5.

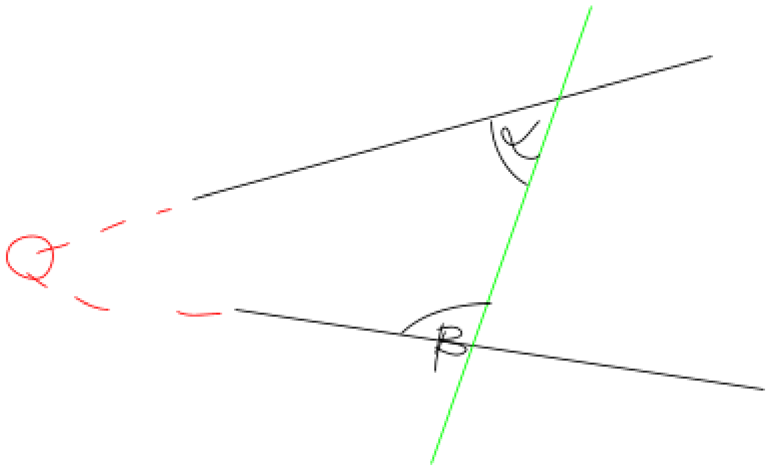
That, if a straight line falling on two straight lines makes the interior angles on the same side less than two right angles, the two straight lines, if produced indefinitely, meet on that side on which are the angles less than the two right angles.

Se due linee sono disegnate in modo da intersecarne una terza in modo che la somma degli angoli interni, da un lato, sia minore di due angoli retti, allora le due linee si intersecheranno tra loro dallo stesso lato se sufficientemente prolungate.

Da <https://mathcs.clarku.edu/~djoyce/java/elements/bookI/bookI.html>



POSTULATO 5



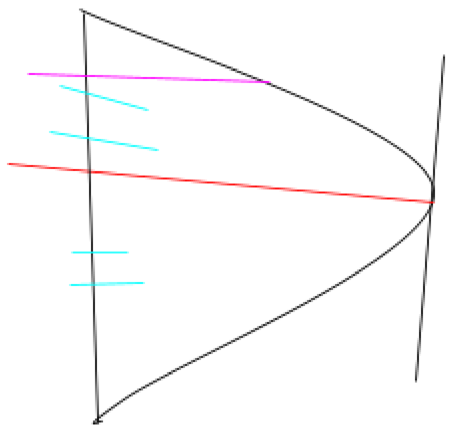
Se ho due rette(in nero), tagliate da una trasversale(verde); e ho due angoli (alfa e beta); ealfa e beta presi insieme sono minori di due angoli retti. Allora le due rette si incontrano dalla parte di alpha e beta(in rosso).

Tutto il resto della geometria è costruita su questo postulato , ad esempio serve a dimostrare che  la somma degli angoli interni di un triangolo è minore di due retti. Questo postulato fin dall'antichità è stato criticato(cosa succede se le prolungo infinitamente?). Già Proclo nel V secolo proponeva di cambiare definizione di retta parallela e di parlare di rette equidistanti, bisogna aspettare un gesuita del 700. **Girolamo Saccheri** cambia approccio alla questione, fino ad allora i tentativi si basavano sull'idea di dimostrare il quinto postulato tramite gli altri postulati, Saccheri volle provare per assurdo. In tre casi funziona ma il terzo non funziona molto bene. La stessa idea viene ad altre persone, da lì l'idea di dimostrare per assurdo senza arrivare ad alcun assurdo.
Quindi dopo tali postulati iniziano le prime proposizioni.

## 2) II LIBRO:

Era considerato libro dell'algebra geometrica.Infatti, ad esempio:
La preposizione 2 algebricamente sta dicendo che   (a+b).c = a.c + b.c
Tuttavia la critica moderna afferma che queste proposizioni sono in realtà lemmi che servono nelle dimostrazione per sostituire costruzioni che renderebbero la dimostrazione ancora più complessa. Ad esempio se prendiamo il Teorema di Pitagora è chiaro e non c'è bisogno di altre costruzioni.  Quindi questi lemmi sono attrezzi geometriche. Ad esempio prendiamo  la proposizione 5 del II libro, che Apollonio nelle Coniche usa in continuazione. Questa proposizione equivale al prodotto notevole:
$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b).$
Equivale vuol dire che dipende dai nomi che do ai vertici della figura. Viene usato nelle Coniche in Apollonio perché il diametro dimezza le corde:

supponiamo di avere una parabola. e (in rosso) questo è il diametro. viene usato perchè il diametro dimezza le corde e prendiamo un altro punto in cui l'ordinata è divisa e quindi avremo una retta che è divisa in parti naturalmente uguali e disuguali(fucsia) e quindi si potrebbe applicare il teorema di prima(preoposizione 5)

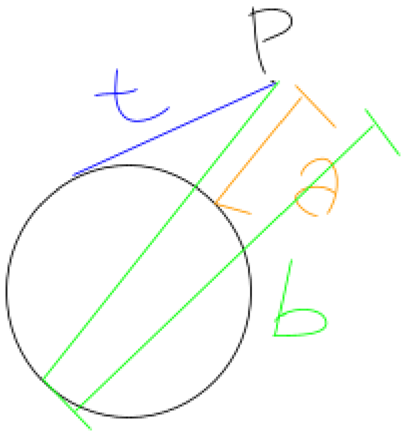


Ken Saito ha elaborato l'idea che questi Elementi siano una cassetta degli attrezzi, in particolare questi teoremi del secondo libro.

## 3) III LIBRO : riguarda il cerchio.

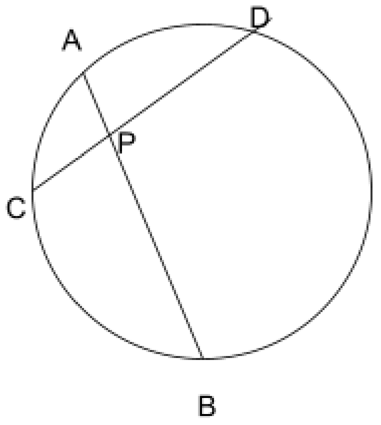
Tangenti a un cerchio:

q(t) = r(a,b)




dato un cerchio, e dato un punto P esterno al cerchio. tracciamo la tangente (in blu) , poi una secante(in verde). Allora la tangente è in media proporzionale fra a e b. Ma nel terzo libro non è espresso il linguaggio delle proporzioni. E allora si dice che il quadrato sulla tangente è uguale al rettangolo su a e b

Un altro teorema importante:




DATE DUE CORDE IN UN CERCHIO. IL RETTANGOLO SU PA E PB E' UGUALE AL RETTANGOLO SU PC E PD

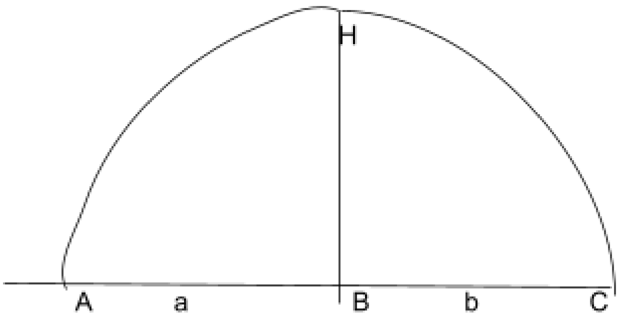
r(PA,PB) = r(PC.PD)

I primi 4 libri sono quelli di base, che saranno la base dell'istruzione elementare nei secoli successivi. Negli altri verranno sviluppate cose più raffinate.

4) Nel **IV libro** viene trattata la costruzione dei poligoni regolari inscritti e circoscritti

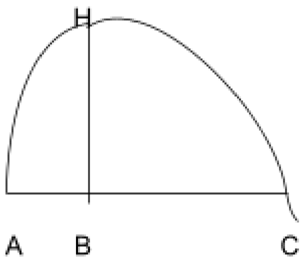
5) La teoria delle proporzioni del **V libro** è molto importante in quanto viene ripresa anche successivamente
6) (nel **libro VI** proporzioni fra triangoli e parallelogrammi e proporzionalità fra angoli e settori) e poi utilizzata nel 10,11,12,13 libro.

7) **VII, VIII , IX** sono dedicati alla teoria dei numeri. Questi tre libri e il 10°
8) costituiscono una sorta di interruzione nel discorso geometrico. Viene
9) definita l'unità. Viene inoltre sviluppata una teoria delle proporzioni tra i numeri, indipendente da quella sviluppata nel 5° libro, quasi a sembrare che i numeri siano due cose totalmente diversi dalle grandezze.
10) Nel **X libro** si sviluppa una teoria delle proporzioni dei numeri che differisce da quella introdotta precedentemente.




Siano a e b due rette. la media proporzionale tra AB e BC sarà BH

AB:BH=BH:BC




Tra i numeri non si può fare in quanto tra 8 e 9 non esiste un medio proporzionale che dovrebbe essere rad 72

Le proporzioni fra i numeri hanno le loro specificità e quelle delle grandezze hanno le loro ma allo stesso tempo hanno un concetto di proporzione che si è sviluppato nella matematica greca su due linee diverse: quello della matematica numerica cioè quante volte una grandezza sta in un' altra e quella della matematica geometrica che dopo la scoperta delle grandezze incommensurabili porta a un tipo di teoria delle proporzioni che riesca a tener conto anche degli sviluppi diversi. Questo riprende il concetto che nella matematica greca geometria e algebra erano nettamente separati.

Il **X libro** è dedicato alla classificazione di grandezze incommensurabili. Studia le grandezze di questo tipo: le apotome di binomi

$\sqrt{\sqrt{a} \pm \sqrt{b}} = \sqrt{a} \pm \sqrt{b}$ quando è espresso in forma algebrica
Il 10° libro non parla esattamente di queste cose ma parla di rette commensurabili e incommensurabili. Ad esempio la diagonale e il lato del quadrato sono incommensurabili ma commensurabili in potenza e poi fissata una retta(quella retta rispetto a cui si confronta(unità)) ci sono rette esprimibili e quindi razionali, cioè il loro rapporto con la retta posta è esprimibile **(locos=rapporto e proporzione anologhia)**. Questa è un'idea del X libro (non è un trattato di teoria dei numeri razionali) è un trattato di geometria che si pone il problema fra quali rette che sono incommensurabili fra di loro quali tra queste siano esprimibili con una posta. Ad esempio se il lato è la retta posta allora la diagonale è quella esprimibile.

11) Nell'**XI libro** si torna alla geometria(definizione di solido, piano, come due rette nello spazio possono essere messe, parallelismo e perpendicolarità fra rette e piani)

12) **Il libro XII** tratta la misura dei solidi, la piramide, coni e cilindri ed è molto importante perché è qui che entra in gioco la tecnica della doppia riduzione ad assurdo, (tecnica di uguaglianza fra proporzioni o figure tramite questa tecnica) in particolare nella proposizione 2.

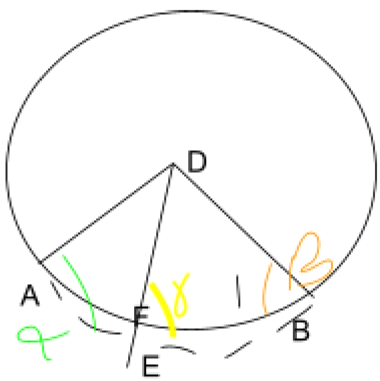
**La doppia riduzione ad assurdo è equivalente alla tecnica di esaustione. Si capirà meglio in Archimede**

13) Il **XIII libro** è dedicato allo studio dei poliedri e culmina nella dimostrazione che i poliedri regolari sono 5

## Analisi di proposizione 2 libro III

PROPOSIZIONE II LIBRO 3

(La circonferenza è una figura convessa). Se vengono presi due punti A e B a caso sulla circonferenza allora la linea(in blu) che congiunge i due punti cade nel cerchio. Supponiamo che cada fuori(almeno un punto della retta cade fuori E). D è il centro del cerchio. AEB è un triangolo isoscele e alfa=beta. l'angolo DE^B(in giallo gamma) è l'angolo esterno di un triangolo quindi è maggiore dell'angolo DA^E(in verde alfa)=DB^E(arancione beta). E il lato opposto all'angolo maggiore è maggiore. quindi dovra essere che DB e' maggiore di DE che è assurdo perché abbiamo supposto che E stia fuori dal cerchio e quindi che DE è maggiore di DF =DB… continua...




