



Il Polinomio di Kauffman: un invariante di isotopia regolare

Tesi di Laurea Triennale

Antonio De Lucreziis

Dipartimento di Matematica
Università di Pisa

18 Luglio 2025



Indice

Teoria dei Nodi

Polinomio di Kauffman

Laboratorio Computazionale



Introduzione

Def. $K \subset \mathbb{R}^3$ è un **nodo (tame)** se esiste $f : \mathbb{S}^1 \hookrightarrow \mathbb{R}^3$ embedding loc. piatto con $K = f(\mathbb{S}^1)$.

Def. Nodi $\mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{R}^3 \leadsto \text{Link } \mathbb{S}^1 \sqcup \dots \sqcup \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{R}^3$.



Introduzione

Def. $K \subset \mathbb{R}^3$ è un **nodo (tame)** se esiste $f : \mathbb{S}^1 \hookrightarrow \mathbb{R}^3$ embedding loc. piatto con $K = f(\mathbb{S}^1)$.

Def. Nodi $\mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{R}^3 \rightsquigarrow \text{Link } \mathbb{S}^1 \sqcup \dots \sqcup \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{R}^3$.

Def. K_0, K_1 sono equivalenti se $\exists H : \mathbb{R}^3 \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$ **isotopia ambiente**, ovvero tale che:

- $\forall t \in [0, 1], H(\cdot, t)$ è un omeomorfismo

e posta $H_t(x) := H(x, t)$ si ha:

- $H_0 = \text{id}_{\mathbb{R}^3}$
- $H_1(K_0) = K_1$



Introduzione

Def. $K \subset \mathbb{R}^3$ è un **nodo (tame)** se esiste $f : \mathbb{S}^1 \hookrightarrow \mathbb{R}^3$ embedding loc. piatto con $K = f(\mathbb{S}^1)$.

Def. Nodi $\mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{R}^3 \rightsquigarrow \text{Link } \mathbb{S}^1 \sqcup \dots \sqcup \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{R}^3$.

Def. K_0, K_1 sono equivalenti se $\exists H : \mathbb{R}^3 \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$ **isotopia ambiente**, ovvero tale che:

- $\forall t \in [0, 1], H(\cdot, t)$ è un omeomorfismo

e posta $H_t(x) := H(x, t)$ si ha:

- $H_0 = \text{id}_{\mathbb{R}^3}$
- $H_1(K_0) = K_1$

Esistenza Proiezioni Regolari. Sia $L \subset \mathbb{R}^3$ *link poligonale*, allora esiste un aperto denso U tale che $\forall v \in U \subset \mathbb{S}^2$, la proiezione sul piano $v^\perp \approx \mathbb{R}^2$ è regolare.

- $x \in \pi_v(L) \subset v^\perp$ tale che $|\pi_v^{-1}(x)| = 2$ sono detti **incroci**.

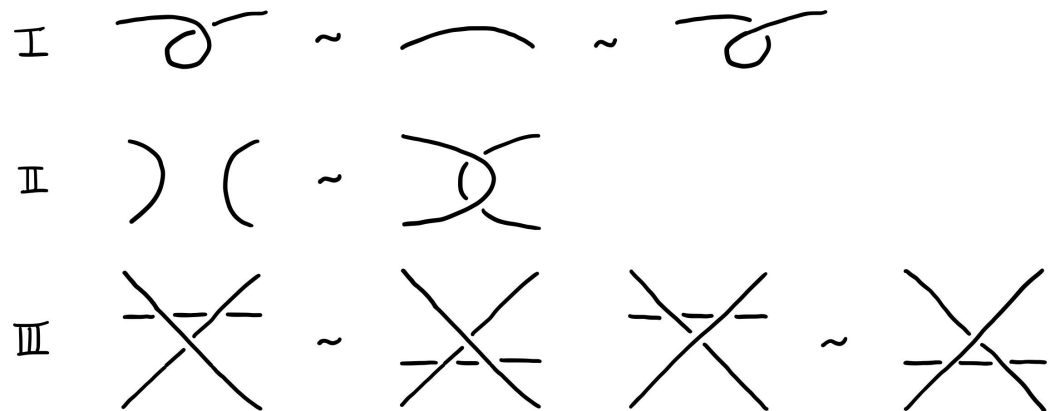


Proiezioni e Diagrammi

Def. Un **diagramma** $D \subset \mathbb{R}^2$ di un link $L \subset \mathbb{R}^3$ è l'immagine di L attraverso una proiezione regolare decorata con l'informazione sopra/sotto ad ogni incrocio.

Def. Le mosse I, II, III in figura sono dette **mosse di Reidemeister**.

