



UNIVERSITÀ DI PISA

Dipartimento di Matematica
Corso di Laurea Triennale in Matematica

Tesi di Laurea

Il polinomio di Kauffman: un invariante di isotopia regolare

Relatore:
Prof. Paolo Lisca

Candidato:
Antonio De Lucreziis

Anno Accademico 2024/2025

Il polinomio di Kauffman: un invariante di isotopia regolare

ANTONIO DE LUCREZIIS

Abstract. In questa tesi tratteremo del polinomio di Kauffman, un invariante di nodi e link per di isotopia regolare. Introduciamo dei risultati di fondazione della teoria dei nodi per definire l'isotopia regolare. Infine vedremo la dimostrazione della buona definizione del polinomio di Kauffman a partire dalla forma assiomatica. Inoltre per il progetto di Laboratorio Computazionale abbiamo implementato in Python questo polinomio e verificato tutti i valori presenti nel database di KnotInfo e trovato un errore nel calcolo del nodo 10_{125} .

Indice

1. Introduzione	3
1.1. Introduzione alla Teoria dei Nodi	4
1.2. Proiezioni e Diagrammi	6
1.3. Operazioni su Diagrammi	8
2. Isotopia Regolare	9
3. Polinomio di Kauffman	11
3.1. Definizione assiomatica	11
3.2. Alcune proprietà del polinomio di Kauffman	12
3.3. Dimostrazione Forma Induttiva	14
4. Bibliografia	17

Capitolo 1

Introduzione

In questa tesi studieremo un invariante di isotopia regolare chiamato polinomio di Kauffman [1]. Intuitivamente se l'isotopia ambiente è l'equivalenza tra diagrammi generata dalle mosse I, II e III di Reidemeister, l'isotopia regolare è l'equivalenza generata solo dalle mosse II e III.

Il disegno è da rifare

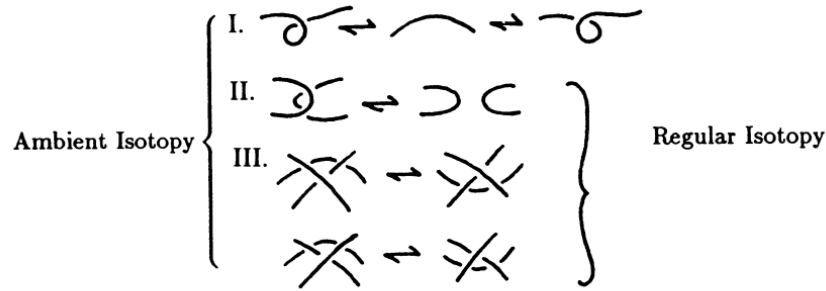


FIGURE 1. Reidemeister moves

Dato un nodo o link non orientato K , possiamo definire in forma assiomatica il polinomio $L_K(a, z) \in \mathbb{Z}[a, a^{-1}, z, z^{-1}]$ attraverso i seguenti assiomi:

- i) Se K, K' sono equivalenti a meno di isotopia regolare, allora $L_K(a, z) = L_{K'}(a, z)$.
- ii) Valgono le seguenti relazioni skein

- $L(\text{X}) + L(\text{X}) = z(L(\text{Y}) + L(\text{Z}))$
- $L(\bigcirc) = 1$
- $L(\text{D}) = aL(\text{A})$
- $L(\text{D}) = a^{-1}L(\text{A})$

Vedremo come questi assiomi definiscono un unico invariante di isotopia regolare ben definito e come $L_K(a, z)$ può essere generalizzato a un invariante di isotopia ambiente $F_K(a, z)$ utilizzando il writhe di un nodo.