Nel margine gli autori segnano tutti i motivi per cui viene detta una certa cosa(in blu nella foto del libro.). Normalmente non si trovano ma si ritrovano delle espressioni che richiamano centre proposizioni che la gente deve aver memorizzato in precedenza

**Una proposizione greca ha una sua struttura**, in particolare lo ha quello degli Elementi:

Questo è stato studiato da Fabio Acerbi ‘’In Silenzio Delle Sirene La Matematica Greca’’.

- **Protasi**: asserzione generale →*if fino a circle*
- **Extesi:** esposizione(ri-enunciazione), viene ridetta la stessa cosa riferendosi a una figura →*let fino a circumference*
- **Determinazione(diorisma)**: in generale introdotta da "lego oti" dico che, si chiama diorisma in greco, e determina rispetto all'extesi ciò che si vuole dimostrare →*I say fino a circle*
- **Costruzione** o catasquée
- Dimostrazione
- **Super asma**:conclusione, viene ricapitolato tutto quanto →*therefore fino a circle*

almeno negli Elementi questa è una struttura molto rigida, e questo è uno dei motivi per cui si può parlare di matematica greca

**LEZIONE 6→12-10-2020**

**Volta scorsa:**
Rapida ricognizione dei libri di Euclide. Heath colui che studiò e scrisse il libro degli Elementi, ha scritto anche dei libri sulla storia greca.
Proprietà fantasma: è una proprietà priva di oggetto.
In questa lezione analizzeremo il Libro V (teoria delle proporzioni) e il XII dedicato alla geometria di misura in particolare a cono piramide e sfera.
L'analisi fatta la volta scorsa di una proposizione degli Elementi, ha messo in luca il fatto che le proposizioni seguono una struttura ben definita, inoltre le citazioni e i rinvii nelle proposizioni vengono fatti enunciando una proposizione già dimostrata, non viene fatto come faremo noi oggi ovvero "…come dimostrato nel teorema X…".
Almeno a partire da Euclide, una tipica dimostrazione assume una certa struttura: enunciato generale ad esempio il teorema di Pitagora, questo enunciato viene successivamente fatto riferire a una figura particolare ad esempio a uno specifico triangolo rettangolo. Attenzione: quel triangolo rettangolo vuole essere un rappresentante di tutti i triangoli rettangoli.
All'extesi segue una costruzione, a questa segue la dimostrazione e poi la conclusione in cui viene riproposto l'enunciato generale.

In questa lezione:

- Che tipo di teoria delle proporzioni propone
- Che problemi crea

- Come viene applicata ai problemi di misura

La teoria delle proporzioni è esposta da Euclide nel **V libro**. All'inizio di questo libro troviamo una serie di definizioni.
Viene definito il **rapporto**:
*A ratio is a sort of relation in respect of size between two magnitudes of the same kind.*
La cosa interessante è "relation". Questa definizione ci dice cosa non è il rapporto, questo non è un numero!

**Definizione 4:**
*Magnitudes are said to have a ratio to one another which can, when multiplied, exceed one another.*
Da <https://mathcs.clarku.edu/~djoyce/elements/bookV/bookV.html>
Diremo noi che le grandezze devono essere archimedee.

**Definition 5**
*Magnitudes are said to be in the same ratio, the first to the second and the third to the fourth, when, if any equimultiples whatever are taken of the first and third, and any equimultiples whatever of the second and fourth, the former equimultiples alike exceed, are alike equal to, or alike fall short of, the latter equimultiples respectively taken in corresponding order.*

Analisi di questa definizione:
Date 4 grandezze A,B,C,D abbiamo che A:B = C:D. Se presi equimultipli della 1° e della 3° e presi equimultipli della 2° e della 4° mA e nB e mC e nD.
Succede che se $mA > nB \rightarrow mC > nD$
$mA < nB \rightarrow mC < nD$
$mA = nB \rightarrow mC = nD$
questa è anche vista come definizione di rapporto.
Se noi abbiamo due grandezze A e B e vogliamo definire il rapporto A/B allora possiamo immaginare che se A/B =C/D =m/n è razionale allora si può scrivere come m/n allora mA=nB e mC=nD. Se non è razionale dovranno essere maggiori o minori.
Notiamo che questa è piuttosto pesante come uguaglianza, in quanto ogni volta dovremmo ricorrere a molti confronti per dimostrare l'uguaglianza

**Definition 9**
*When three magnitudes are proportional, the first is said to have to the third the duplicate ratio of that which it has to the second.*

Siano a,b,c tali che a:b=b:c . La definizione ci dice che a:c =D(si dice duplicato)(a:b). Cosa vuol dire?

Se prendo $\frac{a}{b}$ . $\frac{a}{b} = (\frac{a}{b})^2 = \frac{a}{c}$ $perchè\ visto\ che\ \frac{a}{b} = \frac{b}{c}$

$allora\ andando\ a\ sostituire\ ho\ che\ \frac{a}{b} . \frac{b}{c} = (\frac{a}{b})^2 = \frac{a}{c}$

quindi il rapporto duplicato è come dire prendere il quadrato del rapporto. Osserviamo che dire prendere il "quadrato" nella geometria greca non ha senso, in quanto il rapporto non è né un numero né un grandezza, ma una relazione. Per questo che viene introdotto tale "duplicate ratio" o rapporto duplicato. (la relazione viene raddoppiata)

## Libro VI

**Proposition 17.**

*If three straight lines are proportional, then the rectangle contained by the extremes equals the square on the mean; and, if the rectangle contained by the extremes equals the square on the mean, then the three straight lines are proportional.*

Questo teorema ci dice che se abbiamo tre rette proporzionali allora [questo è un rapporto fra linee]a:c=D(a:b)=q(a):q(b) [questo è un rapporto fra aree]

Questo ci fa capire quanto l'aspetto geometrico sia tenuto distinto in maniera rigida dall'aspetto aritmetico algebrico. Inoltre questo tipo di tecnica(il rapporto duplicato): passaggio di rapporti tra aree a rapporti tra linee e viceversa, è una tecnica usata molto da Archimede e Apollonio nelle loro opere.

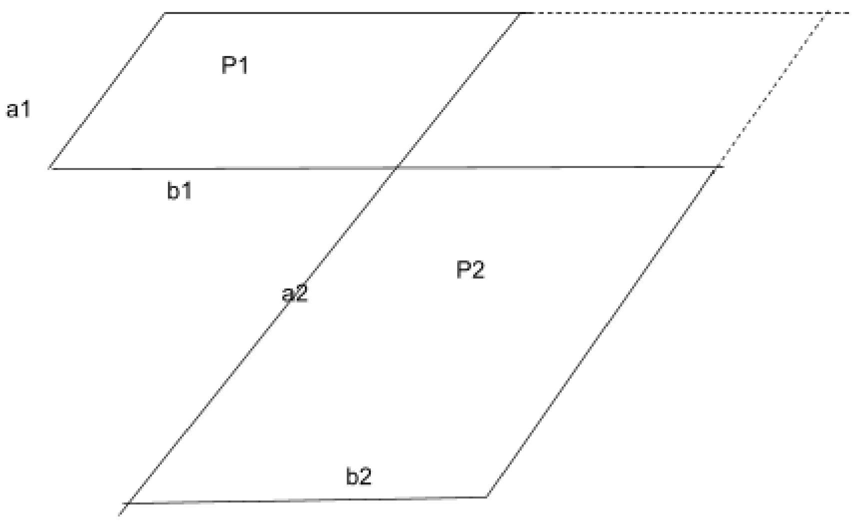
Legato a questo abbiamo il concetto di rapporto composto
Questa definizione viene chiamata spuria. Si pensa che sia stata introdotta postuma. Viene introdotto il concetto di quantità dei rapporti, vediamo un caso di uso di questo concetto.
**def 5 del VI libro***: ci dice che un rapporto si compone di altri rapporti quando le quantità dei rapporti moltiplicate producono qualcosa*

Questa definizione viene chiamata spuria(non autentica). Si pensa che sia stata introdotta postuma. Viene introdotto il concetto di quantità dei rapporti, vediamo un caso di uso di questo concetto.

**Proposition 23.**

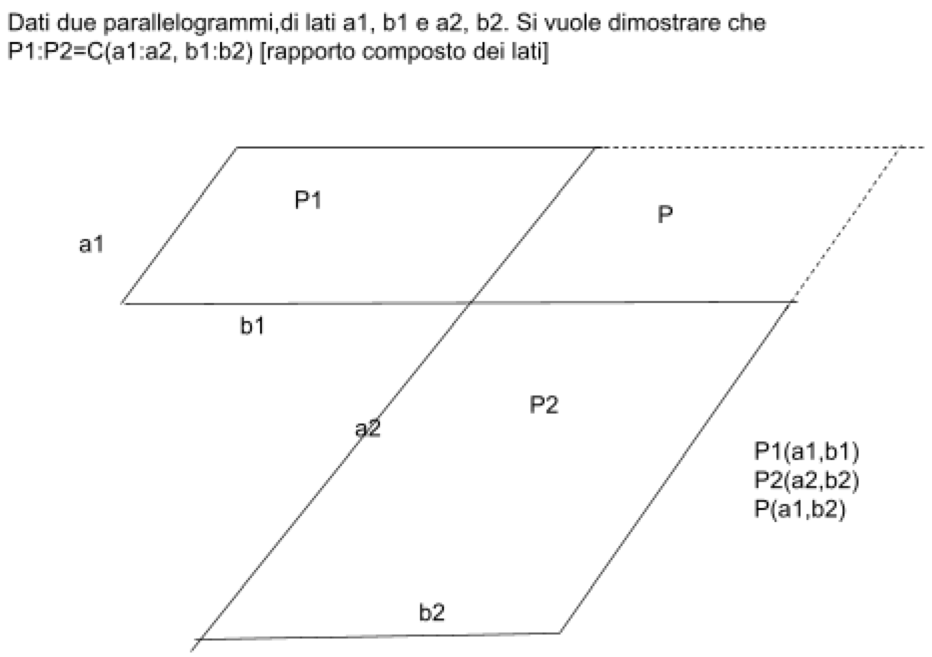
*Equiangular parallelograms have to one another the ratio compounded of the ratios of their sides*
Parallelogrammi equiangoli hanno fra loro il rapporto composto dei lati
Dimostrazione (del prof):

Dati due parallelogrammi,di lati a1, b1 e a2, b2. Si vuole dimostrare che
P1:P2=C(a1:a2, b1:b2) [rapporto composto dei lati]




il rapporto duplicato è un particolare caso di composizione i  cui il rapporto si a:b viene composto con il rapporto di b:c, e cioè C(a:b , b:c) = a:c dando luogo al rapporto di a:c.
Come si farà a comporre il rapporto quando non hanno elementi in comune?
Se noi avessimo a:b e c:d  per comporli basterà che esista un x tale che  c : d = b : x allora se voglio fare C(a:b, c:d)=C(a:b, b:x)= a:x.
Cioè il rapporto composto tra due rapporti differenti è uguale al rapporto della prima grandezza con il quarto proporzionale dopo c d e b

**In VI I** *Euclide ha dimostrato che parallelogrammi di egual altezza stanno tra loro come le basi*
dimostrazione




avremo che
P1:P = b1:b2
P:P2=a1:a2
Allora il rapporto composto C(P1:P, P:P2)=C(b1:b2 , a1:a2)
Ma C(P1:P, P:P2) = per definizione a  P1:P2.
questa tecnica dimostrativa è molto versatile. Infatti se anziché avere un parallelogramma avremmo una qualsiasi altra grandezza che dipende da due altre grandezze. P(m,l). Tutte le altre volte che avremo questa proporzionalità diretta otteniamo lo stesso risultato applicando questa tecnica. Nel moto uniforme
spostamento :tempo
Spostamento : velocità.
otteniamo che lo spostamento nel moto uniforme ha rapporto composto del tempo e della velocità dello spostamento

Anche qui si passa da rapporto fra aree a rapporto fra linee e viceversa. Questa proposizione viene dimostrata applicando direttamente la definizione di proporzionalità. Uno si aspetta che tutte le dimostrazioni di proporzionalità vengono fatte in questo modo, ma non è così vediamo qualcosa:

## Libro VII
Dipende dalla preposizione 1
**Proposition 2**
*To find the greatest common measure of two given numbers not relatively prime.*

## libro XII

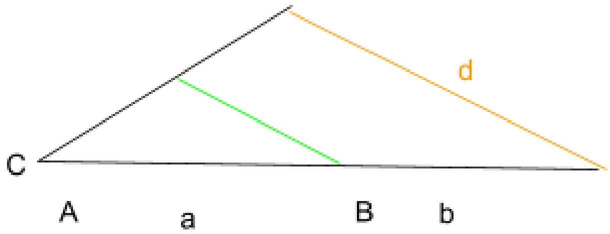
**Proposizione 2**

Vogliamo dimostrare che dati C1 e C2 cerchi e d1 e d2 loro diametri Allora C1:C2 = q(d1): q(d2)

Cosa vuol dire prendere un multiplo del cerchio ad esempio mC1? fino a quando si parla di rette, triangolo, rettangoli , la teoria fila liscia altrimenti bisogna supporre qualcosa di più forte, e supporre(che 3 cerchi piccoli ne fanno uno grande) questo implica che stiamo supponendo quello che vogliamo dimostrare.