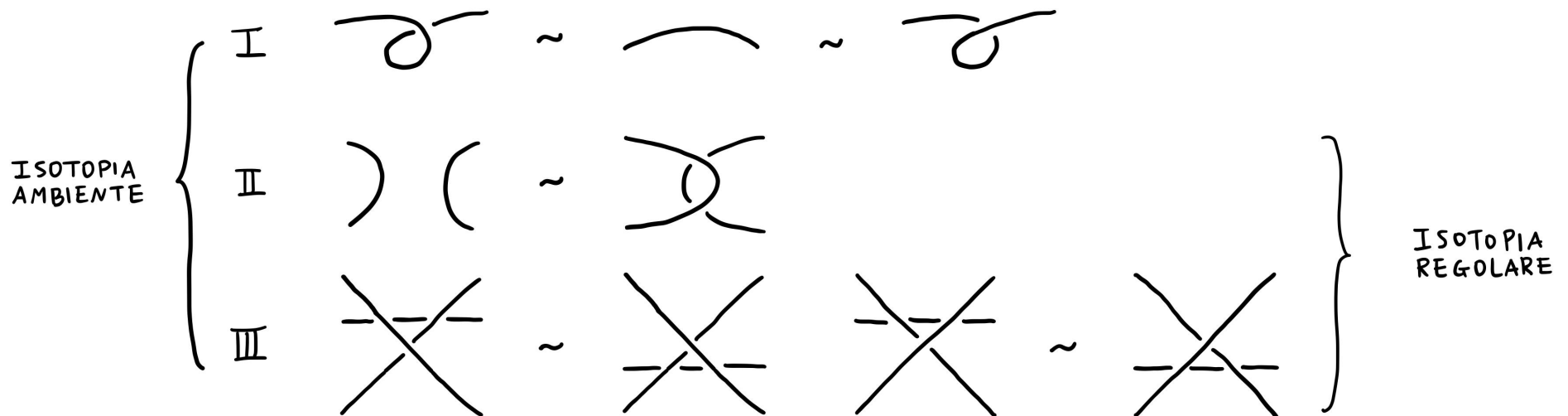
Teorema (di Reidemeister). Due diagrammi di link *equivalenti* sono collegati da una *successione finita di mosse di Reidemeister* e isotopie planari.





Isotopia Regolare

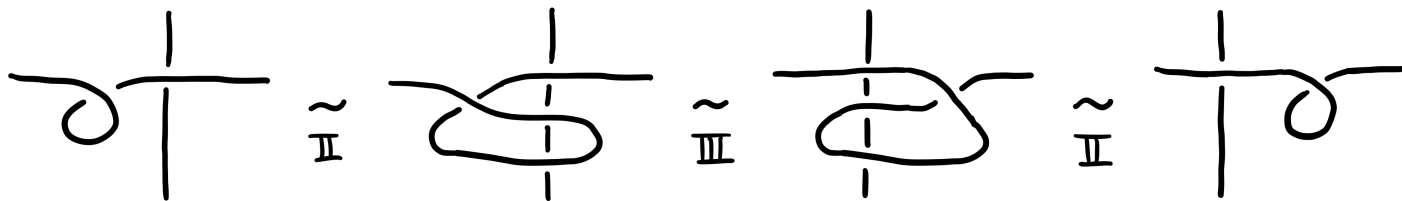
Def. $D_1 \sim D_2$ diagrammi di link si dicono equivalenti a meno di **isotopia regolare** se e solo se sono equivalenti a meno di isotopie planari e mosse II e III di Reidemeister.





Comportamento Isotopia Regolare

Osservazione. Tutte le mosse di tipo I, quelle che introducono quelli che chiameremo **riccioli**, possono passare sopra o sotto altri fili senza problemi applicando le seguenti mosse





Comportamento Isotopia Regolare

Osservazione. Quando abbiamo una coppia di riccioli con segni opposti abbiamo la seguente proprietà di cancellazione detto *trucco di Whitney*.





Writhe

Def. Il **segno** di un incrocio di un diagramma orientato è: $\varepsilon\left(\nearrow\searrow\right) = +1, \varepsilon\left(\nwarrow\swarrow\right) = -1$

Def. K link orientato, definiamo il **writhe** $w(K) := \sum_{c \text{ incrocio}} \varepsilon(c)$.



Writhe

Def. Il **segno** di un incrocio di un diagramma orientato è: $\varepsilon\left(\begin{array}{c} \nearrow \\ \searrow \end{array}\right) = +1, \varepsilon\left(\begin{array}{c} \nwarrow \\ \nearrow \end{array}\right) = -1$

Def. K link orientato, definiamo il **writhe** $w(K) := \sum_{c \text{ incrocio}} \varepsilon(c)$.

Prop. Se K è il diagramma di un nodo, il **writhe non dipende dall'orientazione**.



Writhe

Def. Il **segno** di un incrocio di un diagramma orientato è: $\varepsilon\left(\begin{array}{c} \nearrow \\ \searrow \end{array}\right) = +1, \varepsilon\left(\begin{array}{c} \nwarrow \\ \swarrow \end{array}\right) = -1$

Def. K link orientato, definiamo il **writhe** $w(K) := \sum_{c \text{ incrocio}} \varepsilon(c)$.

