



# **Il Polinomio di Kauffman: un invariante di isotopia regolare**

## **Tesi di Laurea Triennale**

Antonio De Lucreziis

Dipartimento di Matematica

Università di Pisa

18 Luglio 2025



# Indice

**Teoria dei Nodi**

Polinomio di Kauffman

Laboratorio Computazionale



# Introduzione

**Def.**  $X, Y$  spazi topologici,  $f : X \rightarrow Y$  continua è **embedding** se  $X \approx f(X) \subset Y$ .

**Def.**  $f : X \rightarrow Y$  embedding,  $p \in X$  allora  $f$  è **localmente piatto** in  $p$  se esiste  $U \subset \mathbb{R}^3$  intorno di  $p$  tale che  $U \approx \mathbb{D}^2 \times [0, 1]$  e  $U \cap f(X) \leftrightarrow \{0\} \times [0, 1]$ .

**Def.**  $K \subset \mathbb{R}^3$  è un **nodo (tame)** se esiste  $f : S^1 \hookrightarrow \mathbb{R}^3$  embedding loc. piatto con  $K = f(S^1)$ .

**Def.** Possiamo generalizzare i nodi  $S^1 \rightarrow \mathbb{R}^3$  a **link** sostituendo con  $S^1 \sqcup \dots \sqcup S^1 \rightarrow \mathbb{R}^3$ .



# Isotopia Ambiente

**Def.**  $K_0, K_1 \subset \mathbb{R}^3$  sono **equivalenti** se esiste un'**isotopia ambiente** che porta uno nell'altro, ovvero esiste  $H : \mathbb{R}^3 \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$  continua, tale che:

- $\forall t \in [0, 1], H(\cdot, t)$  è un omeomorfismo

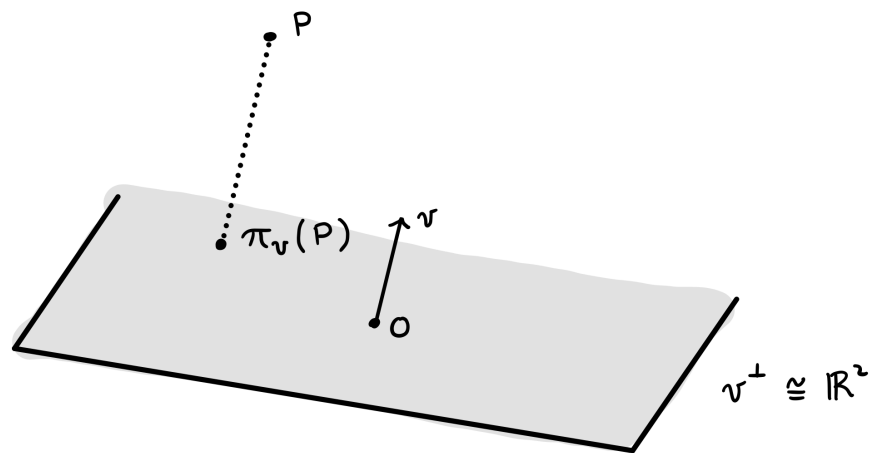
e posta  $H_t(x) := H(x, t)$  si ha:

- $H_0 = \text{id}_{\mathbb{R}^3}$
- $H_1(K_0) = K_1$



# Proiezioni e Diagrammi

**Fatto.** Sia  $L \subset \mathbb{R}^3$  link poligonale, allora esiste un aperto denso  $U \subset \mathbb{S}^2$  tale che  $\forall v \in U$  e detta  $\pi_v : \mathbb{R}^3 \rightarrow v^\perp$  la proiezione sul piano  $v^\perp$  come in figura, abbiamo che:



- i)  $L$  non ha segmenti paralleli a  $v$ .
  - ii) Se  $x \in \pi_v(L)$  è tale che  $|\pi^{-1}(x)| > 1$ , ovvero è un punto **singolare**, allora:
    - $\pi_v^{-1}(x)$  non contiene vertici di  $L$
    - $|\pi^{-1}(x)| = 2$  ovvero è un **punto doppio**, questi sono gli **incroci** della proiezione.
    - $x$  è un punto di intersezione trasversa
- Gli altri punti sono detti **regolari**.