1.1. Introduzione alla Teoria dei Nodi

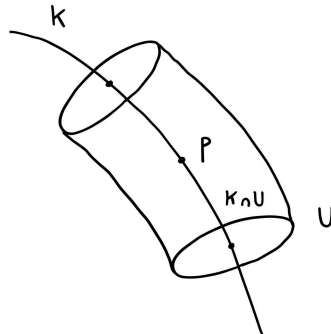
Ora introdurremo alcuni risultati fondamentali di teoria dei nodi tra cui le definizioni di nodo e link ed alcuni risultati di fondazione che ci serviranno per poter parlare ad esempio dei diagrammi planari e dell'isotopia regolare.

Definizione. Dati X, Y spazi topologici, $f : X \rightarrow Y$ continua si dice **embedding** se X è omeomorfo a $f(X) \subset Y$ con la topologia di sottospazio indotta da Y .

Fatto. Dati X, Y spazi topologici con X compatto, Y di Hausdorff e data un'applicazione continua $f : X \rightarrow Y$ allora f è un embedding $\Leftrightarrow$ è iniettiva.

Definizione. Dato un embedding $f : X \rightarrow Y$, un punto $p \in X$ allora f si dice **localmente piatto** in p se $\exists U \subset \mathbb{R}^3$ intorno di p , tale che

$$\begin{aligned} U &\approx \mathbb{D}^2 \times [0, 1] \\ U \cap K &\leftrightarrow \{0\} \times [0, 1] \end{aligned}$$



inoltre f si dice **localmente piatto** (ovunque) se lo è in ogni punto di X .

Definizione. Un **nodo tame** è un sottoinsieme $K \subset \mathbb{R}^3$ per cui esiste un embedding $f : \mathbb{S}^1 \hookrightarrow \mathbb{R}^3$ localmente piatto con $K = f(\mathbb{S}^1)$. In questo caso f è anche detto **embedding tame**.

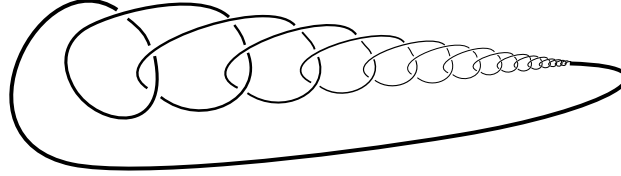


FIGURE 2. Un esempio di nodo non tame

Esistono anche nodi non tame come il precedente, ma d'ora in avanti considereremo solo nodi tame.

Definizione. Due nodi $K_0, K_1 \subset \mathbb{R}^3$ sono **equivalenti** se esiste un'**isotopia ambiente** H che porta uno nell'altro, ovvero esiste $H : \mathbb{R}^3 \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$ applicazione continua, tale che

- $\forall t \in [0, 1], H(\cdot, t)$ è un omeomorfismo

e ponendo $H_t(x) := H(x, t)$:

- $H_0 = \text{id}_{\mathbb{R}^3}$
- $H_1(K_0) = K_1$

Inoltre se due nodi sono equivalenti allora vale che $\mathbb{R}^3 \setminus K_0 \approx \mathbb{R}^3 \setminus K_1$.

Spesso serve fare manipolazioni direttamente sui nodi o sui diagrammi e lavorare con gli embedding $\mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{R}^3$ non è molto comodo da un punto di vista formale, per questo motivo introduciamo i *nodi poligonal* che ci permettono di dare una formalizzazione alternativa dei nodi tame più operativa.

Definizione. Un **nodo poligonale** è un nodo equivalente ad un'unione finita di segmenti lineari.

Fatto – Crowell [2]. Dato un nodo $K \subset \mathbb{R}^3$, K è tame $\Leftrightarrow K$ è poligonale.

Definizione. Il **nodo banale** è la classe di equivalenza del bordo di un triangolo equilatero.

Passiamo ora al caso in cui abbiamo un nodo con più di una componente

l'immagine sotto è presa da wikipedia, aggiungere una citazione?

Definizione. $L \subset \mathbb{R}^3$ è detto **link** se $\exists$ embedding $f : \mathbb{S}^1 \cup \dots \cup \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{R}^3$ local-mente piatto con immagine L .

