

Il polinomio di Kauffman: un invariante di isotopia regolare

ANTONIO DE LUCREZIIS

Abstract. In questa tesi tratteremo del polinomio di Kauffman, un invariante di nodi e link per di isotopia regolare. Introduciamo dei risultati di fondazione della teoria dei nodi per definire l'isotopia regolare. Infine vedremo la dimostrazione della buona definizione del polinomio di Kauffman a partire dalla forma assiomatica. Inoltre per il progetto di Laboratorio Computazionale abbiamo implementato in Python questo polinomio e verificato tutti i valori presenti nel database di KnotInfo e trovato un errore nel calcolo del nodo 10_{125} .

Indice

1. Introduzione	2
1.1. Introduzione alla Teoria dei Nodi	3
1.2. Proiezioni e Diagrammi	5
1.3. Operazioni su Diagrammi	7
2. Isotopia Regolare	8
3. Polinomio di Kauffman	10
3.1. Definizione assiomatica	10
3.2. Alcune proprietà del polinomio di Kauffman	11
3.3. Dimostrazione Forma Induttiva	13
4. Bibliografia	16

Capitolo 1

Introduzione

In questa tesi studieremo un invariante di isotopia regolare chiamato polinomio di Kauffman [1]. Intuitivamente se l'isotopia ambiente è l'equivalenza tra diagrammi generata dalle mosse I, II e III di Reidemeister, l'isotopia regolare è l'equivalenza generata solo dalle mosse II e III.

Il disegno è da rifare

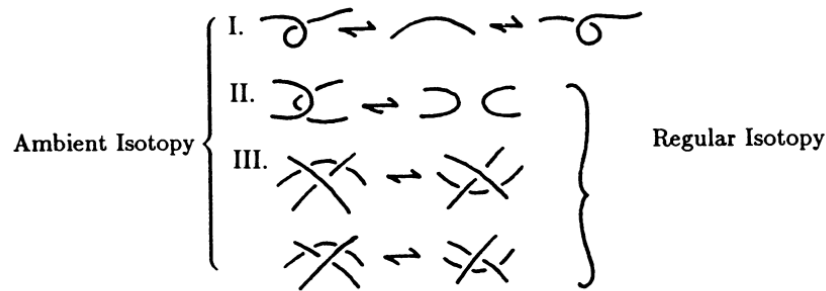


FIGURE 1. Reidemeister moves

Dato un nodo o link non orientato K , possiamo definire in forma assiomatica il polinomio $L_K(a, z) \in \mathbb{Z}[a, a^{-1}, z, z^{-1}]$ attraverso i seguenti assiomi:

- i) Se K, K' sono equivalenti a meno di isotopia regolare, allora $L_K(a, z) = L_{K'}(a, z)$.
- ii) Valgono le seguenti relazioni skein

- $L(\text{X}) + L(\text{X}) = z(L(\text{Y}) + L(\text{Z}))$
- $L(\bigcirc) = 1$
- $L(\text{D}) = aL(\text{A})$
- $L(\text{D}) = a^{-1}L(\text{A})$

Vedremo come questi assiomi definiscono un unico invariante di isotopia regolare ben definito e come $L_K(a, z)$ può essere generalizzato a un invariante di isotopia ambiente $F_K(a, z)$ utilizzando il writhe di un nodo.

1.1. Introduzione alla Teoria dei Nodi

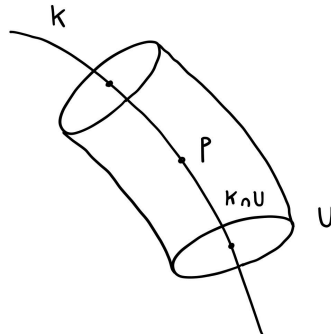
Ora introdurremo alcuni risultati fondamentali di teoria dei nodi tra cui le definizioni di nodo e link ed alcuni risultati di fondazione che ci serviranno per poter parlare ad esempio dei diagrammi planari e dell'isotopia regolare.