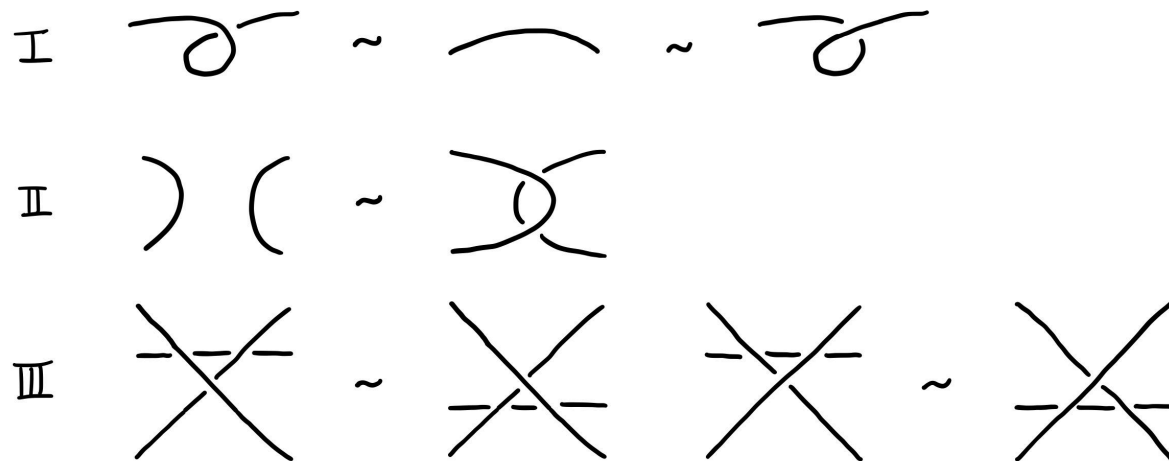


# Proiezioni e Diagrammi

**Def.** Un **diagramma**  $D \subset \mathbb{R}^2$  di un link  $L \subset \mathbb{R}^3$  è l'immagine di  $L$  attraverso una proiezione regolare decorata con l'informazione sopra/sotto ad ogni incrocio.

**Def.** Le mosse I, II, III in figura sono dette **mosse di Reidemeister**.

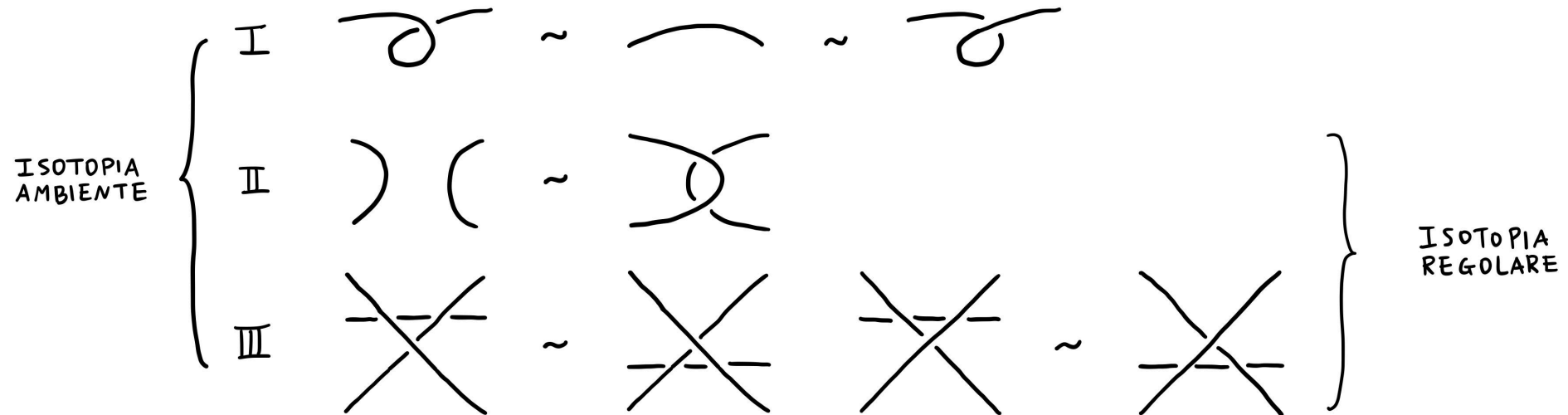
**Teorema (di Reidemeister).** Due diagrammi di link *equivalenti* sono collegati da una *successione finita mosse di Reidemeister* e isotopie planari.