Prop. Se K è il diagramma di un nodo, il **writhe non dipende dall'orientazione**.

Prop. Il writhe è un **invariante di isotopia regolare**, ovvero $K_1 \sim K_2 \Rightarrow w(K_1) = w(K_2)$.



Indice

Teoria dei Nodi

Polinomio di Kauffman

Laboratorio Computazionale



Assiomi

Def. Per ogni diagramma di link *non orientato* K , il polinomio $L_K \in \mathbb{Z}[a, a^{-1}, z, z^{-1}]$ verifica i seguenti assiomi:

i) $K \sim K' \Rightarrow L_K = L_{K'}$.

ii) Valgono le seguenti relazioni:

a) $L\left[\begin{array}{c} \diagup \diagdown \\ \diagdown \diagup \end{array}\right] + L\left[\begin{array}{c} \diagdown \diagup \\ \diagup \diagdown \end{array}\right] = z(L\left[\begin{array}{c} \smile \\ \smile \end{array}\right] + L\left[\begin{array}{c} \frown \\ \frown \end{array}\right])$

b) $L\left[\bigcirc\right] = 1$

c) $L\left[\begin{array}{c} \curvearrowright \\ \curvearrowright \end{array}\right] = aL\left[\begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \end{array}\right]$

d) $L\left[\begin{array}{c} \curvearrowleft \\ \curvearrowleft \end{array}\right] = a^{-1}L\left[\begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \end{array}\right]$



Assiomi

Def. Per ogni diagramma di link *non orientato* K , il polinomio $L_K \in \mathbb{Z}[a, a^{-1}, z, z^{-1}]$ verifica i seguenti assiomi:

i) $K \sim K' \Rightarrow L_K = L_{K'}$.

ii) Valgono le seguenti relazioni:

a) $L\left[\begin{array}{c} \diagup \diagdown \\ \diagdown \diagup \end{array}\right] + L\left[\begin{array}{c} \diagdown \diagup \\ \diagup \diagdown \end{array}\right] = z\left(L\left[\begin{array}{c} \diagup \diagup \\ \diagdown \diagdown \end{array}\right] + L\left[\begin{array}{c} \diagdown \diagdown \\ \diagup \diagup \end{array}\right]\right)$

b) $L\left[\bigcirc\right] = 1$

c) $L\left[\begin{array}{c} \curvearrowright \end{array}\right] = aL\left[\begin{array}{c} \text{---} \end{array}\right]$

d) $L\left[\begin{array}{c} \curvearrowleft \end{array}\right] = a^{-1}L\left[\begin{array}{c} \text{---} \end{array}\right]$

Osservazione. A questo punto non sappiamo se L_K sia ben definito.



Normalizzazione a F_K

Def. $F_{K(a,z)} := a^{-w(K)} \cdot L_K(a, z)$



Normalizzazione a F_K

Def. $F_{K(a,z)} := a^{-w(K)} \cdot L_K(a, z)$

Prop. F_K invariante di isotopia ambiente.

Dimostrazione.

$$F[\bigcirc] =$$



Normalizzazione a F_K

Def. $F_{K(a,z)} := a^{-w(K)} \cdot L_K(a, z)$

Prop. F_K invariante di isotopia ambiente.

Dimostrazione.

$$F[\bigcirc] = a^{-w(\bigcirc)} \cdot L[\bigcirc]$$



Normalizzazione a F_K

Def. $F_{K(a,z)} := a^{-w(K)} \cdot L_K(a, z)$

Prop. F_K invariante di isotopia ambiente.

Dimostrazione.

$$F[\overline{\mathcal{O}}] = a^{-w(\overline{\mathcal{O}})} \cdot L[\overline{\mathcal{O}}]$$

$$L[\overline{\mathcal{O}}] = aL[\neg], \quad w(\overline{\mathcal{O}}) = w(\neg) + 1$$



Normalizzazione a F_K

Def. $F_{K(a,z)} := a^{-w(K)} \cdot L_K(a, z)$

Prop. F_K invariante di isotopia ambiente.

Dimostrazione.

$$\begin{aligned} F[\bigcirc] &= a^{-w(\bigcirc)} \cdot L[\bigcirc] \\ &= a^{-w(\text{---})-1} \cdot aL[\text{---}] \end{aligned}$$

$$L[\bigcirc] = aL[\text{---}], \quad w(\bigcirc) = w(\text{---}) + 1$$



Normalizzazione a F_K

Def. $F_{K(a,z)} := a^{-w(K)} \cdot L_K(a, z)$

Prop. F_K invariante di isotopia ambiente.

Dimostrazione.

$$\begin{aligned} F[\bigcirc] &= a^{-w(\bigcirc)} \cdot L[\bigcirc] \\ &= a^{-w(\text{---})-1} \cdot aL[\text{---}] \\ &= a^{-w(\text{---})} \cdot L[\text{---}] \end{aligned}$$

$$L[\bigcirc] = aL[\text{---}], \quad w(\bigcirc) = w(\text{---}) + 1$$



Normalizzazione a F_K

Def. $F_{K(a,z)} := a^{-w(K)} \cdot L_K(a, z)$

Prop. F_K invariante di isotopia ambiente.