Definizione. Dati X, Y spazi topologici, $f : X \rightarrow Y$ continua si dice **embedding** se X è omeomorfo a $f(X) \subset Y$ con la topologia di sottospazio indotta da Y .

Fatto. Dati X, Y spazi topologici con X compatto, Y di Hausdorff e data un'applicazione continua $f : X \rightarrow Y$ allora f è un embedding \Leftrightarrow è iniettiva.

Definizione. Dato un embedding $f : X \rightarrow Y$, un punto $p \in X$ allora f si dice **localmente piatto** in p se $\exists U \subset \mathbb{R}^3$ intorno di p , tale che

$$\begin{aligned} U &\approx \mathbb{D}^2 \times [0, 1] \\ U \cap K &\leftrightarrow \{0\} \times [0, 1] \end{aligned}$$



inoltre f si dice **localmente piatto** (ovunque) se lo è in ogni punto di X .

Definizione. Un **nodo tame** è un sottoinsieme $K \subset \mathbb{R}^3$ per cui esiste un embedding $f : \mathbb{S}^1 \hookrightarrow \mathbb{R}^3$ localmente piatto con $K = f(\mathbb{S}^1)$. In questo caso f è anche detto **embedding tame**.

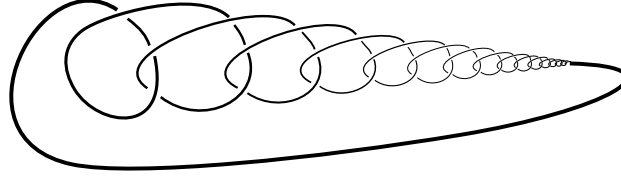


FIGURE 2. Un esempio di nodo non tame

Esistono anche nodi non tame come il precedente, ma d'ora in avanti considereremo solo nodi tame.

Definizione. Due nodi $K_0, K_1 \subset \mathbb{R}^3$ sono **equivalenti** se esiste un'**isotopia ambiente** H che porta uno nell'altro, ovvero esiste $H : \mathbb{R}^3 \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$ applicazione continua, tale che

- $\forall t \in [0, 1], H(\cdot, t)$ è un omeomorfismo

e ponendo $H_t(x) := H(x, t)$:

- $H_0 = \text{id}_{\mathbb{R}^3}$
- $H_1(K_0) = K_1$

Inoltre se due nodi sono equivalenti allora vale che $\mathbb{R}^3 \setminus K_0 \approx \mathbb{R}^3 \setminus K_1$.

Spesso serve fare manipolazioni direttamente sui nodi o sui diagrammi e lavorare con gli embedding $\mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{R}^3$ non è molto comodo da un punto di vista formale, per questo motivo introduciamo i *nodi poligonal* che ci permettono di dare una formalizzazione alternativa dei nodi tame più operativa.

Definizione. Un **nodo poligonale** è un nodo equivalente ad un'unione finita di segmenti lineari.

Fatto – Crowell [2]. Dato un nodo $K \subset \mathbb{R}^3$, K è tame $\Leftrightarrow K$ è poligonale.

Definizione. Il **nodo banale** è la classe di equivalenza del bordo di un triangolo equilatero.

Passiamo ora al caso in cui abbiamo un nodo con più di una componente

l'immagine sotto è presa da wikipedia, aggiungere una citazione?

Definizione. $L \subset \mathbb{R}^3$ è detto **link** se \exists embedding $f : \mathbb{S}^1 \cup \dots \cup \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{R}^3$ local-mente piatto con immagine L .

Possiamo generalizzare tutte le definizioni che diamo per i nodi ai link, sostituendo \mathbb{S}^1 con $\mathbb{S}^1 \cup \dots \cup \mathbb{S}^1$ con le opportune modifiche.

Introduciamo ora il concetto di equivalenza combinatoria di link poligonal in \mathbb{R}^3 , questo è il primo passo che ci permette di descrivere l'equivalenza tra nodi attraverso sequenza finita di mosse.