# Isotopia Regolare

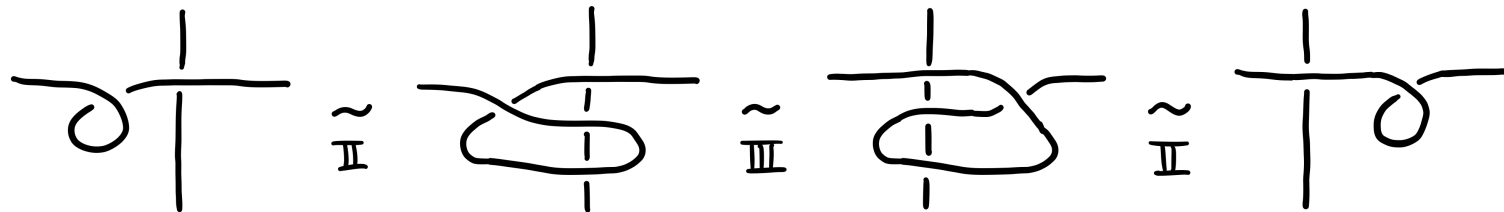
**Def.**  $D_1, D_2$  diagrammi di link si dicono equivalenti a meno di **isotopia regolare** se e solo se sono equivalenti a meno di isotopie planari e mosse II e III di Reidemeister.





# Comportamento Isotopia Regolare

**Osservazione.** Tutte le mosse di tipo I, quelle che introducono quelli che chiameremo **riccioli**, possono passare sopra o sotto altri fili senza problemi applicando le seguenti mosse







# Comportamento Isotopia Regolare

**Osservazione.** Quando abbiamo una coppia di riccioli con segni opposti abbiamo la seguente proprietà di cancellazione detto *trucco di Whitney*.





# Comportamento Isotopia Regolare

**Lemma.** Sia  $K$  un diagramma di un nodo in *forma discendente*, allora o è composto interamente da riccioli o ammette una sequenza di mosse di tipo II e III che portano al diagramma di un nodo formato solo da riccioli.

Ovvero un nodo in forma discendente è *equivalente* ad uno composto solo da riccioli.



# Comportamento Isotopia Regolare

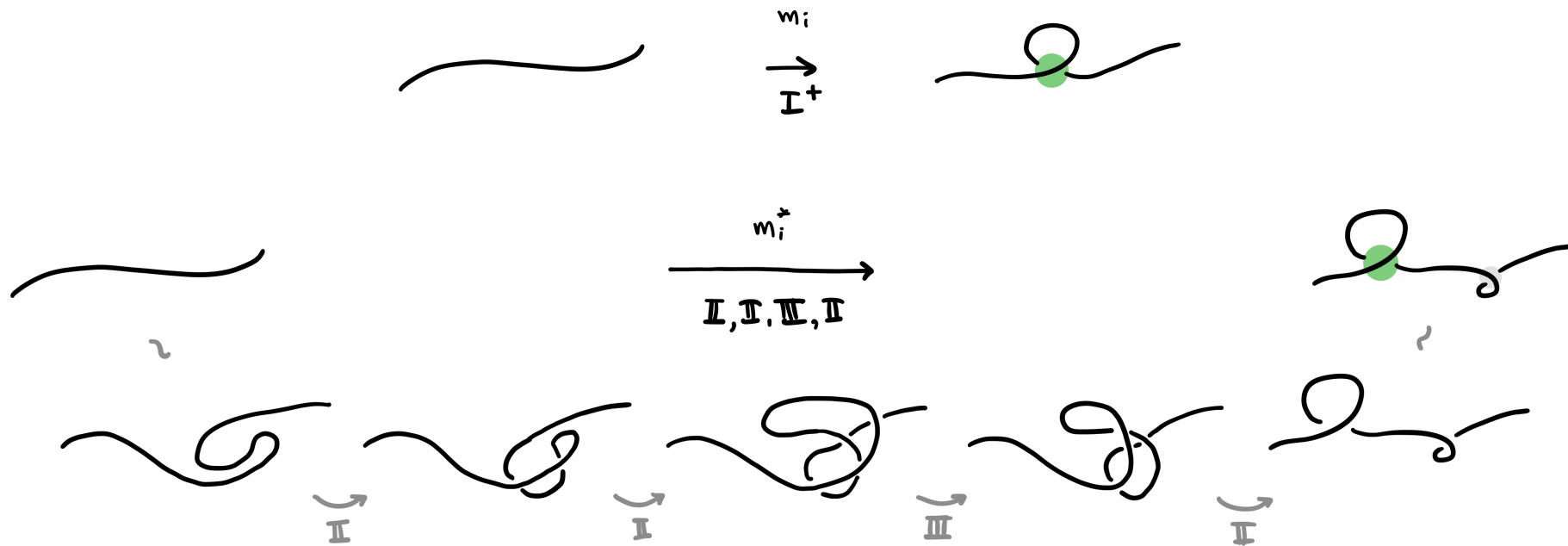
**Lemma.** Sia  $K$  un diagramma di un nodo in *forma discendente*, allora o è composto interamente da riccioli o ammette una sequenza di mosse di tipo II e III che portano al diagramma di un nodo formato solo da riccioli.

