



UNIVERSITÀ DI PISA

---

Dipartimento di Matematica  
Corso di Laurea Triennale in Matematica

Tesi di Laurea

# **Il polinomio di Kauffman: un invariante di isotopia regolare**

Relatore:  
**Prof. Paolo Lisca**

Candidato:  
**Antonio De Lucreziis**

---

Anno Accademico 2024/2025

## Abstract

In questa tesi tratteremo del polinomio di Kauffman, un invariante di nodi e link per di isotopia regolare. Introduciamo dei risultati di fondazione della teoria dei nodi per definire l'isotopia regolare. Infine vedremo la dimostrazione della buona definizione del polinomio di Kauffman a partire dalla forma assiomatica. Inoltre per il progetto di Laboratorio Computazionale abbiamo implementato in Python questo polinomio e verificato tutti i valori presenti nel database di KnotInfo e trovato un errore nel calcolo del nodo  $10_{125}$ .

## Indice

1. Introduzione .....	3
1.1. Introduzione alla Teoria dei Nodi .....	4
1.2. Proiezioni e Diagrammi .....	7
1.3. Operazioni su Diagrammi .....	9
2. Isotopia Regolare .....	10
3. Polinomio di Kauffman .....	11
3.1. Definizione assiomatica .....	11
3.2. Alcune proprietà del polinomio di Kauffman .....	11
3.3. Dimostrazione Forma Induttiva .....	11
4. Bibliografia .....	12

## Capitolo 1

# Introduzione

In questa tesi studieremo un invariante di isotopia regolare chiamato polinomio di Kauffman [1]. Intuitivamente se l'isotopia ambiente è l'equivalenza tra diagrammi generata dalle mosse I, II e III di Reidemeister, l'isotopia regolare è l'equivalenza generata solo dalle mosse II e III.

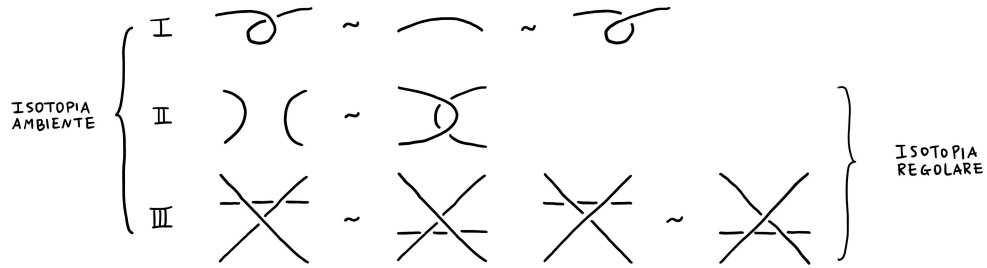


FIGURE 1. Mosse di Reidemeister

Dato un nodo o link non orientato  $K$ , possiamo definire in forma assiomatica il polinomio  $L_K(a, z) \in \mathbb{Z}[a, a^{-1}, z, z^{-1}]$  attraverso i seguenti assiomi:

- i) Se  $K, K'$  sono equivalenti a meno di isotopia regolare, allora  $L_K(a, z) = L_{K'}(a, z)$ .
- ii) Valgono le seguenti relazioni skein:

$$\bullet \quad L\left(\begin{array}{c} \diagup \diagdown \\ \diagdown \diagup \end{array}\right) + L\left(\begin{array}{c} \diagdown \diagup \\ \diagup \diagdown \end{array}\right) = z\left(L\left(\begin{array}{c} \frown \\ \smile \end{array}\right) + L\left(\begin{array}{c} \cup \\ \cap \end{array}\right)\right)$$

- $L(\bigcirc) = 1$
- $L(\overline{\bigcirc}) = aL(\frown)$
- $L(\overline{\bigcirc}) = a^{-1}L(\smile)$

Vedremo come questi assiomi definiscono un unico invariante di isotopia regolare ben definito e come  $L_K(a, z)$  può essere generalizzato a un invariante di isotopia ambiente  $F_K(a, z)$  utilizzando il *writhe* di un nodo.

## 1.1. Introduzione alla Teoria dei Nodi

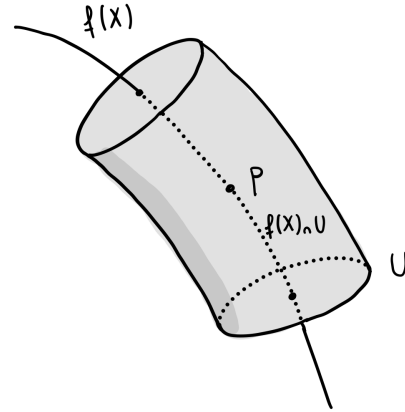
Ora introdurremo alcuni risultati fondamentali di teoria dei nodi. Vedremo le definizioni di nodo e link ed alcuni risultati di fondazione che ci serviranno per poter parlare ad esempio dei diagrammi planari e dell'isotopia regolare.