La via scelta per questo tipo di dimostrazione è mediante l'esistenza del 4° proporzionale, l'esistenza di tale proporzionale è alla base del metodo della doppia riduzione ad assurdo. Esso si basa su Talete

Date tre grandezze(rette) esiste la 4(quarto proporzionale). Usando Talete che ci dice che date due rette a e b. Dato C, vogliamo costruire la quarta proporzionale . Congiungiamo(in verde) l'estremo di C (C1) con l'estremo di a e cioè B. Prolungo C e tracciamo (in arancio)per l'estremità di B la parallela a quella per a(a quella verde). d è il quarto proporzionale. Il fatto che esiste il quarto proporzionale non è immediato.

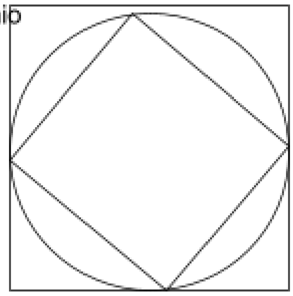


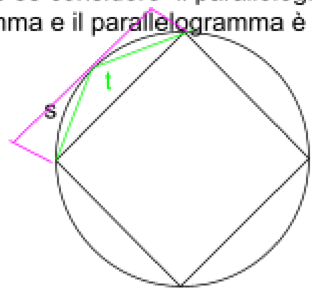

Supponiamo che q(d1):q(d2)≠ C1:C2. Allora esiste S $\in N$ tale che q(d1) : q(d2) = C1:S dove s $\prec o \succ$ C2, quindi si hanno due casi:

1. S$\prec C2$

consideriamo il nostro cerchio C2 e consideriamo il quadrato q iscritto a esso. quando tolgo il quadrato tolgo più della metà del cerchio q $>$½ C2. Perché? Perchè quando considero il quadrato Q circoscritto Q=2q $>$ C2.

Se adesso considero un arco e traccio due corde(in verde). il triangolo t che ottengo t $>$ ½ s (segmento). Quindi quando tolgo l'ottagono, dopo aver tolto il quadrato, levo più della metà di quello che era rimasto. t $>$½ s perché se considero il parallelogramma (in rosa) il triangolo è uguale alla metà del parallelogramma e il parallelogramma è più grande del cerchio






In questo modo costruisco poligoni regolari di 2^n larti tali che la differenza fra il cerchio e il poligono regolare inscritto sia piccola a piacimento, cioè il cerchio è approssimabile con i poligoni regolari.

Cioè data una grandezza E tale che Cerchio-Poligono $\prec E$
Dunque posso costruire un poligono P2 tale che C2-P2 $\prec$ C2-S e cioè P2 $\succ$S
Succede che
Il q(d1): q(d2) = C1 : S e per il Teo precedente so che P1:P2=q(d1): q(d2) dove P1 è un poligono regolare dello stesso numero di lati di P2 e quindi simile a P2.
P1:P2=q(d1): q(d2) = C1 : S e quindi P1:C1=P2:S
ora qui abbiamo che P1 è più piccolo di C1 perché inscritto a esso.
P1$\prec C1$ antecedente $\prec$ conseguente quindi anche l'altro antecedente cioè P2 dovrà essere minore dell'altro conseguente e cioè S . assurdo P2$\prec S$

2. S$\succ C2$
   Qui Euclide procede in maniera diversa. Supponiamo che q(d1): q(d2) = C1 : S con S $\succ C2$, Uso il trucco+il quarto proporzionale
   1) q(d1):C1=q(d2):S (inverto)
      Si prende una grandezza T(quarto proporzionale) tale che q(d1):S=C2:T Lo prendo tale che T$\prec C1$
      quindi q(d2):q(d1) = S:C1 + altro-
      A questo punto ho che q(d2):q(d1) = C2:T assurdo perchè ricondotto al caso precedente.

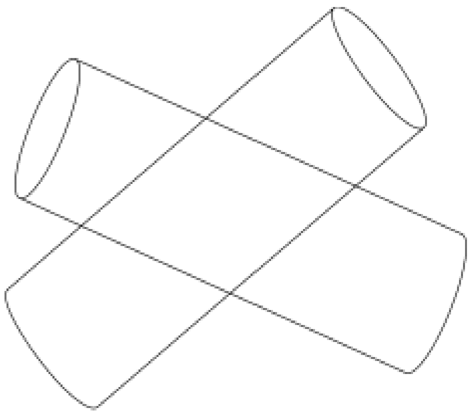
Questa è la tecnica principale per la geometria di misura, tecnica dimostrativa per doppia riduzione ad assurdo. Perché non metodo di esaustione? Metodo presuppone delle procedure uniformi, invece questa tecnica si applica in modo peculiare ai vari casi esaminati. Altra considerazione è il fatto che in questa dimostrazione abbiamo una tecnica per la proporzione di 4 grandezze che non fa uso della definizione di proporzionalità espressa nel 5° libro.

**LEZIONE 8 → 19-10-2020**

**Rapida panoramica delle opere di Archimede.**
Mediante Lettera di accompagnamento a Dositeo, ci sono pervenute le seguenti opere:

- Quadratura della parabola
- Sfera e cilindro 1 e 2
- Spirali

(in ordine cronologico)
Oss: Dositeo è allievo di Conone di Samo
Mentre il Metodo Meccanico è indirizzato e Eratostene. Questa è un'opera diversa dalle altre. Lo scopo di questa opera è inviare la dimostrazione di due teoremi: il primo teorema riguarda lo studio della volta a crociera (il solido che si ottiene intersecando due cilindri uguali e in maniera perpendicolare), e di determinare il rapporto che c'è tra doppia volta e cubo che la contiene. Archimede vuole dimostrare che la doppia volta è due terzi del cubo. Dopo aver descritto cosa intende fare egli descrive come è giunto ad altri risultati: conoidi e sferoidi, quadratura della parabola ecc.



se ho solo mezzo cilindro io ho una volta a botte. Se interseco una volta a botte con un altra volta a botte ottengo una volta a crociera. Se interseco due cilindri ottengo una doppia volta a crociera

**Arenario.**

Quest'opera inizia dicendo che: "non esiste un numero che possa contare tutti i granelli di sabbia". Questo si ricollega al fatto che i numeri Greci sono usati per contare. Ricordiamo che il sistema numerico Greco era di tipo alfabetico:

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| α | alpha | 1 | ι | iota | 10 | ρ | rho | 100 |
| β | beta | 2 | κ | kappa | 20 | ϲ | sigma | 200 |
| γ | gamma | 3 | λ | lambda | 30 | τ | tau | 300 |
| δ | delta | 4 | μ | mu | 40 | υ | upsilon | 400 |
| ε | epsilon | 5 | ν | nu | 50 | φ | phi | 500 |
| ϛ | stigma | 6 | ξ | xi | 60 | χ | chi | 600 |
| ζ | zeta | 7 | ο | omicron | 70 | ψ | psi | 700 |
| η | eta | 8 | π | pi | 80 | ω | omega | 800 |
| ϑ | theta | 9 | ϙ | koppa | 90 | ϡ | sampi | 900 |

Con sistemi vari di apici e simboli si riusciva a contare fino a 10'000x10'000 i greci la chiamavano miriade. Questo sistema di numerazione rendono quindi giustificata l'affermazione nell' Arenario. Archimede allora propone un sistema di numerazione periodico che si ripete dopo un certo periodo. Così Archimede dimostra che si possono contare i granelli di sabbia sulla terra, ma inoltre si può contare i granelli di sabbia in una sfera grande quanto l'universo. Facendo quindi questi conti Archimede fa vedere che i granelli di sabbia sono compresi nel primo periodo.

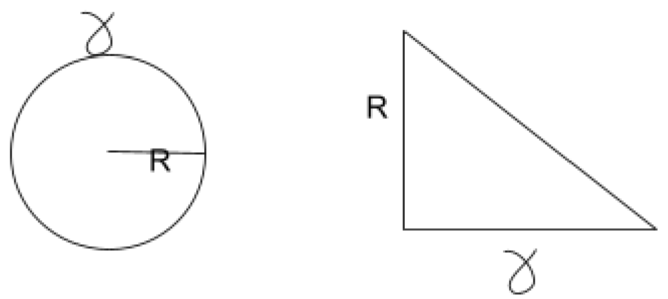
Opere prive di lettera di Dedica:

- Misura del cerchio
- Equilibrio dei piani primo e secondo
- Galleggianti

La prima ''Misura del Cerchio'' è un'operetta in tre proposizione sole. Nella prima Archimede vuole dimostrare che:

proposizione 1

Archimede vuole dimostrare che il cerchio è uguale a un triangolo rettangolo avente per base la circonferenza e per altezza il raggio



Nella **proposizione 2** vuole dimostrare che: Cerchio:Quadrato circoscritto =11:14

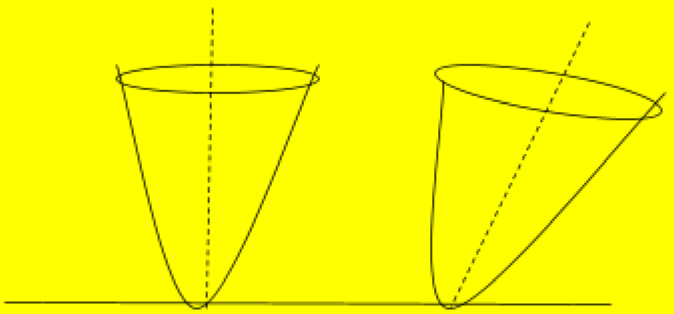
Nella **proposizione 3** invece vuole dimostrare che il rapporto tra circonferenza e diametro$\frac{c}{d}$ è compreso tra$3.\frac{10}{71} \leq \frac{c}{d} \leq \frac{31}{7}$ Notiamo però che per dimostrare la seconda proposizione serve la terza, inoltre l'uguaglianza nella proporzione deve essere un circa pertanto deduciamo che questo possa essere un testo corrotto. La stessa cosa a proposito di testi corrotti lo possiamo dire delle altre due opere sopra elencate. Il testo di cui disponiamo oggi viene fatto risalire a **Ipazia**(figlia di Teone) secondo **Wilbur Knorr**.

**Equilibrio dei piani e Galleggianti** sono due libri numerati in maniera differente rispetto alla **''Sfera e Cilindro''**. Questo perché il primo libro della sfera e cilindro tratta della sfera e di quelli che per noi sarebbero volume e superficie mentre il secondo tratta di argomenti differenti: costruire una sfera dato un cilindro. Così come sono profondamente diversi **EP I e II.** Nel primo Archimede tratta della legge della leva ovvero due grandezze si fanno equilibrio a distanze inversamente proporzionali, e centro di gravità di parallelogrammo, triangolo e trapezio. Nel secondo libro Archimede tratta del centro di gravità del segmento di parabola. Come ha dimostrato uno studioso canadese **Len Berggren** il primo libro di EP sembra non essere un opera di Archimedea ad esempio all'inizio di EPII Archimede dimostra la legge della leva quando lo aveva già dimostrato nel primo. L'idea è che questi testi siano stati riuniti in due libri raccogliendo scritti archimedei (solo nel caso del primo). La stessa cosa vale per i galleggianti (CF) in **CF I** si dimostra il principio di Archimede e in **CF II** viene studiato condizioni di equilibrio di un paraboloide immerso in un liquido.