Dimostrazione.

$$\begin{aligned}
 F[\bigcirc] &= a^{-w(\bigcirc)} \cdot L[\bigcirc] \\
 &= a^{-w(\text{---})-1} \cdot aL[\text{---}] \\
 &= a^{-w(\text{---})} \cancel{a} \cdot \cancel{a}L[\text{---}] \\
 &= a^{-w(\text{---})} \cdot L[\text{---}]
 \end{aligned}$$

$$L[\bigcirc] = aL[\text{---}], \quad w(\bigcirc) = w(\text{---}) + 1$$



Normalizzazione a F_K

Def. $F_{K(a,z)} := a^{-w(K)} \cdot L_K(a, z)$

Prop. F_K invariante di isotopia ambiente.

Dimostrazione.

$$F[\bigcirc] = a^{-w(\bigcirc)} \cdot L[\bigcirc]$$

$$= a^{-w(\text{---})-1} \cdot aL[\text{---}]$$

$$= a^{-w(\text{---})} \cancel{a} \cdot \cancel{a}L[\text{---}]$$

$$= a^{-w(\text{---})} \cdot L[\text{---}]$$

$$= F[\text{---}]$$

$$L[\bigcirc] = aL[\text{---}], \quad w(\bigcirc) = w(\text{---}) + 1$$



Calcoli impliciti

$$\text{Link } L \left[\bigcirc \bigcirc \right]$$



Calcoli impliciti

$$\text{Link } L[\bigcirc \bigcirc]$$

$$(\text{figure-eight}, \text{figure-eight}, \text{figure-eight}, \text{figure-eight})$$



Calcoli impliciti

Link $L[\bigcirc \bigcirc]$

$$L[\text{figure 8}] + L[\text{figure 8}] = z \left(L[\text{figure 8}] + L[\text{figure 8}] \right)$$



Calcoli impliciti

Link $L[\bigcirc \bigcirc]$

$$L[\text{link}] + L[\text{link}] = z(L[\text{link}] + L[\text{link}])$$

$$\Rightarrow aL[\bigcirc] + a^{-1}L[\bigcirc] = z(\delta + L[\bigcirc])$$



Calcoli impliciti

Link $L[\bigcirc \bigcirc]$

$$L[\text{crossing}] + L[\text{crossing}] = z(L[\text{link}] + L[\text{link}])$$

$$\Rightarrow aL[\bigcirc] + a^{-1}L[\bigcirc] = z(\delta + L[\bigcirc])$$

$$\Rightarrow a + a^{-1} = z(\delta + 1)$$



Calcoli impliciti

Link $L[\bigcirc \bigcirc]$

$$L[\text{link}] + L[\text{link}] = z(L[\text{two circles}] + L[\text{two circles}])$$

$$\Rightarrow aL[\bigcirc] + a^{-1}L[\bigcirc] = z(\delta + L[\bigcirc])$$

$$\Rightarrow a + a^{-1} = z(\delta + 1)$$

$$\Rightarrow \delta = \frac{a + 1/a}{z} - 1$$



Calcoli impliciti

Link $L[\bigcirc \bigcirc]$

$$L[\text{link}] + L[\text{link}] = z(L[\text{two circles}] + L[\text{two circles}])$$

$$\Rightarrow aL[\bigcirc] + a^{-1}L[\bigcirc] = z(\delta + L[\bigcirc])$$

$$\Rightarrow a + a^{-1} = z(\delta + 1)$$

$$\Rightarrow \delta = \frac{a + 1/a}{z} - 1$$

$$\leadsto L[K_1 \sqcup K_2] = \delta L[K_1]L[K_2]$$



Calcoli impliciti

Link $L[\bigcirc \bigcirc]$

$$L[\text{figure-eight}] + L[\text{figure-eight}] = z(L[\text{two circles}] + L[\text{two circles}])$$

$$\Rightarrow aL[\bigcirc] + a^{-1}L[\bigcirc] = z(\delta + L[\bigcirc])$$

$$\Rightarrow a + a^{-1} = z(\delta + 1)$$

$$\Rightarrow \delta = \frac{a + 1/a}{z} - 1$$

$$\leadsto L[K_1 \sqcup K_2] = \delta L[K_1]L[K_2]$$

Link di Hopf

$$L[\text{Hopf link}] + L[\text{Hopf link}] = z(L[\text{Hopf link}] + L[\text{Hopf link}])$$

$$\Rightarrow L[\text{Hopf link}] + \delta = z(a + a^{-1})$$

$$\Rightarrow L[\text{Hopf link}] = -(a + a^{-1})z^{-1} + 1 + (a + a^{-1})z$$

Nodo trifoglio

$$L[\text{trifoglio}] + L[\text{trifoglio}] = z(L[\text{trifoglio}] + L[\text{trifoglio}])$$