Ovvero un nodo in forma discendente è *equivalente* ad uno composto solo da riccioli.

*Dim.* Consideriamo una successione di mosse  $K = D_0 \rightarrow \dots \rightarrow D_n = \bigcirc$ .

- Mosse di tipo I che rimuovono un ricciolo
- Mosse di tipo I che aggiungono un ricciolo
- Mosse di tipo II, III

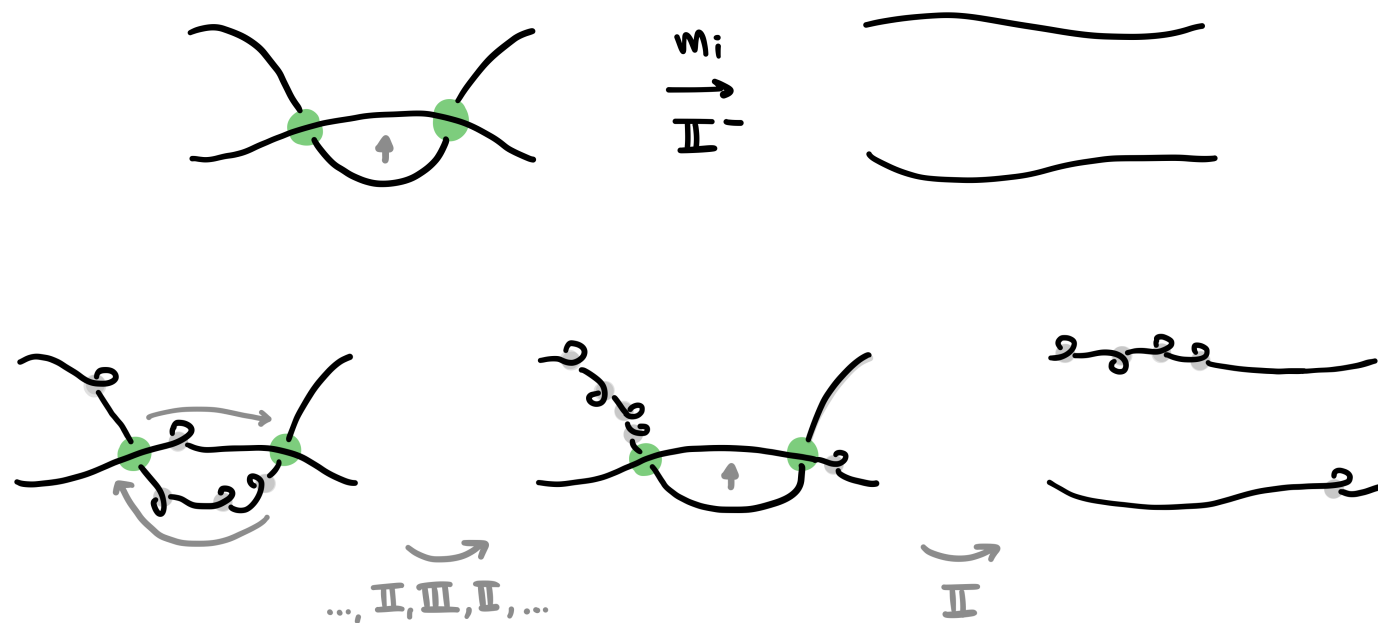
## Comportamento Isotopia Regolare



## Mosse di tipo I che aggiungono un ricciolo



# Comportamento Isotopia Regolare



Mosse di tipo II, III



# Writhe

**Def.** Definiamo **il segno** di un incrocio di un diagramma come segue:

$$\varepsilon\left(\begin{array}{c} \nearrow \searrow \\ \swarrow \nwarrow \end{array}\right) = +1 \quad \varepsilon\left(\begin{array}{c} \nwarrow \swarrow \\ \nearrow \nwarrow \end{array}\right) = -1$$