Possiamo generalizzare tutte le definizioni che diamo per i nodi ai link, sostituendo $\mathbb{S}^1$ con $\mathbb{S}^1 \cup \dots \cup \mathbb{S}^1$ con le opportune modifiche.

Introduciamo ora il concetto di equivalenza combinatoria di link poligonal in $\mathbb{R}^3$, questo è il primo passo che ci permette di descrivere l'equivalenza tra nodi attraverso sequenza finita di mosse.

Definizione. Due link L_1, L_2 sono **combinatorialmente equivalenti** se si ottengono uno dall'altro tramite un numero finito delle seguenti mosse:

- i) Aggiunta/rimozione di vertici

TODO

disegno 1

- ii) Dato un triangolo piano $\Delta \subset \mathbb{R}^3$ tale che $\Delta \cap L$ sia un lato di Δ ed un segmento di L allora una Δ -mossa è la seguente

TODO

disegno 2

Fatto. Due link poligonal $L_1, L_2 \subset \mathbb{R}^3$ sono equivalenti $\Leftrightarrow$ sono combinatorialmente equivalenti.

1.2. Proiezioni e Diagrammi

Data una direzione $v \in \mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$, possiamo definire $\pi_v : \mathbb{R}^3 \rightarrow v^\perp$ proiezione sul piano ortogonale a v come segue

TODO

disegno

Per formalizzare il concetto di diagramma di un nodo introdurremo il concetto di proiezione regolare, ovvero una proiezione in cui i punti di intersezione tra le immagini dei segmenti di L sono solamente gli incroci (punti doppi) del nodo (e senza segmenti paralleli alla direzione di proiezione).

Definizione. Sia $L \subset \mathbb{R}^3$ un link, $v \in \mathbb{S}^2$ una direzione e $\pi_v : \mathbb{R}^3 \rightarrow v^\perp$ la proiezione su $v^\perp$ come in precedenza. Allora un punto $x \in \pi(L) \subset v^\perp$ si dice

- **regolare** se $|\pi^{-1}(x)| = 1$
- **singolare** se $|\pi^{-1}(x)| > 1$
- **doppio** se $|\pi^{-1}(x)| = 2$

Fatto. Dato un link poligonale $L \subset \mathbb{R}^3$, esiste un aperto denso $U \subset \mathbb{S}^2$ tale che $\forall v \in U, \pi_v(L)$ soddisfa

- i) L non ha segmenti paralleli a v .
- ii) Se $x \in \pi_v(L)$ è singolare allora
 - $\pi_v^{-1}(x)$ non contiene vertici di L
 - x è un punto doppio
 - x è di intersezione trasversa delle immagini di due segmenti

Quindi dato $L \subset \mathbb{R}^3$ link poligonale, esiste una proiezione regolare $\pi(L) \subset \mathbb{R}^2$, ovvero una con un numero finito di punti singolari, ciascuno dei quali è un punto doppio e di intersezione trasversa. Ognuno di questi punti doppi viene detto **incrocio**.

Definizione. Un **diagramma** $D \subset \mathbb{R}^2$ di un link $L \subset \mathbb{R}^3$ è l'immagine di L attraverso una proiezione regolare decorata con l'informazione sopra/sotto ad ogni incrocio.

Fatto. Due link con stesso diagramma sono equivalenti.

Definizione. L'insieme di isotopie planari e le mosse I, II, III (e loro inverse) sono le **mosse di Reidemeister**.

Teorema 1.1. Due diagrammi di link equivalenti sono collegati da una successione finita di isotopie planari e mosse di Reidemeister.

TODO

Varie considerazioni sul teorema di Reidemeister

Come abbiamo generalizzato nodi a link possiamo ripetere tutto anche aggiungendo un'orientazione e studiare **nodi e link orientati** ed abbiamo anche una variante orientata del teorema di Reidemeister.