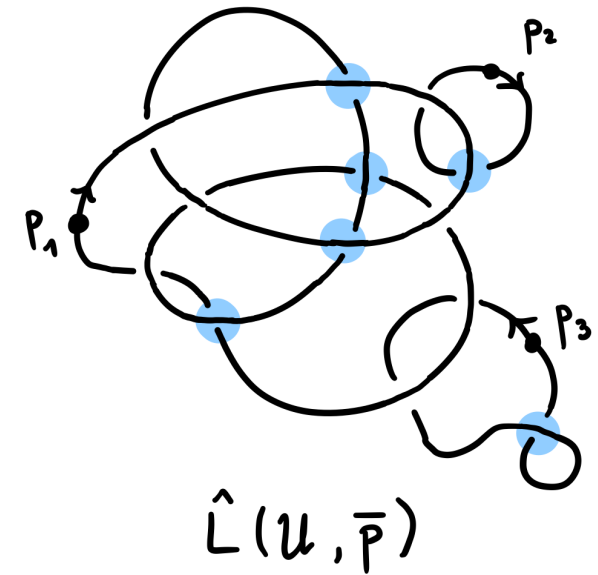
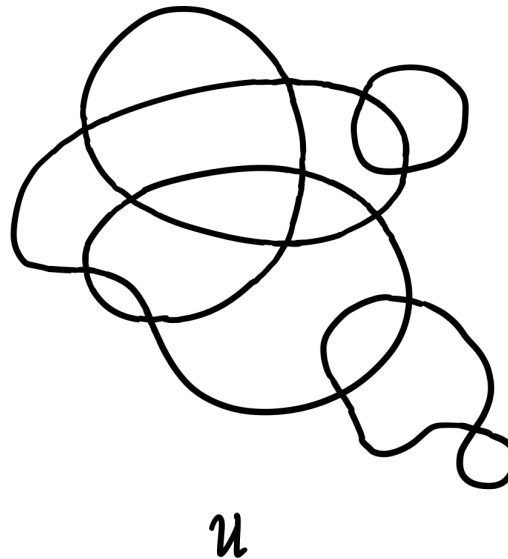
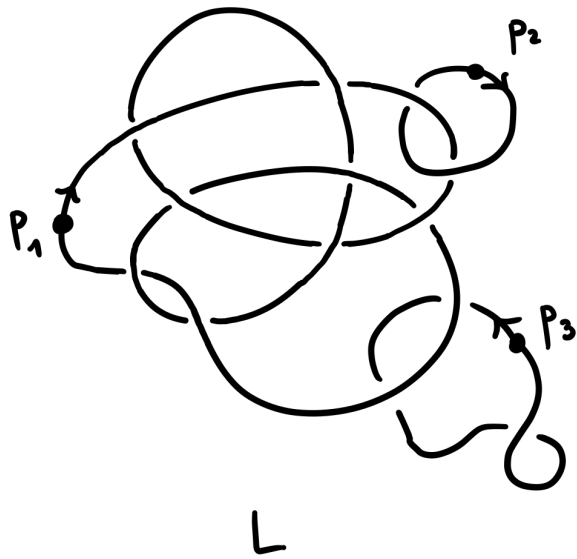
$$\Rightarrow L[\text{trifoglio}] + a = z(L[\text{Hopf link}] + a^{-2})$$

$$\Rightarrow L[\text{trifoglio}] = -(2a + a^{-1}) + (1 + a^{-2})z + (a + a^{-1})z^2$$



Considerazioni preliminari

Il **nodo banale standard** (o in *forma discendente*) associato K è $\hat{K}(\mathcal{U}, p)$:





Considerazioni preliminari

K un diagramma di un nodo, i etichetta di uno degli incroci

$$\begin{array}{cccc}
 \begin{array}{c} i \\ \diagup \diagdown \\ \diagdown \diagup \end{array} & \begin{array}{c} i \\ \diagdown \diagup \\ \diagup \diagdown \end{array} & \begin{array}{c} i \\ \frown \\ \smile \end{array} & \begin{array}{c} i \\ \big) \big(\end{array} \\
 K & S_i K & E_i K & e_i K
 \end{array}$$



Considerazioni preliminari

K un diagramma di un nodo, i etichetta di uno degli incroci

$$\begin{array}{cccc}
 \begin{array}{c} i \\ \diagup \quad \diagdown \\ \diagdown \quad \diagup \end{array} &
 \begin{array}{c} i \\ \diagdown \quad \diagup \\ \diagup \quad \diagdown \end{array} &
 \begin{array}{c} i \\ \frown \\ \smile \end{array} &
 \begin{array}{c} i \\ \big) \big(\end{array} \\
 K & S_i K & E_i K & e_i K
 \end{array}$$

$\lambda = (\lambda_n, \dots, \lambda_0)$ sequenza di etichette di incroci di K

$$A_i^\lambda := E_{\lambda_i} S_{\lambda_{i-1}} \cdots S_{\lambda_0} \quad B_i^\lambda := e_{\lambda_i} S_{\lambda_{i-1}} \cdots S_{\lambda_0}$$