**Definizione.** Dati  $X, Y$  spazi topologici,  $f : X \rightarrow Y$  continua si dice **embedding** se  $X$  è omeomorfo a  $f(X) \subset Y$  con la topologia di sottospazio indotta da  $Y$ .

**Fatto.** Dati  $X, Y$  spazi topologici con  $X$  compatto,  $Y$  di Hausdorff e data un'applicazione continua  $f : X \rightarrow Y$  allora  $f$  è un embedding  $\Leftrightarrow$  è iniettiva.

**Definizione.** Dato un embedding  $f : X \rightarrow Y$ , un punto  $p \in X$  allora  $f$  si dice **localmente piatto** in  $p$  se  $\exists U \subset \mathbb{R}^3$  intorno di  $p$ , tale che

$$\begin{aligned} U &\approx \mathbb{D}^2 \times [0, 1] \\ U \cap f(X) &\leftrightarrow \{0\} \times [0, 1] \end{aligned}$$



inoltre  $f$  si dice embedding **localmente piatto** se lo è in ogni punto di  $X$ .

**Definizione.** Un **nodo tame** è un sottoinsieme  $K \subset \mathbb{R}^3$  per cui esiste un embedding  $f : S^1 \hookrightarrow \mathbb{R}^3$  localmente piatto con  $K = f(S^1)$ . In questo caso  $f$  è anche detto **embedding tame**.

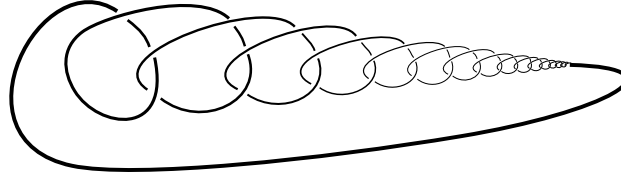


FIGURE 2. Un esempio di nodo non tame

Esistono anche nodi non tame come quello riportato nella figura precedente [2], ma d'ora in avanti considereremo solo nodi tame.

**Definizione.** Due nodi  $K_0, K_1 \subset \mathbb{R}^3$  sono **equivalenti** se esiste un'**isotopia ambiente**  $H$  che porta uno nell'altro, ovvero esiste  $H : \mathbb{R}^3 \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$  applicazione continua, tale che

- $\forall t \in [0, 1], H(\cdot, t)$  è un omeomorfismo

e ponendo  $H_t(x) := H(x, t)$  si ha

- $H_0 = \text{id}_{\mathbb{R}^3}$
- $H_1(K_0) = K_1$

Inoltre se due nodi sono equivalenti allora vale che  $\mathbb{R}^3 \setminus K_0 \approx \mathbb{R}^3 \setminus K_1$ .

Spesso serve fare manipolazioni direttamente sui nodi o sui diagrammi e lavorare con gli embedding  $\mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{R}^3$  non è molto comodo da un punto di vista formale e pratico, per questo motivo introduciamo i *nodì poligonali* che ci permettono di dare una formalizzazione alternativa dei nodi tame più operativa.

**Definizione.** Un **nodo poligonale** è un nodo equivalente ad un'unione finita di segmenti lineari.

**Fatto – Crowell [3].** Dato un nodo  $K \subset \mathbb{R}^3$ ,  $K$  è tame  $\Leftrightarrow K$  è poligonale.

**Definizione.** Il **nodo banale** è la classe di equivalenza del bordo di un triangolo equilatero.

Passiamo ora al caso in cui abbiamo un nodo con più di una componente

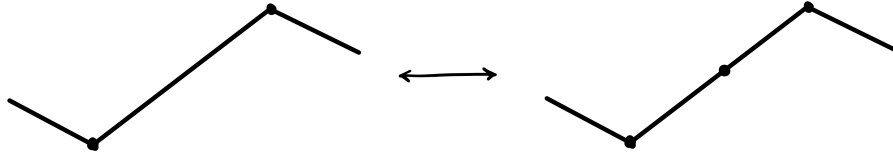
**Definizione.**  $L \subset \mathbb{R}^3$  è detto **link** se  $\exists$  embedding  $f : \mathbb{S}^1 \cup \dots \cup \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{R}^3$  localmente piatto con immagine  $L$ .