1.3. Operazioni su Diagrammi

Definizione. Dato un link $L \subset \mathbb{R}^3$ possiamo definire

- Il **mirror** $m(L) := \rho(L)$ dove $\rho : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ è la riflessione rispetto al piano di proiezione. In particolare dato un diagramma, il suo mirror è lo stesso diagramma con tutte le informazioni sopra/sotto scambiate.

inoltre, se diamo anche un'*orientazione* ad L possiamo definire

- Il **reverse** $r(L)$, in cui prendiamo l'orientazione opposta su ogni componente.
- L'**inverso** $-L := m(r(L)) = r(m(L))$.

Definizione. Se $K \subset \mathbb{R}^3$ e K non è equivalente a $m(K)$ allora diciamo che K è **chirale**, altrimenti è detto **anfichirale**.

Capitolo 2

Isotopia Regolare

TODO

Aggiungere più commenti

Il teorema di Reidemeister ci dice che se due nodi sono equivalenti a meno di isotopia allora lo sono anche i loro diagrammi a meno di isotopie planari e delle mosse I, II e III.

Possiamo chiederci cosa succede se ci restringiamo all'equivalenza generata solo dalle isotopie planari e dalle mosse II e III, questo ci dà una nuova equivalenza tra nodi più forte dell'isotopia ambiente.

Definizione. Due nodi o link K_1, K_2 si dicono equivalenti a meno di **isotopia regolare** se due loro diagrammi sono equivalenti a meno di isotopie planari e mosse II e III di Reidemeister.

TODO

Disegno con le mosse

Una prima cosa che possiamo notare è che tutte le mosse R1 possono essere “fattorizzate” in modo da averle tutte raggruppate insieme.

Magari aggiungere la dimostrazione di questa cosa

TODO

Altro disegno

Questo ci suggerisce un primo invariante di isotopia regolare per link orientati, per prima cosa introduciamo il segno di un incrocio.

Definizione. Dato un incrocio di un link orientato ci possono essere due casi

$$\varepsilon\left(\begin{array}{c} \nearrow \\ \searrow \end{array}\right) = +1 \quad \varepsilon\left(\begin{array}{c} \nwarrow \\ \swarrow \end{array}\right) = -1$$

Definizione. Dato K link orientato, il **writhe** $w(K)$ (o numero di avvolgimento) è dato dalla somma dei segni dei suoi crossing

$$w(K) := \sum_c \varepsilon(c)$$

Proposizione 2.1. Il writhe non dipende dall'orientazione del link

Proposizione 2.2. Il writhe è un invariante di isotopia regolare, ovvero se K_1, K_2 sono equivalenti a meno di isotopia regolare allora $w(K_1) = w(K_2)$.

TODO

Esempi di calcolo del writhe

Un primo fatto generale che possiamo osservare è che dato un invariante di isotopia regolare con certe proprietà, possiamo costruire un invariante di isotopia ambiente aggiungendo un fattore di correzione dato dal writhe.

Proposizione 2.3. Sia R un anello, $a \in R$ un elemento invertibile e K un link orientato, allora se $L(K) \in R$ è un invariante di isotopia regolare tale che

$$L\left(\begin{array}{c} \nearrow \\ \searrow \end{array}\right) = aL\left(\begin{array}{c} \nearrow \\ \nearrow \end{array}\right) \quad L\left(\begin{array}{c} \nwarrow \\ \swarrow \end{array}\right) = a^{-1}L\left(\begin{array}{c} \nwarrow \\ \nwarrow \end{array}\right)$$

allora $F(K) := a^{-w(K)}L(K)$ è un invariante di isotopia ambiente.

Capitolo 3

Polinomio di Kauffman

3.1. Definizione assiomatica

Vediamo ora la definizione del polinomio di Kauffman.