**Def.**  $K$  link orientato, definiamo il **writhe**  $w(K) := \sum_{c \text{ incrocio}} \varepsilon(c)$ .



# Writhe

**Def.** Definiamo **il segno** di un incrocio di un diagramma come segue:

$$\varepsilon\left(\begin{array}{c} \nearrow \\ \searrow \end{array}\right) = +1 \quad \varepsilon\left(\begin{array}{c} \nwarrow \\ \swarrow \end{array}\right) = -1$$

**Def.**  $K$  link orientato, definiamo il **writhe**  $w(K) := \sum_{c \text{ incrocio}} \varepsilon(c)$ .

**Prop.** Se  $K$  è il diagramma di un nodo, il *writhe* non dipende dall'orientazione.



# Writhe

**Def.** Definiamo **il segno** di un incrocio di un diagramma come segue:

$$\varepsilon\left(\begin{array}{c} \nearrow \searrow \\ \swarrow \nearrow \end{array}\right) = +1 \quad \varepsilon\left(\begin{array}{c} \nwarrow \swarrow \\ \searrow \nearrow \end{array}\right) = -1$$

**Def.**  $K$  link orientato, definiamo il **writhe**  $w(K) := \sum_{c \text{ incrocio}} \varepsilon(c)$ .

**Prop.** Se  $K$  è il diagramma di un nodo, il *writhe* non dipende dall'orientazione.

**Prop.** Il writhe è un invariante di isotopia regolare, ovvero  $K_1 \sim K_2 \Rightarrow w(K_1) = w(K_2)$ .





# Indice

Teoria dei Nodi

**Polinomio di Kauffman**

Laboratorio Computazionale



# Assiomi

**Def.** Sia  $K$  un diagramma di un link non orientato,  $L_K \in \mathbb{Z}[a, a^{-1}, z, z^{-1}]$  e verifica:

i)  $K \sim K' \Rightarrow L_K = L_{K'}$ .

ii) Valgono le seguenti relazioni:

a)  $L\left[\begin{array}{c} \diagup \diagdown \\ \diagdown \diagup \end{array}\right] + L\left[\begin{array}{c} \diagdown \diagup \\ \diagup \diagdown \end{array}\right] = z\left(L\left[\begin{array}{c} \frown \\ \smile \end{array}\right] + L\left[\begin{array}{c} \smile \\ \frown \end{array}\right]\right)$

b)  $L\left[\bigcirc\right] = 1$

c)  $L\left[\begin{array}{c} \curvearrowright \\ \curvearrowleft \end{array}\right] = aL\left[\begin{array}{c} \curvearrowright \\ \curvearrowright \end{array}\right]$

d)  $L\left[\begin{array}{c} \curvearrowright \\ \curvearrowright \end{array}\right] = a^{-1}L\left[\begin{array}{c} \curvearrowright \\ \curvearrowleft \end{array}\right]$



# Assiomi

**Def.** Sia  $K$  un diagramma di un link non orientato,  $L_K \in \mathbb{Z}[a, a^{-1}, z, z^{-1}]$  e verifica:

- i)  $K \sim K' \Rightarrow L_K = L_{K'}$ .
- ii) Valgono le seguenti relazioni:
  - a)  $L\left[\begin{array}{c} \diagup \diagdown \\ \diagdown \diagup \end{array}\right] + L\left[\begin{array}{c} \diagdown \diagup \\ \diagup \diagdown \end{array}\right] = z\left(L\left[\begin{array}{c} \frown \\ \smile \end{array}\right] + L\left[\begin{array}{c} \smile \\ \frown \end{array}\right]\right)$
  - b)  $L\left[\bigcirc\right] = 1$
  - c)  $L\left[\begin{array}{c} \curvearrowright \end{array}\right] = aL\left[\begin{array}{c} \frown \end{array}\right]$
  - d)  $L\left[\begin{array}{c} \curvearrowleft \end{array}\right] = a^{-1}L\left[\begin{array}{c} \frown \end{array}\right]$

**Osservazione.** A questo punto non sappiamo se  $L_K$  sia ben definito.



# Calcoli impliciti

Link  $L[\bigcirc \bigcirc]$

$$L\left[\begin{array}{c} \diagup \diagdown \\ \diagdown \diagup \end{array}\right] + L\left[\begin{array}{c} \diagdown \diagup \\ \diagup \diagdown \end{array}\right] = z \left( L\left[\begin{array}{c} \bigcirc \\ \bigcirc \end{array}\right] + L\left[\begin{array}{c} \diagup \diagdown \\ \diagup \diagdown \end{array}\right] \right)$$