Tali condizioni di equilibrio sono due:

in CF II

si considera una superficie piana il paraboloide ha due posizioni di equilibrio. Nella prima figura l'asse del paraboloide è perpendicolare alla superficie del liquido. (seconda figura )Invece a seconda del rapporto che c'è tra fra peso specifico del paraboloide e peso specifico del liquido e dei parametri geometrici del paraboloide stesso (quanto è largo ) ne ha anche un'altra.



Questo secondo libro è molto difficile in particolare l'ultimo teorema occupa 5 pagine.

Il I libro contiene il principio di Archimede e contiene anche una teoria diversa della gravità perché invece di supporre che la superficie del liquido sia piana e che quindi le direzioni di caduta dei liquidi siano tutte parallele suppone che la superficie del liquido sia sferica (come dim nella prop 2). E questo crea molti problemi alla nozione di centro di gravità. Perchè quando ci troviamo in un campo di forze parallele il centro di gravità non coincide più con il centro di massa.

Il primo libro si pensa che sia stato riassunto in epoca tardo antica Notare che **CF, EP e Sfera e cilindro** sono le uniche tre opere che sono divise in due libri per come ci sono arrivate. La sfera e cilindro siamo sicuri che sia stata rimaneggiata, perché?
**Archimede tutte le opere le scrive in Dorico, invece SC è scritta in koinè** inoltre altre peculiarità ci fanno capire che sia stata rimaneggiata in epoca tardo antica. È proprio in questa epoca inoltre che si viene a costituire il corpus archimedeo fatto di: **SC, DC (misura del cerchio), EP, CF**. Le altre opere (già ai tempi di Eutocio VI secolo) non si conoscevano, ad esempio **spirali, conoidi e sferoidi, metodo**. Bisogna ricordare che già l'Archimede vivente avesse poco eco, più di una volta Archimede si lamenta con Dositeo o Eratostene perché non hanno risposto alle sue lettere. Questo dipende dal fatto che più che alla geometria di misura ad Alessandria ci si interessasse alla teoria delle coniche.
Neppure gli arabi stessi sembrano conoscere le opere sopra descritte, in particolare nell'occidente latino fino al XIII secolo, le uniche opere note sono: **misura del cerchio, rifacimenti arabi di SC, nozioni su EP.**

**Quando e come le opere di Archimede arrivano in occidente e diventano radici della matematica moderna?**
A Bisanzio (Costantinopoli) nel IX secolo c'è una rinascita della cultura… ma prima?
Piccola parentesi storica: l'impero bizantino era stato travolto dalla avanzata degli arabi, e da popolazioni provenienti dalle steppe dell'asia, prima gli Slavi, poi i Bulgari che contendono all'impero bizantino il possesso della penisola Balcanica. Quindi tra i secoli VII e VIII Bisanzio ha altri problemi rispetto alla crescita delle scienze. È solo al partire dal IX secolo con la dinastia macedone c'è una riscossa dell'impero bizantino che mette fine alla minaccia bulgara. Questo porta quindi a una rinascita degli studi e alla fondazione della scuola di costantinopoli. Un importante personaggio di questa scuola è Leone il

matematico. Tra il IX e il X secolo vengono copiati tre codici: A, B gotico, C che tra tutti e tre contenevano tutto il corpus Archimedeo che conosciamo oggi.

**codice A** conteneva SC1, SC2, DC, CS, LS, EP I e II, NA, QP. Quelle evidenziate hanno il commento di Eutocio, codice A perduto.
**Codice B**: CF(galleggianti), EP,(equilibrio dei piani) QP(quadratura della parabola), Perduto.
**Codice C**: EP(equilibrio dei piani), CF(quadratura della parabola), MM(metodo), LS (spirali), SC (sfera e cilindro), DC(misure del cerchio), Stomachion.
Questi tre manoscritti contengono opere diverse in modo diverso, questo ci fa pensare che all'epoca non ci fosse un codice che contenesse tutte le opere di Archimede. Probabilmente lo stesso Leone ha trovato queste opere, facendo sì che il corpus Archimedeo si sia formato in maniera "anarchica", ovvero senza delle tradizioni "standard".

**Codice C.**
Questo codice dopo il sacco di Costantinopoli, venne utilizzato per farci un libro di preghiera, si chiama Palinsesto. Palinsesto perché il libro veniva scritto due volte. Questo libro di preghiera rimase per molti secoli in un convento della Palestina, poi nel IXX secolo dalla Palestina andò a finire a Istanbul e attraverso diverse peripezie, **Heiberg** lo scoprì nel 1906. scoprendo con sua grandissima meraviglia che in questo codice era contenuta un'opera completamente sconosciuta: **il metodo.** In questa opera Archimede presenta il suo approccio euristico tanto che colpì tutti gli studiosi dell'epoca, questa scoperta venne pubblicata anche nel New York Times.

**Come fece a scoprirla?**
Nel 1880/81 **Heiberg** aveva prodotto la prima edizione critica delle opere di Archimede. La sua edizione critica era basata sul codice A, come mai dato che questo codice è andato perso? Perché ne erano state fatte molte copie, in particolare uno di questo codice: **il codice Laurenziano XXVIII-4 (o codice D**, è dell'inizio XVI, fine XV), era un codice fatto copiare per Lorenzo de Medici, questo codice era basato direttamente sul codice A. Poliziano (colui che fece copiare il codice) si rese conto che a causa del processo di tradizione, ha imposto al copista di farne una specie di fotografia "copiarlo con scrittura di imitazione", quindi questo codice D è una specie di fotografia al codice A. **In particolare da una di queste copie deriva la prima edizione a stampa di Archimede, uscita in Basilea nel 1544 "edizio Princeps"**.

**Codice B gotico (perso dopo il 1311).**

Heiber nel 1881 stava per pubblicare la sua edizione critica quando nello stesso anno **Valentin Rose** (un filologo tedesco) scoprì nella biblioteca vaticana **il codice ottoboniano latino 1850,** che conteneva una traduzione completa di quasi tutto il corpo Archimedeo allora noto, e attribuì questa traduzione a **Guglielmo di Moerbeke** XII secolo.
Questo personaggio aveva viaggiato molto in Oriente e si era dato alla traduzione di opere. Questo lavoro condusse alla corte dei papi di Viterbo, era a quell'epoca uno dei fari culturali dell'occidente latino ed era un centro scientifico di prima importanza, c'erano anche **Campano da Novara, Vitelo**.
Vitelo era un frate domenicano che scrive un'ottica basata su fonti arabe e greche e rimarrà il corpus di ottica per tutto il resto del medioevo fino al primo rinascimento. Vitelo è amico di Guglielmo gli dedica anche la Perspectiva (questo trattato di ottica). In questo centro culturale matura l'idea di far tradurre a Guglielmo il corpus archimedeo che Valentin Rose riscopre nel 1881. Succede che Heiberg che aveva appena terminato la sua edizione critica quando viene fuori la traduzione di Guglielmo. Egli aveva utilizzato sia il codice A che un altro: i **Galleggianti ,** che non ci sono nel codice A, inoltre spesso accanto alle traduzioni lui annota "nell'altro codice c'era scritto così…" quindi Guglielmo aveva a disposizione due manoscritti greci. Heiberg dovette tenerne conto e quando nel 1906 scoprì il Palinsesto decise di rifare l'edizione di Archimede da capo 1910-1915, quindi l'Archimede che leggiamo noi oggi è quello di Heiberg secondo questa tradizione anarchica. Questo ha condizionato pesantemente tutta l'interpretazione successiva di Archimede. Heiberg paragona l'approccio euristico di Archimede al calcolo integrale, questo tipo di interpretazione fa si che Archimede diventi un predecessore di Cauchy, Leibniz o Cantor. Ma la matematica di Archimede va vista da altri punti di vista.
Questa è:

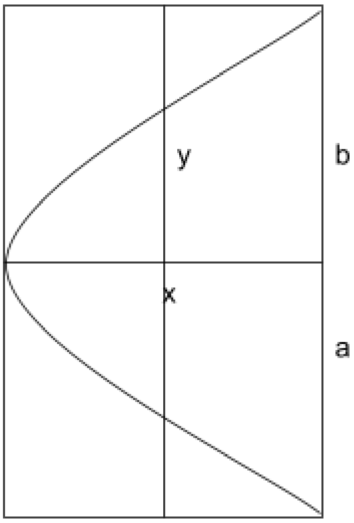
1. Diversa dal calcolo integrale
2. Rivalutare la figura di Archimede in maniera diversa da quella che ne ha dato Plutarco.

**Il palinsesto (codice C**) riscoperto da Heiberg nel 1906, andò poi perduto nei decenni successivi a causa di eventi convulsi in Turchia. E riappare molti anni dopo a un'asta dove è stato venduto per 2 milioni di dollari, ad un miliardario Americano, che poi fu restaurato.

## Cosa fa Archimede?

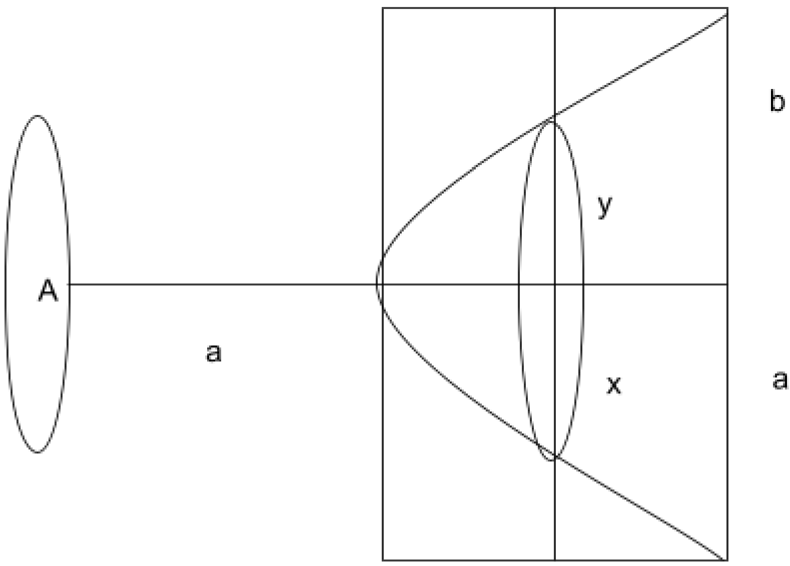
Partiamo da **Metodo**. Nella proposizione 4 Archimede vuole determinare il rapporto tra un paraboloide e il cilindro circoscritto. Idea della dimostrazione

Metodo, proposizione 4

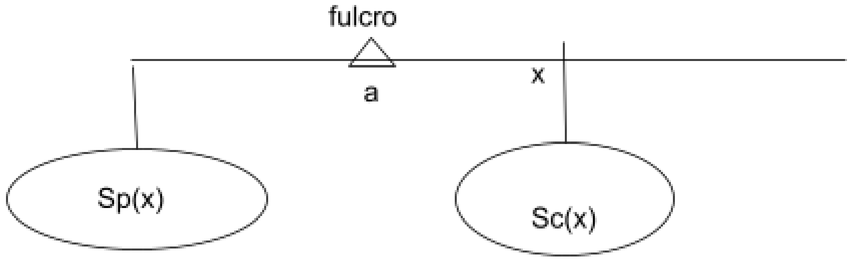



Considera un punto ad ascisse x all'asse del paraboloide e tagliamo la parabola e cilindro con un piano . La sezione del paraboloide Sp(x)in x è un cerchio di raggio y. Quindi è proporzionale → Sp(x)::y^2
La base del paraboloide è lunga b. La sezione del cilindro in x Sc(x) é proporzionale a Sc(x)::b^2.
Ora visto che questa è una parabola e y e b sono le ordinate relative ad a e x. I quadrati fra le ordinate stanno tra loro come le ascisse→ y^2 : b^2 = x:a →
cioè Sp(x) : Sc(x) = x:a ← **1 punto**