Definizione. Due link L_1, L_2 sono **combinatorialmente equivalenti** se si ottengono uno dall'altro tramite un numero finito delle seguenti mosse:

- i) Aggiunta/rimozione di vertici

TODO

disegno 1

- ii) Dato un triangolo piano $\Delta \subset \mathbb{R}^3$ tale che $\Delta \cap L$ sia un lato di Δ ed un segmento di L allora una Δ -mossa è la seguente

TODO

disegno 2

Fatto. Due link poligonal $L_1, L_2 \subset \mathbb{R}^3$ sono equivalenti \Leftrightarrow sono combinatorialmente equivalenti.

1.2. Proiezioni e Diagrammi

Data una direzione $v \in \mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$, possiamo definire $\pi_v : \mathbb{R}^3 \rightarrow v^\perp$ proiezione sul piano ortogonale a v come segue

TODO

disegno

Per formalizzare il concetto di diagramma di un nodo introdurremo il concetto di proiezione regolare, ovvero una proiezione in cui i punti di intersezione tra le immagini dei segmenti di L sono solamente gli incroci (punti doppi) del nodo (e senza segmenti paralleli alla direzione di proiezione).

Definizione. Sia $L \subset \mathbb{R}^3$ un link, $v \in \mathbb{S}^2$ una direzione e $\pi_v : \mathbb{R}^3 \rightarrow v^\perp$ la proiezione su v^\perp come in precedenza. Allora un punto $x \in \pi(L) \subset v^\perp$ si dice

- **regolare** se $|\pi^{-1}(x)| = 1$
- **singolare** se $|\pi^{-1}(x)| > 1$
- **doppio** se $|\pi^{-1}(x)| = 2$

Fatto. Dato un link poligonale $L \subset \mathbb{R}^3$, esiste un aperto denso $U \subset \mathbb{S}^2$ tale che $\forall v \in U, \pi_v(L)$ soddisfa

- i) L non ha segmenti paralleli a v .
- ii) Se $x \in \pi_v(L)$ è singolare allora
 - $\pi_v^{-1}(x)$ non contiene vertici di L
 - x è un punto doppio
 - x è di intersezione trasversa delle immagini di due segmenti

Quindi dato $L \subset \mathbb{R}^3$ link poligonale, esiste una proiezione regolare $\pi(L) \subset \mathbb{R}^2$, ovvero una con un numero finito di punti singolari, ciascuno dei quali è un punto doppio e di intersezione trasversa. Ognuno di questi punti doppi viene detto **incrocio**.

Definizione. Un **diagramma** $D \subset \mathbb{R}^2$ di un link $L \subset \mathbb{R}^3$ è l'immagine di L attraverso una proiezione regolare decorata con l'informazione sopra/sotto ad ogni incrocio.

Fatto. Due link con stesso diagramma sono equivalenti.

Definizione. L'insieme di isotopie planari e le mosse I, II, III (e loro inverse) sono le **mosse di Reidemeister**.

Teorema 1.1. Due diagrammi di link equivalenti sono collegati da una successione finita di isotopie planari e mosse di Reidemeister.

TODO

Varie considerazioni sul teorema di Reidemeister

Come abbiamo generalizzato nodi a link possiamo ripetere tutto anche aggiungendo un'orientazione e studiare **nodì e link orientati** ed abbiamo anche una variante orientata del teorema di Reidemeister.

1.3. Operazioni su Diagrammi

Definizione. Dato un link $L \subset \mathbb{R}^3$ possiamo definire

- Il **mirror** $m(L) := \rho(L)$ dove $\rho : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ è la riflessione rispetto al piano di proiezione. In particolare dato un diagramma, il suo mirror è lo stesso diagramma con tutte le informazioni sopra/sotto scambiate.

inoltre, se diamo anche un'*orientazione* ad L possiamo definire

- Il **reverse** $r(L)$, in cui prendiamo l'orientazione opposta su ogni componente.
- L'**inverso** $-L := m(r(L)) = r(m(L))$.

Definizione. Se $K \subset \mathbb{R}^3$ e K non è equivalente a $m(K)$ allora diciamo che K è **chirale**, altrimenti è detto **anfichirale**.