# Calcoli impliciti

Link  $L[\bigcirc \bigcirc]$

$$L[\text{figure 8}] + L[\text{figure 8}] = z(L[\text{figure 8}] + L[\text{figure 8}])$$

$$\Rightarrow aL[\bigcirc] + a^{-1}L[\bigcirc] = z(\delta + L[\bigcirc])$$

$$\Rightarrow a + a^{-1} = z(\delta + 1)$$

$$\Rightarrow \delta = \frac{a + 1/a}{z} - 1$$



# Calcoli impliciti

## Link di Hopf

$$L[\text{link}] + L[\text{link}] = z(L[\text{link}] + L[\text{link}])$$

$$\Rightarrow L[\text{link}] + \delta = z(a + a^{-1})$$

$$\Rightarrow L[\text{link}] = -(a + a^{-1})z^{-1} + 1 + (a + a^{-1})z$$

## Nodo trifoglio

$$L[\text{trifoglio}] + L[\text{trifoglio}] = z(L[\text{trifoglio}] + L[\text{trifoglio}])$$

$$\Rightarrow L[\text{trifoglio}] + a = z(L[\text{link}] + a^{-2})$$

$$\Rightarrow L[\text{trifoglio}] = -(2a + a^{-1}) + (1 + a^{-2})z + (a + a^{-1})z^2$$



# Invariante di isotopia ambiente associato

**Def.** Definiamo  $F_K \in \mathbb{Z}[a, a^{-1}, z, z^{-1}]$  per diagrammi di link orientati  $K$  come

$$F_K := a^{-w(K)} L_K$$

dove  $L_K$  di un diagramma orientato è definito dimenticando l'orientazione.

**Prop.** Il polinomio  $F_K(a, z)$  è un invariante di isotopia ambiente.



# Considerazioni preliminari

**Def.** Sia  $K$  un diagramma di un nodo,  $p \in K$  un punto di partenza direzionato e sia  $\lambda = (\lambda_n, \dots, \lambda_0)$  una sequenza di etichette di incroci di  $K$ :

$$\begin{array}{cccc} \begin{array}{c} i \\ \diagup \quad \diagdown \end{array} & \begin{array}{c} i \\ \diagdown \quad \diagup \end{array} & \begin{array}{c} \smile \\ \frown \end{array} & \begin{array}{c} ) \\ ( \end{array} \\ K & S_i K & E_i K & e_i K \end{array}$$

$$A_i^\lambda := E_{\lambda_i} S_{\lambda_{i-1}} \cdots S_{\lambda_0} \quad B_i^\lambda := e_{\lambda_i} S_{\lambda_{i-1}} \cdots S_{\lambda_0}$$

$$\sum_K(\lambda) := \sum_{i=0}^n (-1)^i (L[A_i^\lambda K] + L[B_i^\lambda K])$$





## Considerazioni preliminari

Sia  $\lambda$  una sequenza di scambi che porta  $K$  a  $\hat{K}$ :

$$L[K] + L[S_0 K] = z(L[E_0 K] + L[e_0 K])$$



## Considerazioni preliminari

Sia  $\lambda$  una sequenza di scambi che porta  $K$  a  $\hat{K}$ :

$$L[K] + L[S_0 K] = z(L[E_0 K] + L[e_0 K])$$

$$L[S_0 K] + L[S_1 S_0 K] = z(L[E_1 S_0 K] + L[e_1 S_0 K])$$

$$\vdots$$



## Considerazioni preliminari

Sia  $\lambda$  una sequenza di scambi che porta  $K$  a  $\hat{K}$ :

$$L[K] + L[S_0 K] = z(L[E_0 K] + L[e_0 K])$$

$$L[S_0 K] + L[S_1 S_0 K] = z(L[E_1 S_0 K] + L[e_1 S_0 K])$$

$$\vdots$$

$$L[S_{n-1} \cdots S_0 K] + L[\hat{K}] = z(L[E_n S_{n-1} \cdots S_0 K] + L[e_n S_{n-1} \cdots S_0 K])$$



## Considerazioni preliminari

Sia  $\lambda$  una sequenza di scambi che porta  $K$  a  $\hat{K}$ :

$$L[K] + L[S_0 K] = z(L[E_0 K] + L[e_0 K])$$

$$-(L[S_0 K] + L[S_1 S_0 K]) = -z(L[E_1 S_0 K] + L[e_1 S_0 K])$$

$$\vdots$$

$$(-1)^n (L[S_{n-1} \cdots S_0 K] + L[\hat{K}]) = (-1)^n z(L[E_n S_{n-1} \cdots S_0 K] + L[e_n S_{n-1} \cdots S_0 K])$$