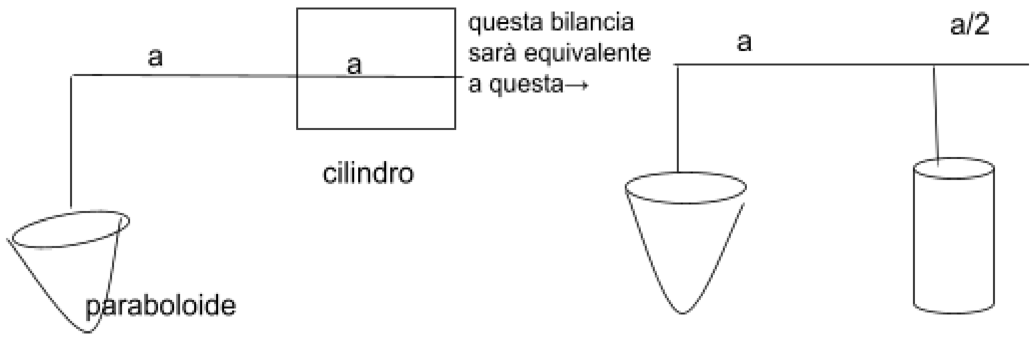
Ora Archimede considera il disegno come una bilancia e mette un punto A a distanza a e prendiamo la sezione del paraboloide ed esportiamolo qua(in A). Ora la sezione del paraboloide fa da equilibrio alla sezione del cilindro (dalla proposizione precedente). Per la legge della leva le grandezze si fanno equilibrio per distanze inversamente proporzionali



cioè abbiamo una bilancia. Quindi la sezione del paraboloide spostata in A farà equilibrio alla sezione del cilindro lasciata dove è← **2 punto**




A questo punto Archimede comincia con dei salti logici:
egli dice che questo discorso vale per tutte le sezioni del paraboloide quindi tutte insieme le sezioni del paraboloide faranno equilibrio a quelle del cilindro lasciate dove stanno. ← **3 punto** Lui da ciascuno passa a tutti.
**4 punto**→ Ed inoltre siccome si può dire che il cilindro e il paraboloide sono riempiti dalle loro sezioni allora
**5 punto**→ il paraboloide in A farà equilibrio al cilindro lasciato dov'è.




**6 punto**→ E di conseguenza: fanno equilibrio, per le legge delle leva abbiamo che il paraboloide è la metà del cilindro circoscritto.

**LEZIONE 10→ 26-10-2020**

L'approccio nel **Metodo** è differente, e varia da dimostrazione a dimostrazione, così come la tecnica di dimostrazione di doppia riduzione ad assurdo varia da situazione a situazione. Abbiamo visto vari esempi di tale metodo e sono: la misura del cerchio, che fa quello che ci aspetteremmo ovvero approssimare il cerchio con poligoni inscritti e circoscritti, e la quadratura della parabola, in cui Archimede usa un approssimante. La parabola ha delle buone proprietà geometriche quindi con i triangoli lui riesce a costruire una progressione geometrica di ragione 1/4, con cui riesce a

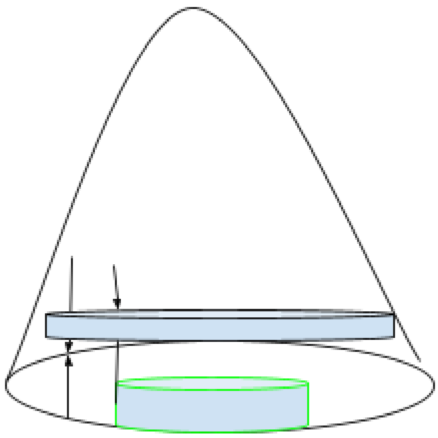
ricavarne la dimostrazione. L’approccio di Archimede nei problemi di geometria di misura è legato al singolo oggetto.
Prendiamo in considerazione i **Conoidi e Sferoidi** che sono l'opera più matura, inoltre per confronto col Metodo si capisce che questa opera è molto pensata e accreditata. In questa opera tratta del paraboloide dell'iperboloide e dell'ellissoide di rotazione, i primi due vengono chiamati conoidi e il terzo sferoide. È un'opera complessa in quanto richiede tutta una serie di lemmi, che molti dei quali non vengono dimostrati (dice o sono facili o rimanda ad altre sezioni), l'argomento entra nel vivo a partire dalla proposizione 19.
Questa opera mostra un tentativo di unificazione della trattazione, l'approccio a questi tre solidi è lo stesso, sia da un punto di vista di approssimanti che, come visto nella proposizione 19, dall'esistenza stessa di questi.
**Proposizione 19:**

Tratta indifferentemente o di un conoide, o di un paraboloide, o di uno sferoide o un ellissoide minore della metà(un segmento dell’ellissoide < della metà dell’ellissoide)
una figura del genere può essere approssimata con cilindri tutti di ugual altezza circoscritti e inscritti in modo che la figura circoscritta superi l’inscritta per meno di qualsiasi grandezza segnata

chiamo C la figura circoscritta e I la figura inscritta e fisso una grandezza E qualunque . Posso costruire una figura circoscritta tale che C - I < E. cioè il cilindro C in rosso è più piccolo di E

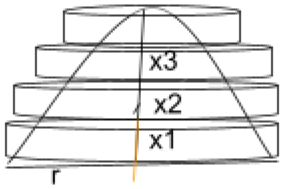
Di conseguenza una volta costruito questo cilindro di base Cb < E e di conseguenza tutti gli altri cilindri inscritti e circoscritti succede che la differenza fra i cilindri inscritti e circoscritti riempi il cilindro di base perchè la differenza fra C e I ( segnata in verde) sono queste fasce cilindriche che avvolgono il conoide o gli stanno dentro , tutti questi pezzi li posso buttare giù e riempiono il cilindro di base. Quindi C-I= Cb cilindro di base(il primo) dove Cb <E per costruzione.
In questa dimostrazione entra in gioco il fatto che io possa davvero riempire il cilindro di base con le differenze e per poterlo fare veramente da questo

dipende questa  condizione(un segmento dell'ellissoide è <½ dell'ellissoide) dipende il fatto che se io invece di avere un segmento dell'ellissoide è <½ dell'ellissoide avessi un ellissoide fatto così



questa dimostrazione non la potrei più fare. Perchè le differenze andrebbero a raddoppiarsi dato che si proietterebbero da sotto a sopra.
Oppure se prendessi come cilindro di base quello in verde, le differenze finirebbero chissà dove.
Quindi la condizione implicita che Archimede sta utilizzando è che la figura sia monotona e cioè le sezioni fatte dal basso verso l'alto vadano costantemente diminuendo. Questa condizione non è esplicitata , ma è utilizzata quando restringiamo il problema al caso in cui un segmento dell'ellissoide < ½ ellissoide

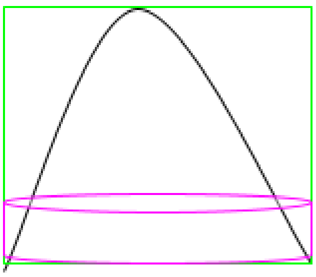
Vediamo ora  come usa questo fatto  per dimostrare che il paraboloide è la metà del cilindro circoscritto. Il paraboloide è la metà del cilindro circoscritto. La figura è presa da articolo di Ken saito.
I1(cilindro inscritto)=C1(cilindro circoscritto)=a.




Siccome questa è una parabola i cilindri circoscritti sono tutti di egual altezza. Quindi cilindri di egual altezza stanno fra loro come le basi. Quindi le basi sono dei cerchi  i cui raggi sono le ordinate della parabola e i cerchi ovvero le basi stanno fra loro come i quadrati dei raggi. I cilindri circoscritti C1:C2:C3… =r1 ^2 : r2 ^2 : r3 ^2….. = x1:x2:x3
però i quadrati dei raggi stanno fra loro come le ascisse.
Se chiamo quest'altezza x1(arancio) allora quella dopo sarà 2.x1=x2 perchè ho diviso l'asse  in parti uguali . E quindi  ho che i cilindri circoscritti come anche gli inscritti C1:C2:C3…=1:2:3…. Cio i cilindri crescono secondo la serie dei numeri interi.
Adesso io ho che I1=C1=a → I2=C2=2a → ….. → I(n-1)=C(n-1)=(n-1)a→ In=Cn=na

A questo punto se considero l'insieme di tutti i cilindri circoscritti e chiamo I la figura I =I1+I2+...+I(n-1) = $n.\ \frac{(n-1)}{2}a$

Mentre se io considero il  Cilindro circoscritto al mio conoide



il mio cilindro circoscritto C (in verde) sarà n volte il cilindro di base Cn (in rosa). Cioè C = n.Cn= n. na

quindi  I =I1+I2+...+I(n-1)= $n.\ \frac{(n-1)}{2}a \ < \ \frac{n.na}{2} < \frac{1}{2}cilindro\ C(in\ verde)\ =\ K$

K=$\frac{1}{2}cilindro\ C$

Quindi I<K.

Noi  vogliamo dimostrare che il paraboloide è = ½ del cilindro circoscritto = K

Analogamente possiamo dimostrare che

C>K →  (figura inscritta) I < K < C (figura circoscritta)

Alla base di questo:

1. data una grandezza E qualunque posso trovare C e I tc C -I<E
2. e che vale per il paraboloide e l'ellissoide
3. I < K < C

segue il nostro teorema perché supponiamo che il paraboloide P < K →

1) se P<K → posso trovare una figura inscritta I  tale che C - I < K - P ma per il terzo punto siccome K<C → K - I  < C - I < K - P → I >P assurdo perchè I è inscritto in P
2) se P>K→ posso trovare una figura circoscritta e Inscritta tale che C-I < P-K → C-K < C-I (perchè K>I) < P-K → C<P  → assurdo perché P è contenuto in C

Questa tecnica con variazioni e complicazioni dovute alle varie  figure( nel paraboloide è più semplice perchè gli approssimanti corrispondono alla serie dei numeri interi, ) questa stessa tecnica è applicata uniformemente agli altri due casi(ellissoide, iperboloide)

Vedi articolo di Saito: 8. LM86_21-28_Saito[1].pdf (dropbox.com).

Questa tecnica è del tutto generica, può essere astrattificata. Nel corso del rinascimento questo è diventato il metodo di esaustione. La lettura di questa e altre opere di Archimede porterà a estrarre il metodo di esaustione, e poi con

Cauchy questo diventa la base del calcolo integrale il quale lo introduce proprio come area. Nell'opera di Archimede però questa tecnica si rivolge solo a conoide ellissoide e iperboloide. **C'è da sottolineare che anche in questa opera dove Archimede cerca di uniformare il più possibile il metodo dimostrativo, rimane comunque isolato a poche figure**. Quando Archimede dimostra che l'ellissoide è uguale a 2/3 del cilindro circoscritto, non dice una parola riguardante la sfera. Questo fatto è molto stupefacente, perché Archimede sapeva che la dimostrazione poteva essere fatta allo stesso modo, invece usa un metodo totalmente diverso.

Occhiata molto veloce a cosa fa nella Sfera e Cilindro: SferaCilindro.pdf (dropbox.com).
Prg. 1.3 Sfera e cilindro, prg. 3.