Possiamo generalizzare tutte le definizioni che diamo per i nodi ai link, sostituendo  $\mathbb{S}^1$  con  $\mathbb{S}^1 \cup \dots \cup \mathbb{S}^1$  e apportando le giuste modifiche.

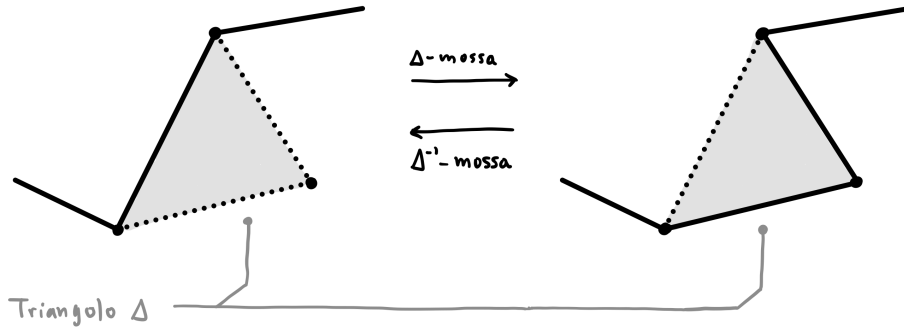
Introduciamo ora il concetto di equivalenza combinatoria di link poligonal in  $\mathbb{R}^3$ ; questo è il primo passo che ci permetterà di descrivere l'equivalenza per isotopia ambiente tra nodi attraverso una sequenza finita di mosse.

**Definizione.** Due link  $L_1, L_2$  sono **combinatorialmente equivalenti** se si ottengono uno dall'altro tramite un numero finito delle seguenti mosse:

- i) Aggiunta/rimozione di vertici



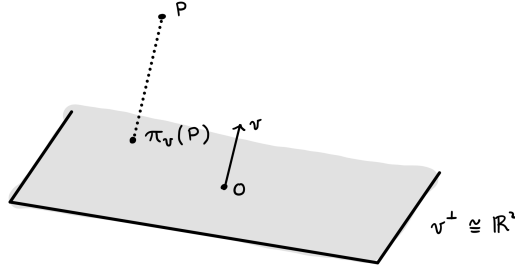
- ii) Dato un triangolo piano  $\Delta \subset \mathbb{R}^3$  tale che  $\Delta \cap L$  sia un lato di  $\Delta$  ed un segmento di  $L$  allora una  $\Delta$ -mossa è la seguente



**Fatto.** Due link poligonal  $L_1, L_2 \subset \mathbb{R}^3$  sono equivalenti  $\Leftrightarrow$  sono combinatorialmente equivalenti.

## 1.2. Proiezioni e Diagrammi

Data una direzione  $v \in \mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$ , possiamo definire  $\pi_v : \mathbb{R}^3 \rightarrow v^\perp$  proiezione sul piano ortogonale a  $v$  come nella seguente figura:



Per formalizzare il concetto di diagramma di un nodo introdurremo il concetto di proiezione regolare, ovvero una proiezione in cui i punti di intersezione tra le immagini dei segmenti di  $L$  sono solamente gli incroci del nodo (e senza segmenti paralleli alla direzione di proiezione).

**Definizione.** Sia  $L \subset \mathbb{R}^3$  un link,  $v \in \mathbb{S}^2$  una direzione e  $\pi_v : \mathbb{R}^3 \rightarrow v^\perp$  la proiezione su  $v^\perp$  come in precedenza. Allora un punto  $x \in \pi(L) \subset v^\perp$  si dice

- **regolare** se  $|\pi^{-1}(x)| = 1$
- **singolare** se  $|\pi^{-1}(x)| > 1$
- **doppio** se  $|\pi^{-1}(x)| = 2$

**Fatto.** Dato un link poligonale  $L \subset \mathbb{R}^3$ , esiste un aperto denso  $U \subset \mathbb{S}^2$  tale che  $\forall v \in U$  si ha che

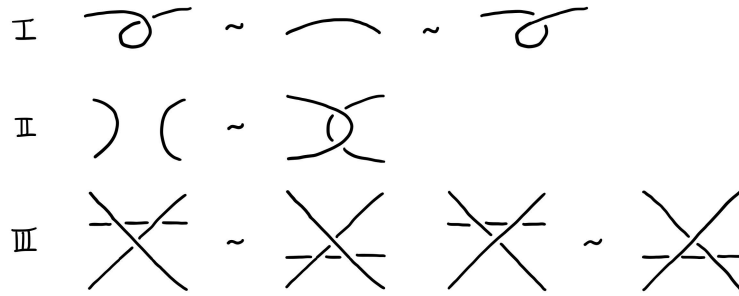
- i)  $L$  non ha segmenti paralleli a  $v$ .
- ii) Se  $x \in \pi_v(L)$  è singolare allora
  - $\pi_v^{-1}(x)$  non contiene vertici di  $L$
  - $x$  è un punto doppio
  - $x$  è un punto di intersezione trasversa delle immagini di due segmenti