# Considerazioni preliminari

Sia  $\lambda$  una sequenza di scambi che porta  $K$  a  $\hat{K}$ :

$$L[K] + \cancel{L[S_0 K]} = z(L[E_0 K] + L[e_0 K])$$

$$-(\cancel{L[S_0 K]} + \cancel{L[S_1 S_0 K]}) = -z(L[E_1 S_0 K] + L[e_1 S_0 K])$$

$$\vdots$$

$$(-1)^n (\cancel{L[S_{n-1} \cdots S_0 K]} + L[\hat{K}]) = (-1)^n z(L[E_n S_{n-1} \cdots S_0 K] + L[e_n S_{n-1} \cdots S_0 K])$$



## Considerazioni preliminari

Sia  $\lambda$  una sequenza di scambi che porta  $K$  a  $\hat{K}$ :

$$L[K] + \cancel{L[S_0 K]} = z(L[E_0 K] + L[e_0 K])$$

$$-(\cancel{L[S_0 K]} + \cancel{L[S_1 S_0 K]}) = -z(L[E_1 S_0 K] + L[e_1 S_0 K])$$

$$\vdots$$

$$(-1)^n (\cancel{L[S_{n-1} \cdots S_0 K]} + L[\hat{K}]) = (-1)^n z(L[E_n S_{n-1} \cdots S_0 K] + L[e_n S_{n-1} \cdots S_0 K])$$

$$\Rightarrow L[K] + (-1)^n L[\hat{K}] = z \sum_{i=0}^n (-1)^i (L[E_i S_{i-1} \cdots S_0 K] + L[e_i S_{i-1} \cdots S_0 K])$$



# Considerazioni preliminari

Sia  $\lambda$  una sequenza di scambi che porta  $K$  a  $\hat{K}$ :

$$L[K] + \cancel{L[S_0 K]} = z(L[E_0 K] + L[e_0 K])$$

$$-(\cancel{L[S_0 K]} + \cancel{L[S_1 S_0 K]}) = -z(L[E_1 S_0 K] + L[e_1 S_0 K])$$

$$\vdots$$

$$(-1)^n (\cancel{L[S_{n-1} \cdots S_0 K]} + L[\hat{K}]) = (-1)^n z(L[E_n S_{n-1} \cdots S_0 K] + L[e_n S_{n-1} \cdots S_0 K])$$

$$\Rightarrow L[K] + (-1)^n L[\hat{K}] = z \sum_{i=0}^n (-1)^i (L[A_i^\lambda K] + L[B_i^\lambda K])$$



# Considerazioni preliminari

Sia  $\lambda$  una sequenza di scambi che porta  $K$  a  $\hat{K}$ :

$$L[K] + \cancel{L[S_0 K]} = z(L[E_0 K] + L[e_0 K])$$

$$-(\cancel{L[S_0 K]} + \cancel{L[S_1 S_0 K]}) = -z(L[E_1 S_0 K] + L[e_1 S_0 K])$$

$$\vdots$$

$$(-1)^n (\cancel{L[S_{n-1} \cdots S_0 K]} + L[\hat{K}]) = (-1)^n z(L[E_n S_{n-1} \cdots S_0 K] + L[e_n S_{n-1} \cdots S_0 K])$$

$$\Rightarrow L[K] = (-1)^{n+1} L[\hat{K}] + z \sum_{i=0}^n (-1)^i (L[A_i^\lambda K] + L[B_i^\lambda K])$$





# Considerazioni preliminari

Sia  $\lambda$  una sequenza di scambi che porta  $K$  a  $\hat{K}$ :

$$L[K] + \cancel{L[S_0 K]} = z(L[E_0 K] + L[e_0 K])$$

$$-(\cancel{L[S_0 K]} + \cancel{L[S_1 S_0 K]}) = -z(L[E_1 S_0 K] + L[e_1 S_0 K])$$

$$\vdots$$

$$(-1)^n (\cancel{L[S_{n-1} \cdots S_0 K]} + L[\hat{K}]) = (-1)^n z(L[E_n S_{n-1} \cdots S_0 K] + L[e_n S_{n-1} \cdots S_0 K])$$

$$\Rightarrow L[K] = (-1)^{n+1} L[\hat{K}] + z \sum_{i=0}^n (-1)^i (L[A_i^\lambda K] + L[B_i^\lambda K])$$

$$\Omega_K(\lambda) := (-1)^{|\lambda|+1} L[\hat{K}(\lambda)] + z \sum_K (\lambda)$$