Considerazioni preliminari

p punto base direzionato, λ una sequenza di scambi che porta K a $\hat{K}(p)$:

$$L[K] + L[S_0 K] = z(L[E_0 K] + L[e_0 K])$$



Considerazioni preliminari

p punto base direzionato, λ una sequenza di scambi che porta K a $\hat{K}(p)$:

$$L[K] + L[S_0 K] = z(L[E_0 K] + L[e_0 K])$$

$$L[S_0 K] + L[S_1 S_0 K] = z(L[E_1 S_0 K] + L[e_1 S_0 K])$$

$$\vdots$$



Considerazioni preliminari

p punto base direzionato, λ una sequenza di scambi che porta K a $\hat{K}(p)$:

$$L[K] + L[S_0 K] = z(L[E_0 K] + L[e_0 K])$$

$$L[S_0 K] + L[S_1 S_0 K] = z(L[E_1 S_0 K] + L[e_1 S_0 K])$$

$$\vdots$$

$$L[S_{n-1} \cdots S_0 K] + L[\hat{K}(p)] = z(L[E_n S_{n-1} \cdots S_0 K] + L[e_n S_{n-1} \cdots S_0 K])$$



Considerazioni preliminari

p punto base direzionato, λ una sequenza di scambi che porta K a $\hat{K}(p)$:

$$L[K] + L[S_0 K] = z(L[E_0 K] + L[e_0 K])$$

$$-(L[S_0 K] + L[S_1 S_0 K]) = -z(L[E_1 S_0 K] + L[e_1 S_0 K])$$

$$\vdots$$

$$(-1)^n (L[S_{n-1} \cdots S_0 K] + L[\hat{K}(p)]) = (-1)^n z(L[E_n S_{n-1} \cdots S_0 K] + L[e_n S_{n-1} \cdots S_0 K])$$



Considerazioni preliminari

p punto base direzionato, λ una sequenza di scambi che porta K a $\hat{K}(p)$:

$$L[K] + \cancel{L[S_0 K]} = z(L[E_0 K] + L[e_0 K])$$

$$-(\cancel{L[S_0 K]} + \cancel{L[S_1 S_0 K]}) = -z(L[E_1 S_0 K] + L[e_1 S_0 K])$$

$$\vdots$$

$$(-1)^n (\cancel{L[S_{n-1} \cdots S_0 K]} + L[\hat{K}(p)]) = (-1)^n z(L[E_n S_{n-1} \cdots S_0 K] + L[e_n S_{n-1} \cdots S_0 K])$$



Considerazioni preliminari

p punto base direzionato, λ una sequenza di scambi che porta K a $\hat{K}(p)$:

$$L[K] + \cancel{L[S_0 K]} = z(L[E_0 K] + L[e_0 K])$$

$$-(\cancel{L[S_0 K]} + \cancel{L[S_1 S_0 K]}) = -z(L[E_1 S_0 K] + L[e_1 S_0 K])$$

$$\vdots$$

$$(-1)^n (\cancel{L[S_{n-1} \cdots S_0 K]} + L[\hat{K}(p)]) = (-1)^n z(L[E_n S_{n-1} \cdots S_0 K] + L[e_n S_{n-1} \cdots S_0 K])$$

$$\Rightarrow L[K] + (-1)^n L[\hat{K}(p)] = z \sum_{i=0}^n (-1)^i (L[E_i S_{i-1} \cdots S_0 K] + L[e_i S_{i-1} \cdots S_0 K])$$



Considerazioni preliminari

p punto base direzionato, λ una sequenza di scambi che porta K a $\hat{K}(p)$:

$$L[K] + \cancel{L[S_0 K]} = z(L[E_0 K] + L[e_0 K])$$

$$-(\cancel{L[S_0 K]} + \cancel{L[S_1 S_0 K]}) = -z(L[E_1 S_0 K] + L[e_1 S_0 K])$$

$$\vdots$$

$$(-1)^n (\cancel{L[S_{n-1} \cdots S_0 K]} + L[\hat{K}(p)]) = (-1)^n z(L[E_n S_{n-1} \cdots S_0 K] + L[e_n S_{n-1} \cdots S_0 K])$$

$$\Rightarrow L[K] + (-1)^n L[\hat{K}(p)] = z \sum_{i=0}^n (-1)^i (L[A_i^\lambda K] + L[B_i^\lambda K])$$