Archimede si pone un problema matematico solamente rispetto a uno stretto insieme di oggetti, il suo approccio è ancora "problematico", non generalizza, questa cosa risulta particolarmente chiara nel Metodo.
Qualche carattere delle opere di A. : sono brevi e a differenza delle opere di Euclide e Apollonio, è molto facile capire cosa voglia fare "voglio dimostrare questo ecc.." poi come ci arrivi è più complicato. Oltre alla geometria di misura si occupa anche di modelli matematici reali, tipo galleggiamento delle navi, di questi argomenti ci sono arrivate solo due opere che hanno subito molto il processo di tradizione. **Quindi nelle sue opere possiamo trovare la dicotomia tra matematico e ingegnere.**

Nel 1906 è stato scoperto il Metodo.
Questo ha la forma di una lettera a Eratostene, tuttavia lo scopo del metodo non è tanto quello di raccontare il topos, piuttosto lo scopo dichiarato è quello di dimostrare due teoremi: uno è la doppia volta a crociera, prima di quello uno sull'unghia cilindrica. Questi due teoremi, sottolinea Archimede., hanno carattere diverso dai precedenti, lo scopo è far vedere che questi due solidi sono riducibili a solidi rettilinei.
Come è arrivato Archimede. a prenderli in considerazione?
L'incrocio dei cilindri forma una volta a crociera. Piero della Francesca affronta la doppia volta a crociera ottenendo lo stesso risultato di Archimede, in Piero si capisce come mai si voglia studiare la volta a crociera il rinascimento ne è pieno, c'è un collegamento tra i due?
"Famosa storia del problema della corona" come erano fatte le terme? Le terme erano dei locali dove c'erano delle vasche da bagno, delle specie di

bagni pubblici (diversi da quelli che si vedono dei film), facciamo un passo indietro.

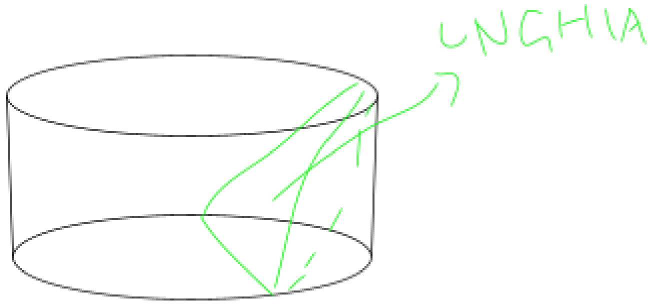
Morgantina era una città sicula, era un centro agricolo e comm. molto importante perché era un punto di comunicazione tattico, nel II secolo aveva raggiunto il suo massimo splendore. Quando Siracusa cade, Marcello deve pagare i debiti e consegna Morgantina ai mercenari ispanici, quindi gli abitanti di questa scappano via e seppelliscono nei pozzi tutti i loro averi, tra cui una bellissima statua: la venera di Morgantina. Quando arrivano gli ispanici questi si trovano in una città fantasma, la cultura della città rimane sepolta sotto la conquista di questi ispanici. Questo è un grande vantaggio per noi perché molte cose si sono conservate, si ha una specie di fotografia di quello che erano le attività alla vigilia della presa di Siracusa. Come erano le terme di Morgantina?
Queste erano composte da due locali con volta a botte, una sala circolare ricoperta da volta emisferica, costruita con dei tubi (mattoni cavi) ricoperti di malta leggera e poi dipinta. Il sistema di riscaldamento dell'acqua era differente, veniva fatto mediante delle fornaci che poi veniva distribuito il calore in tutte le terme. Quello che è stato scoperto ci fa pensare che Archimede mentre stava nelle terme abbia pensato cosa potesse succedere se le volte si sarebbero intersecate, la cosa importante è quindi che qualcosa di simile già esisteva all'epoca del matematico. Da questo segue che se considero l'intersezione di due cilindri, osservo come l'intersezione è 8 volte l'unghia. Come si può arrivare al risultato relativo all'unghia? (vedi Dropbox)

Archimede ha il problema della volta, questa si riduce all'unghia, ma questa è problematica, questo lo porta a sviluppare le sue tecniche euristiche in maniera molto notevole però la cosa rimane lì, non si trasforma in un metodo generale, in teoria della misura. **In altre parole questo modo di vedere il suo approccio ci permette di dire che la matematica di Archimede non è strutturalmente diversa dalle sue invenzioni.** Questo aspetto ci fa vedere un Archimede meno fratturato tra la leggenda e i suoi scritti. Ricapitolando il rintracciamento di un approccio unitario è qualcosa che si può assegnare più a noi che ad Archimede stesso, i Conoidi e Sferoidi diventeranno un modello per andare oltre lo studio dei CS e quindi studiare oggetti più generali.

**LEZIONE 11→ 30-10-20**

Da Conoidi e Sferoidi che è l'opera più matura di Archimede assistiamo a uno sforzo di tipo dimostrativo, e allo strano fenomeno della sfera, di cui non si fa menzione. Questo è sintomatico nella matematica greca, gli oggetti hanno una loro individualità: la sfera è diversa dallo sferoide, la circonferenza non è un ellisse. Resta il fatto che Archimede pur consapevole che le due figure si possano trattare allo stesso modo (vedi Metodo) non vengono concepite come un unico oggetto.

L'altra cosa è l'aver dato una guardata al Metodo, per capire cosa fa. In questa opera lui illustra il topos (approccio euristico), tuttavia è una opera destinata a dimostrare solo due teoremi: volta a crociera e unghia cilindrica. Dato lo stato attuale del palinsesto, siamo piuttosto certi che la dimostrazione della doppia volta sia corta, anche se questa non ci è pervenuta. Tuttavia possiamo ragionevolmente sapere quante carte sono andate perse: sono circa 2 fogli di pergamena, ed inoltre la dimostrazione relativa alla doppia volta è corta perché è stata dimostrato prima il teorema sull'unghia. Questa si ottiene dalla divisione in otto, dalla figura che ne deriva dall'intersezione dei due cilindri. Una volta che uno ha visto questo risulta che, una volta conosciuto il volume dell'unghia, si può trovare facilmente il volume della doppia volta.




Lista delle opere di Archimede nel palinsesto
…..(non si sa)

- **EP II** → ultime due proposizioni dell'equilibrio dei piani
- **CF 1 e 2**→ i galleggianti
- **MM** → il metodo (numerate da Heiberg si arriva fino alle proposizione 15)
  qui c'è un buco tra MM e LS, la dimostrazione della doppia volta avrebbe dovuto essere la 16 proposizione. Poi cominciano le spirali che hanno la lettera diosita e poi (prop 1… )Il buco inizia verso la fine della 15 occupa tutta la 16, la lettera Diosito e qualche proposizione delle spirali. Dato che noi abbiamo le spirali possiamo sapere quante cose mancano. e cioè quanto fosse lo spazio dedicato a i MM
- **LS** → le spirali
- **SC**→ sfera e cilindro
- **DC**→ misura del cerchio
- Stomachion

**L'unghia cilindrica** viene trattata nella prop. 12, 13, 14 e 15 (attenzione i numeri li ha messi Heiberg), i fogli mancanti sono dalla fine della proposizione 15. La 12 e la 13 sono un'unica proposizione, nonostante Heiberg le abbia divise in due, il ragionamento è in due tappe, tale è fatto con la bilancia: lui riduce la quadratura dell'unghia alla determinazione del centro di gravità di un cerchio che equivale a trovare la quadratura del cerchio (non si può fare), nella 13 riesce a determinare mediante un trucco che l'unghia è 1/6 del prisma. Alla fine della 13 e prima dell'inizio della 14 c'è un altro buco, un pezzo illeggibile. Nel metodo Archimede spesso interviene dicendo cose di tipo meta matematico, quindi è probabile che in quel punto ci sia un discorso di passaggio che spiegasse come mai si metta a fare la dimostrazione in un modo completamente nuovo e con un approccio molto differente.

calcolo dell'unghia

la 12 e la 13 mi dicono che l'unghia U= $\frac{1}{6}$ P(prisma) in maniera acrobatica.
Alla fine della 13 e prima dell'inizio della 14 c'è un altro buco. E' probabile che ci fosse un discorso di passaggi che spiegasse il perchè lui si mette a fare una dim completamente nuova

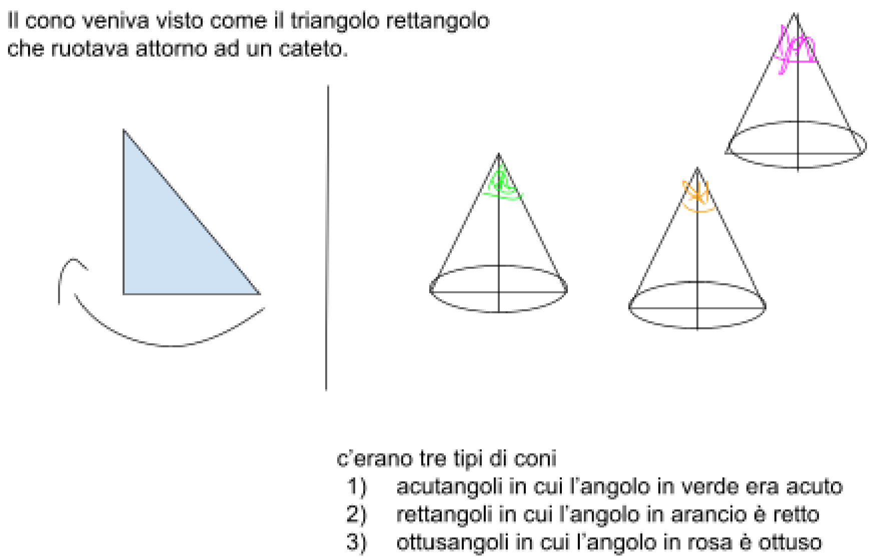
Consideriamo questa situazione. Figura 1→ tagliamo l'unghia con piani anziché paralleli alla base ma con piani paralleli all'asse e inscriviamo nel semicerchio di base dell'unghia una parabola. Si può dimostrare sulla base delle proprietà delle parabole e del cerchio che ci sia questa proporzione MN:NL=MN^2:NS^2.
Ovvero considero la sezione della parabola nel punto N=x fatta a un certo livello . La sezione del rettangolo HGDE sta alla sezione in x della parabola HLZE come MN^2:NS^2. MNY e NSX sono triangoli simili →
MNY:NSX=MN^2:NS^2. Cioè il triangolo MNY è la sezione del prisma Pr. E il triangolo NSX è la sezione dell'unghia. →
Sx(R):Sx(P)=S(prisma):S(unghia).
Da questa proprietà Archimede deduce con un salto logico questo
rettangolo : parabola = prisma : unghia.
Salto effettuato applicando a un numero indeterminato di sezioni a un numero qualunque sezioni anche per cui c'è un numero che non li conti usando un lemma: a/b=a1/b2=…=an/bn. Come 1:1 così tutti a tutti, a:b = $\sum$ ai : $\sum$ bi

**-Questo tipo di passaggio (passare da somma finita a infinita) lo ritroveremo in Cavalieri all'inizio del 600, dove Luca Valerio e Cavalieri, ritroveranno le stesse idee usate da Archimedee e cercheranno di trasformarli in un metodo generale di dimostrazione -**
Dato che Rettangolo R = 3/2 Parabola → Prisma= 3/2 Unghia di conseguenza si trova quanto è l'unghia rispetto al prisma

Qui Archimede si è spinto molto avanti, ci sembra che egli stia integrando! Si potrebbe paragonare Archimede a Ulisse di Dante che, nel purgatorio, viene travolto da un turbine che poi fa affondare la nave, così  Archimede che per poter abbandonare l'individualità delle figure ha bisogno di un linguaggio diverso che verrà costruito più avanti. Questa storia del Metodo e dell'unghia ci mostra la possibilità di interpretare la Matematica Archimedea non in modo platonica, nel senso Archimede non si occupa di quadratura generale, ma spesso di problemi specifici. Le sue dimostrazioni spesso sono anche molto difficili e di grande prestigio, ma non generalizzano l'argomento trattato, non abbiamo un teoria generale che tratta di un qualcosa, non abbiamo il problema delle tangenti. Questo dipende dal fatto che gli oggetti della matematica greca sono oggetti individui, non hai La curva, ha Le curve: parabola, conoide ellissoide ecc.. La distanza quindi tra Archimede del mito (nave, corona…) e l'Archimede dello Sfera e Cilindro delle sue opere risulta meno siderale di quanto ci presenti Plutarco.