## Definizione induttiva

**Def (induttiva di  $L_K$ ).** Il polinomio  $L_K(a, z)$  è definito induttivamente come segue:

- i) Se  $K = \hat{K}(\mathcal{U}, p)$  è in *forma discendente* per un qualche  $p$ :  $L_K(a, z) := a^{w(K)}$
- ii) Se  $K = K_1 \cup K_2$  rispettivamente diagrammi di un nodo e di un link e con  $K_1$  *sovrastante*  $K_2$ :

$$L(K_1 \cup K_2) := \delta L(K_1) L(K_2) \quad \delta := (a + a^{-1})/z - 1$$

- iii) Altrimenti  $K = K_1 \cup \dots \cup K_n$ :

$$\text{a) Se } n > 1: L_K(a, z) := \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^n \sum_{q=p_i, \bar{p}_i} \left( (-1)^{|\lambda(q)|+1} \delta L_{K_i} L_{K-K_i} + z \sum_K (\lambda(q)) \right)$$

$$\text{b) Se } n = 1: L_K(a, z) := \frac{1}{2} \sum_{q=p, \bar{p}} \left( (-1)^{|\lambda(q)|+1} L_{\hat{K}(q)} + z \sum_K (\lambda(q)) \right)$$



# Ipotesi induttiva

Bla bla bla



# Indice

Teoria dei Nodi

Polinomio di Kauffman

**Laboratorio Computazionale**



# Implementazione e Verifica

## Progetto Computazionale:

- **Implementazione in Python:** Algoritmo basato sulle relazioni skein
- **Calcolo automatico** di  $L_K$  e  $F_K$  per diagrammi di nodi
- **Interfaccia user-friendly** per l'inserimento di diagrammi



# Implementazione e Verifica

## Progetto Computazionale:

- **Implementazione in Python:** Algoritmo basato sulle relazioni skein
- **Calcolo automatico** di  $L_K$  e  $F_K$  per diagrammi di nodi
- **Interfaccia user-friendly** per l'inserimento di diagrammi

## Verifica sperimentale:

- Confronto con il database **KnotInfo**
- Verifica su centinaia di nodi noti
- Test di coerenza con valori pubblicati



# Implementazione e Verifica

## Progetto Computazionale:

- **Implementazione in Python:** Algoritmo basato sulle relazioni skein
- **Calcolo automatico** di  $L_K$  e  $F_K$  per diagrammi di nodi
- **Interfaccia user-friendly** per l'inserimento di diagrammi

## Verifica sperimentale:

- Confronto con il database **KnotInfo**
- Verifica su centinaia di nodi noti
- Test di coerenza con valori pubblicati

**Risultato Principale:** Trovato un **errore** nel valore per il nodo  $10_{125}$ .



# Conclusioni

## Percorso compiuto:

- i) Dal concetto geometrico di nodo alla formalizzazione tramite diagrammi
- ii) Definizione dell'isotopia regolare e degli invarianti
- iii) Costruzione rigorosa del polinomio di Kauffman
- iv) Dimostrazione della buona definizione
- v) Estensione agli invarianti di isotopia ambiente





# Conclusioni

## Percorso compiuto:

- i) Dal concetto geometrico di nodo alla formalizzazione tramite diagrammi
- ii) Definizione dell'isotopia regolare e degli invarianti
- iii) Costruzione rigorosa del polinomio di Kauffman
- iv) Dimostrazione della buona definizione
- v) Estensione agli invarianti di isotopia ambiente

## Risultati principali:

- **Dimostrazione** della buona definizione di  $L_K$
- **Costruzione** di  $F_K$  come invariante ambiente
- **Verifica computazionale** e scoperta di errori nella letteratura



# Conclusioni

## Percorso compiuto:

- i) Dal concetto geometrico di nodo alla formalizzazione tramite diagrammi
- ii) Definizione dell'isotopia regolare e degli invarianti
- iii) Costruzione rigorosa del polinomio di Kauffman
- iv) Dimostrazione della buona definizione
- v) Estensione agli invarianti di isotopia ambiente

## Risultati principali:

- **Dimostrazione** della buona definizione di  $L_K$
- **Costruzione** di  $F_K$  come invariante ambiente
- **Verifica computazionale** e scoperta di errori nella letteratura

**Grazie per l'attenzione!**

Domande?