Definizione. Dato K un link non orientato, $L_K \in \mathbb{Z}[a, a^{-1}, z, z^{-1}]$, ovvero i polinomi di Laurent sugli interi nelle variabili a e z , e verifica i seguenti assiomi:

- i) Se K, K' sono equivalenti a meno di isotopia regolare, allora $L_K = L_{K'}$.
- ii) Valgono le seguenti relazioni skein per quaterne di diagrammi identici ovunque tranne che nei punti indicati

- $L(\text{X}) + L(\text{Y}) = z(L(\text{Z}) + L(\text{W}))$
- $L(\bigcirc) = 1$
- $L(\text{D}) = aL(\text{A})$
- $L(\text{D}) = a^{-1}L(\text{A})$

Come già anticipato in precedenza, vedremo che questo è un invariante di isotopia regolare e può essere generalizzato ad invariante di isotopia ambiente come segue

Definizione. Definiamo $F_K \in Z[a, a^{-1}, z, z^{-1}]$ per diagrammi orientati K come

$$F_K := a^{-w(K)} L_K$$

dove L_K di un diagramma orientato è definito dimenticando l'orientazione.

Proposizione 3.4. Il polinomio $F_K(a, z)$ è un invariante di isotopia ambiente

Dimostrazione. Segue dalla Proposizione 3. □

3.2. Alcune proprietà del polinomio di Kauffman

Lemma 3.5. Sia K un link orientato e $m(K)$ il suo mirror. Allora abbiamo la seguente relazione per L e F

$$L_{m(K)}(a, z) = L_K(1/a, z) \quad F_{m(K)}(a, z) = F_K(1/a, z)$$

Dimostrazione. $m(K)$ è ottenuto da K scambiando tutti i suoi crossing quindi se analizziamo cosa succede nei vari assiomi solo vicino ad un certo incrocio otteniamo le seguenti relazioni

$$\begin{aligned} L(m(\bigcirc)) &= L(\bigcirc) = 1 \\ L(m(\overline{\mathcal{O}})) &= L(\overline{\mathcal{O}}) = a^{-1}L(\neg) \\ L(m(\overline{\mathcal{O}})) &= L(\overline{\mathcal{O}}) = aL(\neg) \end{aligned}$$

ed infine l'ultima relazione rimane invariata per la simmetria del polinomio di Kauffman

$$\begin{aligned} L(m(\times)) + L(m(\times)) &= z(L(m(\smile)) + L(m(\smile))) \\ \Rightarrow L(\times) + L(\times) &= z(L(\smile) + L(\smile)) \\ \Rightarrow L(\times) + L(\times) &= z(L(\smile) + L(\smile)) \end{aligned}$$

quindi passare al mirror ha l'effetto di scambiare solamente a con a^{-1} ma il resto della valutazione rimane identico.

Infine per $F_{m(K)}$ basta osservare che $w(m(K)) = -w(K)$ per una motivazione analoga. $\square$

Prima di passare alla dimostrazione della buona definizione vediamo alcuni esempi di calcolo di L_K in modo “implicito”, questo può essere fatto scegliendo accuratamente per quali diagrammi valutare le relazioni skein degli assiomi.

Ad esempio proviamo a ricavare il valore di $L(\bigcirc\bigcirc)$

$$\begin{aligned} L \text{ (crossing) } + L \text{ (crossing) } &= z(L \text{ (cup) } + L \text{ (cap) }), \\ aL \text{ (cup) } + a^{-1}L \text{ (cap) } &= z(\delta + L \text{ (cup) }), \delta = L \text{ (crossing) }, \\ \Rightarrow \delta &= (a + a^{-1})z^{-1} - 1, \end{aligned}$$

Tutte le immagini qua sotto sono temporanee e devo rifarle

Questo valore $\delta = (a + 1/a)/z - 1$ ricomparirà anche in seguito ed è il coefficiente che il polinomio di Kauffman introduce quando abbiamo un link con due componenti disgiunte. Possiamo anche trovare il valore del link di Hopf come segue

$$\begin{aligned} L \text{ (Hopf) } + L \text{ (Hopf) } &= z(L \text{ (cup) } + L \text{ (cap) }), \\ \lambda + \delta &= z(a + a^{-1}), \lambda = L \text{ (crossing) }, \\ \lambda &= -(a + a^{-1})z^{-1} + 1 + (a + a^{-1})z, \end{aligned}$$