## APOLLONIO & PAPPO

Apollonio e Pappo hanno acquistato molta importanza quando vengono riletti durante il rinascimento. **Apollonio** vive tra la  fine del terzo e inizio del secondo secolo, non abbiamo molte notizie su di lui così come quasi tutti i matematici Greci. Sappiamo che vive ad Alessandria, abbiamo alcune sue lettere che riescono a inquadrare meglio l'autore. Di questo matematico ci è pervenuta una sola opera: Le Coniche. In questa opera abbiamo una ripresa del materiale che era stato elaborato già in secoli precedenti e riorganizzato in modo compatto. Mentre prima di Apollonio le coniche erano viste:

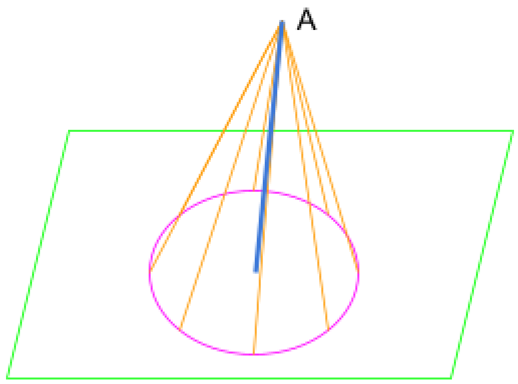


Le coniche si ottenevano sempre con piani perpendicolari ai 3 coni,

- Nel caso del cono acutangolo si otteneva un'ellisse
- nel caso del cono rettangolo si otteneva una parabola
- nel caso del cono ottusangolo si otteneva un'iperbole

L'ellisse veniva chiamata sezione di cono acutangolo e così le chiama Archimede.
Apollonio cambia completamente impostazione definisce il cono in questo

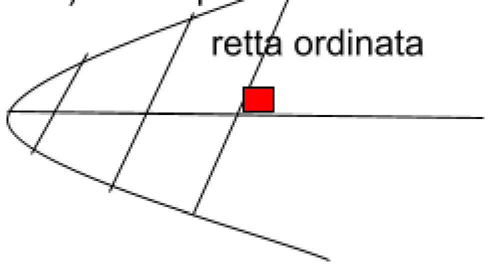
Dato un piano(VERDE), data una circonferenza sul piano(rosa) e un punto A fuori dal Piano. Si consideri una retta(segmento prolungabile) tale che rimanendo fisso A passi lungo tutti i punti della circonferenza. La superficie descritta dalla retta si chiama superficie conica e il cono è lo spazio racchiuso dalla superficie conica e dalla circonferenza. Si può parlare ora di asse del cono cioè la retta dal punto A al centro della circonferenza(blu). Il cono si dice retto se l'asse è perpendicolare al piano della circonferenza oppure obliquo se non lo è




modo

Apollonio il concetto di diametro e ordinata.

un diametro di una curva o meglio di una sezione conica è una retta che divide tutte le corde parallele a una direzione data sono in realtà una coppia di concetti. Le rette sono rette ordinate (con rette ordinate intenderà anche la metà di un'ordinata quella che va da una curva al diametro) e da li poi deriva il nostro termine ordinata




Poi Apollonio dimostra che se noi tagliamo un cono con un piano, salvo che lo togliamo con un piano che passa per il vertice, otteniamo una curva che

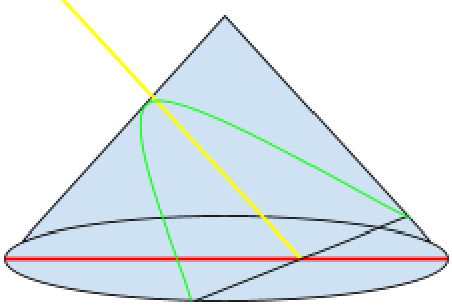
possiede un diametro e ordinata. Non si può parlare di diametro senza dire chi sono le ordinate
Si parlerà di asse quando l'angolo compreso fra le rette ordinate e il loro diametro è un angolo retto(in rosso)

PARABOLA

Dato un cono non necessariamente retto, quello rosso è il diametro. Il triangolo (piano del triangolo lo chiamo tao) si chiama triangolo per l'asse. Tagliamolo con un piano sigma (giallo)parallelo a uno dei lati del triangolo dell'asse. Otterrò una certa sezione(verde). Chiamo beta il piano di base. Allora

- l'intersezione tra tao e sigma sarà il diametro della curva
- l'intersezione tra beta e sigma sarà una retta o che ha la direzione delle ordinate rispetto a d.

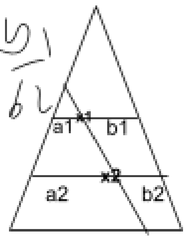
Vale per qualunque conica. La conica nasce nel momento in cui si taglia il cono , nasce con un diametro e le sue ordinate.



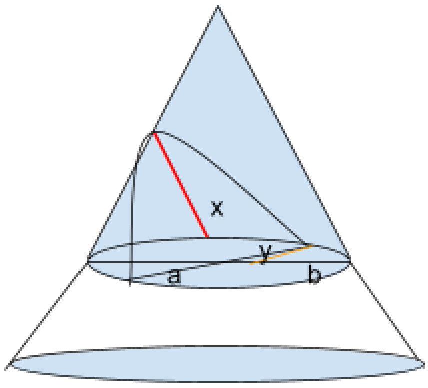
A questo Apollonio aggiunge poi il fatto che nel caso della parabola, vale una relazione tra ascisse e ordinate:

prendiamo un cono e immaginiamo di averlo tagliato così (rosso). Prendiamo un ordinata y (arancio). Inoltre immaginiamo che il cono sia prolungato. succede che q(y)=r(a,b) → y^2=ab. Se io ora prendo una qualunque altra ordinata,avrò y2^2=a2.b2, bidimensionalmente parlando ottengo

$$\frac{y_1^2}{y_2^2} = \frac{r(a_1,b_1)}{r(a_2,b_2)} = \frac{a_1}{a_2} \times \frac{b_1}{b_2}$$




rapporto composto




ma ora siccome b1=b2 siamo nella parabola. I triangoli sono simili quindi

$$\frac{a1}{a2} = \frac{x1}{x2}$$

$$\frac{y1^2}{y2^2} = \frac{x1}{x2}$$

https://www.dropbox.com/home/SdM/Materiali%20per%20l'esame/A.%20Matematica%20Greca/Apollonio%20e%20Pappo?preview=AnalisiSintesi+nelle+Coniche.pdf

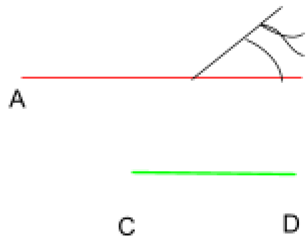
La parabola nasce con un diametro, un lato retto, e una direzione delle ordinate→ quadrato (ordinate y)=rettangolo(grandezza P e ascissa x).

per l'ellisse→ $y^2 = \frac{p}{x} - \frac{p}{t}x^2$

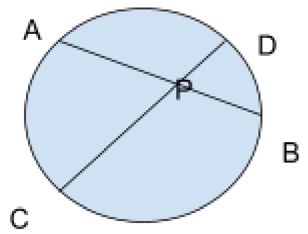
per l'iperbole→ $y^2 = \frac{p}{x} - \frac{p}{t}x^2$

La parabola nasce con questa proprietà, questa è una cosa tipica delle geometria di posizione, ovvero riuscire a stabilire che questa proprietà è una proprietà che caratterizza la parabola. Il primo libro delle Coniche vuole dimostrare che queste  sono proprietà sintomatiche, ovvero proprietà che caratterizzano una determinata figura, in particolare tutto il primo libro è dedicato al fatto che le proprietà che nascono insieme alla curva sono proprietà che la caratterizzano in maniera univoca.

hanno la proprietà sintomatica
bisogna dimostrare che se io assegno una semiretta data in posizione e data in lunghezza posso costruire una parabola che abbia la retta rossa come diametro , alfa come angolo diametro, ordinate e questa retta in verde come lato retto p della formula di prima (*). La proprietà della parabola che nasce col diametro è quella che caratterizza la parabola. Ma bisogna dimostrare tante cose(ha infinite parabole ecc)
Fra le varie proprietà che una curva ha bisogna individuare quelle che costituiscono un sintomo.
Lo scopo del I libro è di far vedere che le proprietà che nascono insieme con le curve(proporzione fra i quadrati delle ordinate e rettangoli delle ascisse) sono proprietà che le caratterizzano in maniera univoca



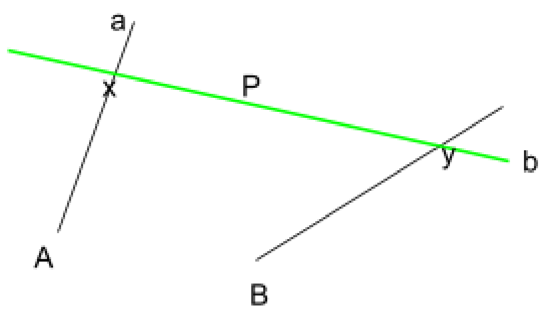

Una cosa simile è quanto succede al cerchio, ad esempio con due corde:




dato un cerchio e date due corde. Le corde si tagliano in modo che il rettangolo (PA,PB) = rettangolo (PC,PD) questa proprietà è asintomatica del cerchio , cioè appartiene solo al cerchio e non ad altre curve

Questo fatto è alla base di un concetto importante che si sviluppa in varie opere non pervenute. Sezione di rapporto trattano il seguente problema:

sezione di rapporto o aerea
Date due rette a e b e dati due punti su di esse A e B e dato un punto P tagliare queste due rette con una retta passante per P in modo che le intersezioni con le due rette abbiamo un rapporto dato
oppure racchiudono un'area data



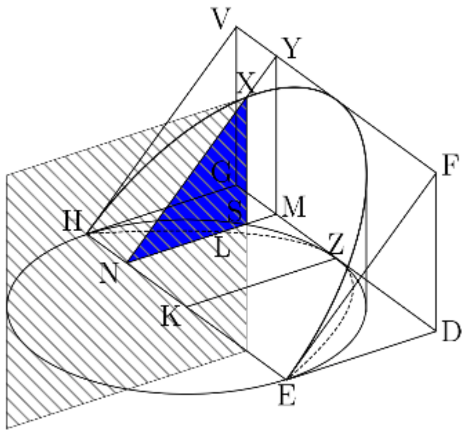

$$\frac{Ax}{Ay} =$$ dato (sezione di rapporto)

r(Ax,Ay)= data(sezione di aerea)

Nella sezione di rapporto ci sono numerosi teoremi, ma tutto questo a cosa serve? Perché spenderci così tanto tempo? Queste sono proprietà delle tangenti alle coniche, qui si sta cercando di prendere questa proprietà astrattizzarla e di vedere quali figure hanno questa proprietà. **Una certa proprietà nota si trasforma in una proprietà di luogo.** La domanda diventa quindi: ho un oggetto con una determinata proprietà, quanto gli appartiene? È il luogo di quella proprietà? Qui si parte dall'oggetto e poi ci si domanda se quella proprietà che possiede individua univocamente l'oggetto, la risposta varia da oggetto a oggetto. **La geometria di luogo è una geometria dove si vuol fare vedere se una determinata proprietà appartenente ad un oggetto lo caratterizza oppure no**. Questi argomenti sono studiati in varie opere: **De sectione nationis, De sectione spaţii, De sectio determinata, Contatti, Inclinazioni.** Tali libri, tranne il primo, li conosciamo attraverso Pappo. Egli è un autore del III-IV sec. D.c. parecchio lontano da Apollonio (almeno 5 secoli di differenza) di cui ci è pervenuta un'opera che si chiama **Collezione matematica:** questa è in otto libri, di cui il primo è perduto, del secondo ci resta solo la fine, poi abbiamo il terzo, quarto, quinto sesto, settimo e ottavo di cui abbiamo un frammento in greco e il testo completo in arabo. Questa opera avrà una importanza capitale nel rinascimento, che verrà definita con: **"esercizi e complementi su Archimede Apollonio e Teodosio".** Ci fornisce un sacco di informazioni, soprattutto descrizioni dettagliate di testi non pervenuti a noi. Il settimo libro è dedicato al dominio dell'analisi (quell'insieme di testi che usavano la tecnica dell'analisi e della sintesi). L'importanza di Pappo risiede nei libri che ci sono pervenuti, siamo nel periodo del commento e dell'arricchimento, in questo periodo più che raccontare cose nuove gli autori cercano di sistematizzare organizzare e nel caso generalizzare cose già viste in passato.