Considerazioni preliminari

p punto base direzionato, λ una sequenza di scambi che porta K a $\hat{K}(p)$:

$$L[K] + \cancel{L[S_0 K]} = z(L[E_0 K] + L[e_0 K])$$

$$-(\cancel{L[S_0 K]} + \cancel{L[S_1 S_0 K]}) = -z(L[E_1 S_0 K] + L[e_1 S_0 K])$$

$$\vdots$$

$$(-1)^n (\cancel{L[S_{n-1} \cdots S_0 K]} + L[\hat{K}(p)]) = (-1)^n z(L[E_n S_{n-1} \cdots S_0 K] + L[e_n S_{n-1} \cdots S_0 K])$$

$$\Rightarrow L[K] = (-1)^{n+1} L[\hat{K}(p)] + z \sum_{i=0}^n (-1)^i (L[A_i^\lambda K] + L[B_i^\lambda K])$$



Considerazioni preliminari

p punto base direzionato, λ una sequenza di scambi che porta K a $\hat{K}(p)$:

$$L[K] + \cancel{L[S_0 K]} = z(L[E_0 K] + L[e_0 K])$$

$$-(\cancel{L[S_0 K]} + \cancel{L[S_1 S_0 K]}) = -z(L[E_1 S_0 K] + L[e_1 S_0 K])$$

$$\vdots$$

$$(-1)^n (\cancel{L[S_{n-1} \cdots S_0 K]} + L[\hat{K}(p)]) = (-1)^n z(L[E_n S_{n-1} \cdots S_0 K] + L[e_n S_{n-1} \cdots S_0 K])$$

$$\Rightarrow L[K] = (-1)^{|\lambda(q)|+1} L[\hat{K}(p)] + z \sum_K (\lambda) \quad \left(\sum_K (\lambda) := \sum_{i=0}^n (-1)^i (L[A_i^\lambda K] + L[B_i^\lambda K]) \right)$$



Definizione induttiva

Def (induttiva di L_K). Il polinomio $L_K(a, z)$ è definito induttivamente come segue:

- i) Se K è in *forma discendente*: $L_K(a, z) := a^{w(K)}$
- ii) Se $K = K_1 \cup K_2$: $L(K_1 \cup K_2) := \delta L(K_1)L(K_2)$ (con $\delta := \frac{a+1/a}{z} - 1$)
- iii) Altrimenti $K = K_1 \cup \dots \cup K_n$:

$$\text{a) Se } n > 1: L_K(a, z) := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left((-1)^{|\lambda(p_i)|+1} \delta L_{K_i} L_{K-K_i} + z \sum_K (\lambda(p_i)) \right)$$

$$\text{b) Se } n = 1: L_K(a, z) := (-1)^{|\lambda(p)|+1} L[\hat{K}(p)] + z \sum_K (\lambda(p))$$



Definizione induttiva

Def (induttiva di L_K). Il polinomio $L_K(a, z)$ è definito induttivamente come segue:

- i) Se K è in *forma discendente*: $L_K(a, z) := a^{w(K)}$
- ii) Se $K = K_1 \cup K_2$: $L(K_1 \cup K_2) := \delta L(K_1)L(K_2)$ (con $\delta := \frac{a+1/a}{z} - 1$)
- iii) Altrimenti $K = K_1 \cup \dots \cup K_n$:
 - a) Se $n > 1$: $L_K(a, z) := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left((-1)^{|\lambda(p_i)|+1} \delta L_{K_i} L_{K-K_i} + z \sum_K (\lambda(p_i)) \right)$
 - b) Se $n = 1$: $L_K(a, z) := (-1)^{|\lambda(p)|+1} L[\hat{K}(p)] + z \sum_K (\lambda(p))$



Definizione induttiva

Def (induttiva di L_K). Il polinomio $L_K(a, z)$ è definito induttivamente come segue:

- i) Se K è in *forma discendente*: $L_K(a, z) := a^{w(K)}$
- ii) Se $K = K_1 \cup K_2$: $L(K_1 \cup K_2) := \delta L(K_1)L(K_2)$ (con $\delta := \frac{a+1/a}{z} - 1$)
- iii) Altrimenti $K = K_1 \cup \dots \cup K_n$:

$$\text{a) Se } n > 1: L_K(a, z) := \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^n \sum_{q=p_i, \bar{p}_i} \left((-1)^{|\lambda(q)|+1} \delta L_{K_i} L_{K-K_i} + z \sum_K (\lambda(q)) \right)$$

$$\text{b) Se } n = 1: L_K(a, z) := \frac{1}{2} \sum_{q=p, \bar{p}} \left((-1)^{|\lambda(q)|+1} L_{\widehat{K}(q)} + z \sum_K (\lambda(q)) \right)$$



Ipotesi induttiva

Def (Ipotesi induttiva). Dimostreremo induttivamente le seguenti proprietà: per ogni diagramma di link K con $< N$ incroci e per diagrammi contenenti $\overline{\cup}$ con $< N$ incroci:

- a) L_K è ben definito (non dipende dalla scelta di punto base).
- b) L_K verifica gli assiomi:
 - $L[K] + L[S_i K] = z(L[e_i K] + L[E_i K])$
 - $L[\overline{\cup}] = aL[\frown], L[\overline{\cap}] = a^{-1}L[\smile]$
- c) L_K è invariante per mosse di tipo II e III che non aumentano il numero di incroci.
- d) Se K ammette una *funzione di slacciamento* allora $L_K = a^{w(K)}$



Dimostrazione buona definizione

Dimostrazione.