Ed del nodo trifoglio

$$\begin{aligned} L \text{ (trifoglio) } + L \text{ (trifoglio) } &= z(L \text{ (cup) } + L \text{ (cap) }), \\ \tau + a &= z(\lambda + a^{-2}), \tau = L \text{ (crossing) }, \\ \tau &= (-2a - a^{-1}) + (1 + a^{-2})z + (a + a^{-1})z^2. \end{aligned}$$

Definizione. Diremo che un diagramma è *split* se è l'unione disgiunta di due diagrammi separati, in questo caso scriviamo $K = K_1 \sqcup K_2$ dove K_1 e K_2 sono le due componenti disgiunte.

Definizione. Un diagramma K è una **somma connessa** se appare come due diagrammi disgiunti connessi da due archi paralleli (a meno di isotopie planari). Tagliando questi due archi e riunendo insieme le estremità dello stesso sotto-diagramma otteniamo un nuovo diagramma *split* $\tilde{K} = K_1 \sqcup K_2$, in questo caso chiamiamo la somma connessa $K = K_1 \# K_2$.

Proposizione 3.6. Valgono le seguenti relazioni di L ed F per diagrammi split o in somma connessa

$$\begin{aligned} L(K_1 \sqcup K_2) &= \delta L(K_1)L(K_2) & F(K_1 \sqcup K_2) &= \delta F(K_1)F(K_2) \\ L(K_1 \# K_2) &= L(K_1)L(K_2) & F(K_1 \# K_2) &= F(K_1)F(K_2) \end{aligned}$$

dove $\delta = (a + a^{-1})/z - 1$ ed è lo stesso coefficiente che abbiamo trovato nell'esempio precedente.

3.3. Dimostrazione Forma Induttiva

Prima di passare a descrivere la definizione induttiva diamo alcune definizioni di manipolazioni di un diagramma.

Definizione. Sia K un diagramma, U la sua ombra planare¹ e $p \in U$ un punto di partenza direzionato in U .

- Il suo **nodo banale standard** associato detto $\hat{K}(U, p)$ è definito come segue:

TODO

Disegno standard unknot

- TODO

Operazioni compatte A_i^λ e B_i^λ

- TODO

Operazione compatta $\sum_K(\lambda)$

¹Ovvero per $K \subset \mathbb{R}^3$ poniamo $U := \pi(K) \subset \mathbb{R}^2$

L'idea per la definizione induttiva è di considerare dato un nodo o un link K il suo nodo o link discendente standard $\hat{K}$. Questo induce una sequenza di indici λ che indichiamo con $0, \dots, n$. Se la applichiamo incrementalmente a K otteniamo le seguenti relazioni

$$\begin{aligned} L_K + L_{S_0 K} &= z(L_{E_0 K} + L_{e_0 K}) \\ L_{S_0 K} + L_{S_1 S_0 K} &= z(L_{E_0 S_0 K} + L_{e_0 S_0 K}) \\ &\vdots \\ L_{S_{n-1} \dots S_0 K} + L_{\hat{K}} &= z(L_{E_n S_{n-1} \dots S_0 K} + L_{e_n S_{n-1} \dots S_0 K}) \end{aligned}$$