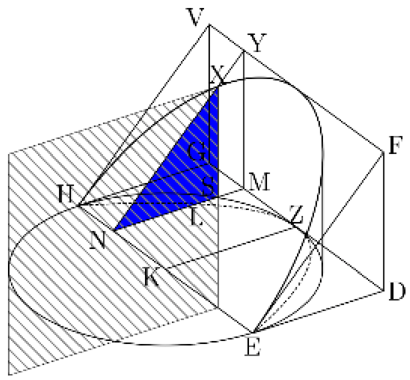
**Qualche appunto in più per il calcolo dell'unghia:**

## Il calcolo dell'unghia (1)



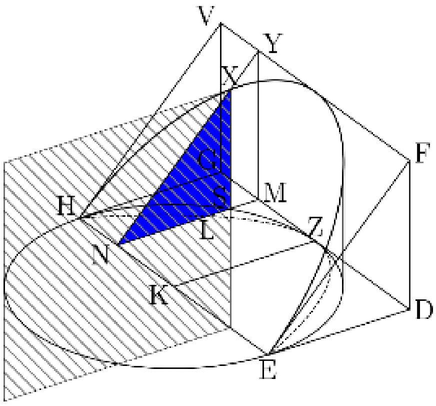

Si può dimostrare che $MN : NL = MN^2 : NS^2$

## Il calcolo dell'unghia (2)




Ovvero che una generica sezione ($MN$) del parallelogramma $HGDE$ sta a una generica sezione $NL$ della parabola come la corrispondente sezione del prisma sta alla corrispondente sezione dell'unghia.

## Il calcolo dell'unghia (3)




Da qui Archimede "indovina" che

$$\text{rettangolo} : \text{parabola} = \text{prisma} : \text{unghia}$$

## Il calcolo dell'unghia (4)

Ma nella *Quadratura della parabola* Archimede ha dimostrato che la parabola ($P$) è i $\frac{2}{3}$ del rettangolo circoscritto ($R$); inoltre è ovvio che il prisma "a dente di sega" ($S$) è $\frac{1}{4}$ del prisma ($Pr$) da cui si costruisce l'unghia ($U$). Abbiamo quindi:

$$R : P = S : U$$

ovvero

$$R : \frac{2}{3}R = S : U$$

quindi:

$$U = \frac{2}{3}S = \frac{2}{3}(\frac{1}{4}Pr) = \frac{1}{6}Pr$$

**LEZIONE 12→ 2-11-2020**

**Apollonio** scrive molte opere, molte della quali andate perse, tranne le **Coniche** che sono state scritte in otto libri di cui ci sono pervenuti in greco i primi 4. L'ottavo non ci è perduto, il quinto sesto e il settimo ci sono pervenuti in arabo. Nel sesto secolo **Eutocio** fece una edizione delle coniche di Apollonio dei primi 4 libri. Apollonio nella lettera a Eudemo dice che i primi 4 libri erano di carattere elementare, cerca di trattare tutte le sezioni come generate in un cono e poi studiare via via tutte le proprietà. **I libri più avanzati quinto sesto settimo e ottavo scompaiono dall'orizzonte della cultura greca**. In occidente le coniche arriveranno molto tardi. E' nel XV secolo che un umanista (**Francesco Filelfo**) porta in Italia un manoscritto greco delle coniche (i primi 4 libri), da cui dipendono tutti gli altri, quindi le coniche di Apollonio saranno conosciute solo sulla base dell'edizione di **Eutocio** e da questo manoscritto. La prima edizione completa delle coniche sarà fatta da **Edmund Halley** (vedi cometa), Apollonio avrà un peso molto minore nella rinascita della matematica greca nel corso del '600, perché molti aspetti della sua opera verranno lasciati in ombra.
**Ben diverso è il caso di Apollonio presso gli arabi** che scopriranno i tre libri mancanti e svilupperanno una geometria delle coniche molto avanzata applicandola all'ottica e alla nuova teoria delle equazioni, questi svilupperanno una teoria geometrica risolvendole con intersezione tra coniche, questo fa vedere come la tradizione matematica influenzi molto il testo matematico in esame.

**Pappo** -vive circa all'inizio del IV secolo-
Altro impatto è la tradizione di Pappo. Le coniche di Apollonio sono un manuale così come lo sono le opere di Archimede, ma non è un testo problematico, una volta che l' hai studiato ti domandi: "e quindi?, cosa ho capito di questa roba?". La collezione di Pappo è molto stimolante. **Alexander Jones** che ha fatto l'edizione del VII libro della Collezione pensa che un allievo di Pappo abbia messo assieme le opere del maestro, manca però la fine e l'inizio degli otto libri. L'opera di Pappo è importante per la sua caratteristica, **vari temi sono ripresi in maniera diversa più ricca o sistematica in varie parti del libro**. Pappo introduce un tipo di classificazione un po' strana dei problemi geometrici: sono i problemi piani, solidi e di linea. Quelli piani sono quelli che si possono costruire utilizzando solo rette e circonferenze, quelli solidi richiedono curve (intersezione di solidi) e quelli di linea sono problemi per la cui costruzione servono curve più complesse tipo la spirale di Archimede.

Li traduciamo in : **1)** piani=1° e 2° grado
**2)** Solidi= 3° e 4° grado
**3)** linee= grado superiori, o anche curve trascendenti
Usare un concetto algebrico che rimanda al grado dell'equazione, ma questa prospettiva è completamente assente in Pappo, questa tipo di impostazione risale in Apollonio, in quanto nel settimo libro Pappo descrive tutta una serie di opere (tesoro analisi) che sono i data di Euclide, i contatti di Apollonio, le inclinazioni di Apollonio, la sezione di rapporto, la sezione di area, i luoghi piani, le coniche i porismi (opera perduta di Euclide). Per tutte queste opere Pappo fornisce dei lemmi per renderle più comprensibile, abbiamo anche dei suggerimenti per quanto riguarda i punti critici di queste opere.

Emergono alcuni elementi:

1. Cosa vuol dire che un problema è risolubile con mezzi semplici
2. La collezione di Pappo ci fornisce una mess di opere che non abbiamo più, è una sorta di enciclopedia della matematica dell'antichità
3. Il fatto che Pappo asserisca che gli antichi risolvessero questi problemi utilizzando l'approccio dell'analisi e della sintesi, ovvero tu ha un problema e supponi di averlo già risolto (ad esempio quello dei tre cerchi) e poi rifletti sulle proprietà della figure fai dei ragionamenti li sviluppi fino ad arrivare a uno dei dati iniziali del problema (analisi), per la sintesi è il contrario: si parte dai dati per arrivare ai quesiti, questa cosa quando sarà letta nel rinascimento porterà gli studiosi a concentrarsi su questo aspetto.

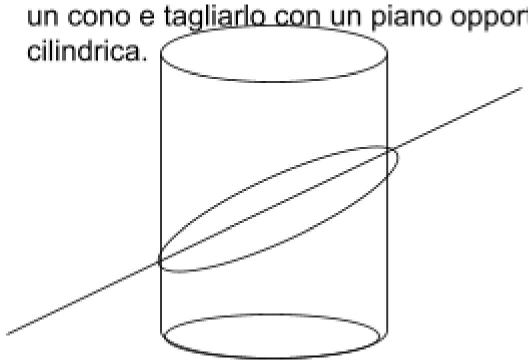
Il fatto da mettere in luce è che la lettura di Pappo avrà una parte decisiva per la nascita della matematica moderna, anche per la sua "sgangherataggine" che invoglierà i matematici a mettere ordine a questa storia quindi a lavorare su questo libro. Umberto Eco parla appunto dei libri "sgangherati" che sono quelli che hanno più influenza in quanto il lettore li fa suoi e se li sistema durante il suo studio, stimolandone la ricerca.

**"Dal codice Vaticano (conservato) discende la tradizione di Pappo, come per i codici A, B gotico e C di Archimede"**

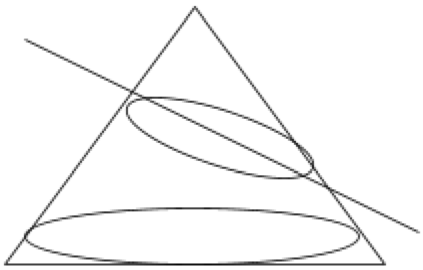
tradizione di Pappo se Jones avesse ragione sarebbe
originale di Pappo, codice sconosciuto, codice vaticano, Jones

Dopo l'epoca di Pappo l'unico matematico da sapere è **Sereno di Antinoe** (V sec). Lui scrive due opere, la prima la sezione del cilindro dove nella prefazione dice che se:

VIII secoli dopo Apollonio si pensava che se io ho un cilindro che taglio con un piano obliquo la sezione che ottengo non è la stessa che si ottiene tagliando un cono con un piano. cioè c'era difficoltà a capire se due curve erano o meno diverse. Per dimostrare che sono uguali: data un'ellisse cilindrica si può costruire un cono e tagliarlo con un piano opportuno in modo tale da ottenere dell'ellisse cilindrica.



ellisse cilindrico



ellisse conica

Questo mette in luce due aspetti,

1) nella tarda antichità ancora i matematici hanno difficoltà ad assimilare gli oggetti fondamentali.
2) Questa difficoltà nasce dal fatto che gli oggetti matematici sono ancora individuali, legati alla loro nascita.

Dopo Sereno abbiamo **Eutocio** che è allievo di una scuola filosofica di Alessandria ed è in contatto con alcuni matematici/architetti: **Isodio di Mileto, Astemio di Talles**. Eutocio scrive un commento ad Archimede sulla sfera e cilindro misura del cerchio equilibrio dei piani e Edizione e commento di coniche I-IV. Troviamo in **Simplicio** verso la fine del VI secolo, Lunule di Ippocrate (fine V secolo a.c) con questi signori si vede che la matematica greca è giunta a fine, sembra non avere più niente di nuovo da dire. Questo non dipende solo dal fatto che tutto il mondo antico sta andando incontro a cambiamenti profondissimi vedi cristianesimo, cambiamenti politici economici e culturali, ma dipende anche dalla natura della matematica greca stessa. L'aspetto di generalità non esiste nella matematica greca, si affaccia timidamente in Archimede, poco in Pappo ma non arrivano mai a maturazione, per la mancanza di un linguaggio adeguato, quello delle grandezze che non rappresentano una quantità astratta ma sempre dotate di forma spaziale. Questa fine del mondo antico la pressione dei barbari e molti altri aspetti saranno poi minori rispetto a quello che sarà la rottura data dall'espansione degli arabi.

L'impero romano aveva avuto sempre un nemico principale. Verso la fine del VI secolo, Giustiniano avevo messo ordine sia interno che esterno all'impero, che stava risorgendo, ma la vera frattura avviene all'inizio del VII secolo, quando Maometto inizia la sua predicazione in Arabia. Egli aveva unificato le varie tribù arabe in una nuova unità data dalla nuova religione dell'islam. Intanto i romani avevano rotto con i persiani, portando alla morte l'imperatore persiano e con il recupero della croce di cristo (629), finalmente l'impero romano aveva sconfitto il suo nemico. Sette anni dopo la situazione era completamente mutata, avvenne l'esaurimento delle forze sia persiane che romane (bizantine) e l'impero romani si trovava ad avere a che fare con il califfato dei successori di Maometto che si stavano espandendo in oriente e stavano attaccando anche le roccaforti cristiane e bizantine. Eraclio stabilisce quindi un patto con l'imperatore persiano ma va male, i persiani vengono conquistati dagli arabi. Successivamente nella battaglia dei guardiani dello yarmouk, durata 6 giorni in cui un grande esercito bizantino fu completamente sconfitto dalla strategia del comandante che si chiamava Khadi b-al-walid questo evento uno storico militare lo ha definito come una delle battaglie più decisive della storia. A metà del settecento si inoltrano anche nella Francia, queste bande verranno sconfitte nella battaglia di Poitiers 732 d.c. , alla fine in meno di un secolo si viene a costituire un impero grandissimo in cui domina una nuova religione nemica del cristianesimo. Come è possibile questa espansione? Ad esempio per le eresie