- a) L_K è ben definito (non dipende dalla scelta di punto base)
 - Invarianza $\sum_K(\lambda)$ per 1-rotazioni
 - Caso più componenti
 - Caso una sola componente
 - Splice di un nodo in forma discendente
 - Assiomi di L_K per nodi in forma discendente
- b) L_K verifica gli assiomi
- c) L_K è invariante per mosse di tipo II e III che non aumentano il numero di incroci
- d) Se K ammette una *funzione di slacciamento* allora $L_K = a^{w(K)}$



Indice

Teoria dei Nodi

Polinomio di Kauffman

Laboratorio Computazionale



Implementazione in Python

Implementazioni esistenti:

- **KnotScape**: scritto in C, degli anni ~1990.
- **KnotTheory**: ultimo aggiornamento ~2010, per Mathematica.



Implementazione in Python

Implementazioni esistenti:

- **KnotScape**: scritto in C, degli anni ~1990.
- **KnotTheory**: ultimo aggiornamento ~2010, per Mathematica.

Per il progetto di Lab. Comp. abbiamo scritto una **nuova implementazione** in *Python* open source:

- Rappresentazione di nodi attraverso **codici PD** e **SG**.
- Algoritmo per il calcolo di L_K e F_K .



Implementazione in Python

Implementazioni esistenti:

- **KnotScape**: scritto in C, degli anni ~1990.
- **KnotTheory**: ultimo aggiornamento ~2010, per Mathematica.

Per il progetto di Lab. Comp. abbiamo scritto una **nuova implementazione** in *Python* open source:

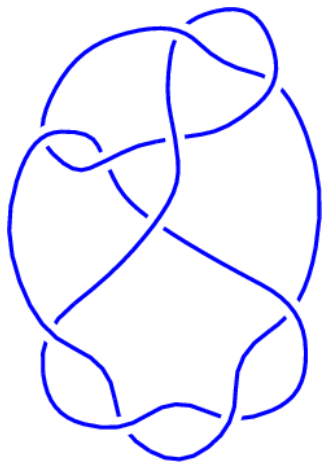
- Rappresentazione di nodi attraverso **codici PD** e **SG**.
- Algoritmo per il calcolo di L_K e F_K .
- Verifica di tutti i polinomi contenuti nel **database di KnotInfo**.
- *Trovato un errore nel nodo 10_{125} , c'è $F[10_{125}]$ invece di $F[10_{125}]$ ovvero $F_{10_{125}}(1/a, z)$.*



Implementazione in Python

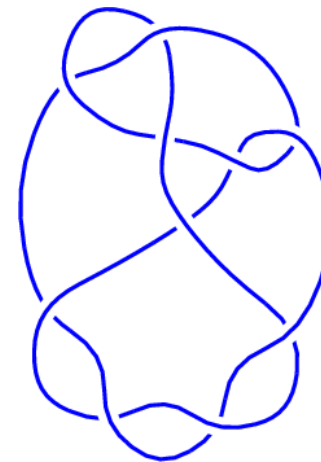
Polinomio corretto

$$\begin{aligned}
 F[10_{125}] = & z^8 \left(\frac{1}{a^2} + 1 \right) + z^7 \left(a + \frac{2}{a} + \frac{1}{a^3} \right) + z^6 \left(-6 - \frac{6}{a^2} \right) \\
 & + z^5 \left(-5a - \frac{11}{a} - \frac{6}{a^3} \right) + z^4 \left(2a^2 + 13 + \frac{11}{a^2} \right) \\
 & + z^3 \left(a^3 + 8a + \frac{17}{a} + \frac{10}{a^3} \right) + z^2 \left(a^4 - 6a^2 - 15 - \frac{8}{a^2} \right) \\
 & + z \left(a^5 - a^3 - 6a - \frac{8}{a} - \frac{4}{a^3} \right) + 3a^2 + 7 + \frac{3}{a^2}
 \end{aligned}$$



Polinomio in KnotInfo

$$\begin{aligned}
 F[m(10_{125})] = & z^8 (a^2 + 1) + z^7 \left(a^3 + 2a + \frac{1}{a} \right) + z^6 (-6a^2 - 6) \\
 & + z^5 \left(-6a^3 - 11a - \frac{5}{a} \right) + z^4 \left(11a^2 + 13 + \frac{2}{a^2} \right) \\
 & + z^3 \left(10a^3 + 17a + \frac{8}{a} + \frac{1}{a^3} \right) + z^2 \left(-8a^2 - 15 - \frac{6}{a^2} + \frac{1}{a^4} \right) \\
 & + z \left(-4a^3 - 8a - \frac{6}{a} - \frac{1}{a^3} + \frac{1}{a^5} \right) + 3a^2 + 7 + \frac{3}{a^2}
 \end{aligned}$$





Grazie per l'attenzione