se ora sommiamo e sottraiamo membro a membro otteniamo la seguente identità

$$\begin{aligned} L_K + L_{S_0 K} & & z(L_{E_0 K} + L_{e_0 K}) \\ - (L_{S_0 K} + L_{S_1 S_0 K}) & & - z(L_{E_0 S_0 K} + L_{e_0 S_0 K}) \\ \vdots & = & \vdots \\ + (-1)^n (L_{S_{n-1} \dots S_0 K} + L_{\hat{K}}) & & + (-1)^n (z(L_{E_n S_{n-1} \dots S_0 K} + L_{e_n S_{n-1} \dots S_0 K})) \\ L_K + \cancel{L_{S_0 K}} & & z(L_{E_0 K} + L_{e_0 K}) \\ - (\cancel{L_{S_0 K}} + \cancel{L_{S_1 S_0 K}}) & & - z(L_{E_0 S_0 K} + L_{e_0 S_0 K}) \\ \vdots & = & \vdots \\ + (-1)^n (\cancel{L_{S_{n-1} \dots S_0 K}} + L_{\hat{K}}) & & + (-1)^n (z(L_{E_n S_{n-1} \dots S_0 K} + L_{e_n S_{n-1} \dots S_0 K})) \end{aligned}$$

Da cui otteniamo che

$$\Rightarrow L_K = (-1)^{n+1} L_{\hat{K}} + z \sum_{i=0}^n (-1)^i (L_{E_n S_{n-1} \dots S_0 K} + L_{e_n S_{n-1} \dots S_0 K}) \quad (1)$$

Questo ci dà un'idea su come sia possibile calcolare induttivamente L_K in termini di $L_{\hat{K}}$ e di altri diagrammi con meno incroci del diagramma di partenza.

Affinché sia sempre possibile raggiungere un nodo banale in forma standard serve aggiungere anche la seguente relazione quando abbiamo $K = K_1 \sqcup K_2$ con K_1 che sovrasta K_2

$$L_{K_1 \sqcup K_2} = \delta L_{K_1} L_{K_2} \quad (2)$$

sempre con $\delta = (a + a^{-1})/z - 1$.

Definizione. Il polinomio $L_K(a, z)$ è definito induttivamente con i seguenti casi

i) Se $K = \hat{K}$ è un *nodo banale standard* allora $L_K(a, z) := a^{w(K)}$

ii) Se K_1 è *sovrastante* K_2 , sia $d := (a + a^{-1})/z - 1$ e allora

$$L(K_1 \sqcup K_2) := dL(K_1)L(K_2)$$

iii) Se $K = K_1 \sqcup \dots \sqcup K_n$

- Se un K_i è *sovrastante* un'altra componente allora applica (ii).
- Se nessun K_i è *sovrastante* tutti gli altri, siano $p_1, \dots, p_n$ dei punti di partenza direzionati su $K_1, \dots, K_n$ e sia $\bar{p}_i$ lo stesso punto di partenza direzionato con la direzione opposta di p_i su K_i . Sia $\lambda(p_i)$ la sequenza di scambi di incroci di K_i con $K - K_i$ tale che $\hat{K}(\lambda(p_i)) = K_i \sqcup (K - K_i)$ tale che K_i sia *sovrastante* il resto delle componenti. A questo punto possiamo definire L_K come

$$L_K(a, z) := \frac{1}{2n} \left[\sum_{i=1}^n \sum_{q=p_i, \bar{p}_i} \left((-1)^{|\lambda(q)|+1} dL_{K_i}L_{K-K_i} + z \sum_K (\lambda(q)) \right) \right]$$

- Se K è una singola componente allora sia p un punto di partenza direzionato su K e $\bar{p}$ quello con direzione opposta. Sia $\lambda(p)$ la sequenza di scambi di incroci che lo porta al nodo banale standard $\hat{K}$ e definiamo

$$L_K(a, z) := \frac{1}{2} \left[\sum_{q=p, \bar{p}} \left((-1)^{|\lambda(q)|+1} L(\hat{K}(\lambda(q))) + z \sum_K (\lambda(q)) \right) \right]$$

Bibliografia

- [1] L. H. Kauffman, “An invariant of regular isotopy,” *Trans. Am. Math. Soc.*, vol. 318, no. 2, pp. 417–471, 1990.
- [2] R. Crowell and R. Fox, *Introduction to Knot Theory*. in Ecological Studies. Springer New York, 1977. [Online]. Available: https://books.google.it/books?id=_1HvAAAAMAAJ