Quindi dato  $L \subset \mathbb{R}^3$  link poligonale, esiste una proiezione regolare  $\pi(L) \subset \mathbb{R}^2$  con un numero finito di punti singolari, ciascuno dei quali è un punto doppio e di intersezione trasversa. Ognuno di questi punti doppi viene detto **incrocio**.

**Definizione.** Un **diagramma**  $D \subset \mathbb{R}^2$  di un link  $L \subset \mathbb{R}^3$  è l'immagine di  $L$  attraverso una proiezione regolare decorata con l'informazione sopra/sotto ad ogni incrocio.

**Fatto.** Due link con stesso diagramma sono equivalenti.

**Definizione.** Le mosse I, II, III (e le loro inverse) sono dette **mosse di Reidemeister**.



**Teorema (di Reidemeister) 1.1.** Due diagrammi di link equivalenti sono collegati da una successione finita di isotopie planari e mosse di Reidemeister.

Il modo principale in cui utilizzeremo il teorema di Reidemeister è attraverso la seguente proprietà. Indichiamo con  $\mathcal{D}$  l'insieme dei diagrammi di nodi e link.

**Proposizione 1.1.** Data una funzione  $\varphi : \mathcal{D} \rightarrow S$  con  $S$  un insieme (eventualmente con una qualche struttura come quella di anello) con la proprietà che  $D \sim D' \Rightarrow \varphi(D) = \varphi(D')$  allora se  $\varphi(D) \neq \varphi(D') \Rightarrow D \not\sim D'$ , in particolare se  $D, D'$  sono diagrammi per  $K, K'$  allora  $K \approx K'$ .

*Dimostrazione.* È semplicemente la forma contronominale del teorema di Reidemeister.  $\square$

Funzioni con la stessa proprietà di  $\varphi$  sono quindi invarianti di nodi o link per isotopia ambiente e ci danno un modo di distinguerli. Più avanti vedremo ad esempio il polinomio  $F_K(a, z) : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{Z}[a, a^{-1}, z, z^{-1}]$  che risulterà essere un invariante di isotopia ambiente per link orientati.

Come abbiamo generalizzato da nodi a link possiamo ripetere tutto anche aggiungendo un'orientazione e studiare **nodi e link orientati** ed abbiamo anche una versione orientata del teorema di Reidemeister.



## 1.3. Operazioni su Diagrammi

**Definizione.** Dato un link  $L \subset \mathbb{R}^3$  possiamo definire

- Il **mirror**  $m(L) := \rho(L)$  dove  $\rho : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  è la riflessione rispetto al piano di proiezione. In particolare dato un diagramma, il suo mirror è lo stesso diagramma con tutte le informazioni sopra/sotto scambiate.

inoltre, se diamo anche un'orientazione ad  $L$  possiamo definire

- Il **reverse**  $r(L)$ , in cui prendiamo l'orientazione opposta su ogni componente.
- L'**inverso**  $-L := m(r(L)) = r(m(L))$ .

**Definizione.** Sia  $K \subset \mathbb{R}^3$ , se  $K$  non è equivalente a  $m(K)$  allora diciamo che  $K$  è **chirale**, altrimenti è detto **anfichirale**.

## Capitolo 2

---

# Isotopia Regolare

---

TODO

Work in progress

## Capitolo 3

---

# Polinomio di Kauffman

---

TODO

Work in progress

### 3.1. Definizione assiomatica

TODO

Work in progress

### 3.2. Alcune proprietà del polinomio di Kauffman

TODO

Work in progress

### 3.3. Dimostrazione Forma Induttiva

TODO

Work in progress

## Bibliografia

- [1] L. H. Kauffman, “An invariant of regular isotopy,” *Trans. Am. Math. Soc.*, vol. 318, no. 2, pp. 417–471, 1990.
- [2] Jksd, “Wild knot.svg.” [Online]. Available: [https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Wild\\_knot.svg](https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Wild_knot.svg)
- [3] R. Crowell and R. Fox, *Introduction to Knot Theory*. in Ecological Studies. Springer New York, 1977. [Online]. Available: [https://books.google.it/books?id=\\_1HvAAAAMAAJ](https://books.google.it/books?id=_1HvAAAAMAAJ)