



UNIVERSITÀ DI PISA

Dipartimento di Matematica
Corso di Laurea Triennale in Matematica

Tesi di Laurea

Il polinomio di Kauffman: un invariante di isotopia regolare

Relatore:
Prof. Paolo Lisca

Candidato:
Antonio De Lucreziis

Anno Accademico 2024/2025

Abstract

In questa tesi tratteremo del polinomio di Kauffman, un invariante di nodi e link di isotopia regolare. Introduciamo dei risultati di fondazione della teoria dei nodi per definire l'isotopia regolare. Infine vedremo la dimostrazione della buona definizione del polinomio di Kauffman a partire dalla forma assiomatica. Per il progetto di Laboratorio Computazionale abbiamo implementato in Python questo polinomio e verificato tutti i valori presenti nel database di KnotInfo e trovato un errore nel calcolo del nodo 10_{125} .

Indice

1. Introduzione	3
1.1. Introduzione alla Teoria dei Nodi	3
1.2. Proiezioni e Diagrammi	6
1.3. Operazioni su Diagrammi	8
2. Isotopia Regolare	9
2.1. Writhe	10
2.2. Da isotopia regolare ad ambiente	13
3. Polinomio di Kauffman	14
3.1. Definizione assiomatica	14
3.2. Alcune proprietà del polinomio di Kauffman	14
3.3. Dimostrazione Forma Induttiva	14
4. Bibliografia	15

Capitolo 1

Introduzione

1.1. Introduzione alla Teoria dei Nodi

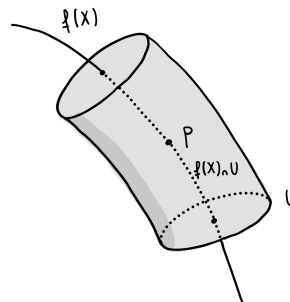
Ora introdurremo alcuni risultati fondamentali di teoria dei nodi. Vedremo le definizioni di nodo e link ed alcuni risultati di fondazione che ci serviranno per poter parlare ad esempio dei diagrammi planari e dell'isotopia regolare.

Definizione. Dati X, Y spazi topologici, $f : X \rightarrow Y$ continua si dice **embedding** se X è omeomorfo a $f(X) \subset Y$ con la topologia di sottospazio indotta da Y .

Fatto. Dati X, Y spazi topologici con X compatto, Y di Hausdorff e data un'applicazione continua $f : X \rightarrow Y$ allora f è un embedding \Leftrightarrow è iniettiva.

Definizione. Dato un embedding $f : X \rightarrow Y$, un punto $p \in X$ allora f si dice **localmente piatto** in p se $\exists U \subset \mathbb{R}^3$ intorno di p , tale che

$$\begin{aligned} U &\approx \mathbb{D}^2 \times [0, 1] \\ U \cap f(X) &\Leftrightarrow \{0\} \times [0, 1] \end{aligned}$$



inoltre f si dice embedding **localmente piatto** se lo è in ogni punto di X .

Definizione. Un **nodo tame** è un sottoinsieme $K \subset \mathbb{R}^3$ per cui esiste un embedding $f : \mathbb{S}^1 \hookrightarrow \mathbb{R}^3$ localmente piatto con $K = f(\mathbb{S}^1)$. In questo caso f è anche detto **embedding tame**.

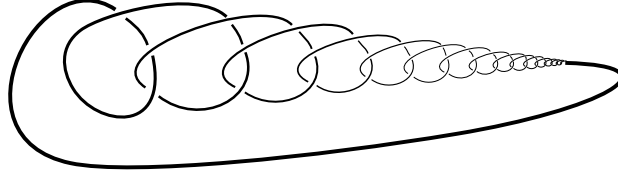


FIGURE 1. Un esempio di nodo non tame

Esistono anche nodi non tame come quello riportato nella figura precedente [1], ma d'ora in avanti considereremo solo nodi tame.

Definizione. Due nodi $K_0, K_1 \subset \mathbb{R}^3$ sono **equivalenti** se esiste un'**isotopia ambiente** H che porta uno nell'altro, ovvero esiste $H : \mathbb{R}^3 \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$ applicazione continua, tale che

- $\forall t \in [0, 1], H(\cdot, t)$ è un omeomorfismo

e ponendo $H_t(x) := H(x, t)$ si ha

- $H_0 = \text{id}_{\mathbb{R}^3}$
- $H_1(K_0) = K_1$

Inoltre se due nodi sono equivalenti allora vale che $\mathbb{R}^3 \setminus K_0 \approx \mathbb{R}^3 \setminus K_1$.

Spesso serve fare manipolazioni direttamente sui nodi o sui diagrammi e lavorare con gli embedding $\mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{R}^3$ non è molto comodo da un punto di vista formale e pratico, per questo motivo introduciamo i *nodi poligonali* che ci permettono di dare una formalizzazione alternativa dei nodi tame più operativa.

Definizione. Un **nodo poligonale** è un nodo equivalente ad un'unione finita di segmenti lineari.

Fatto – Crowell [2]. Dato un nodo $K \subset \mathbb{R}^3$, K è tame $\Leftrightarrow K$ è poligonale.

Definizione. Il **nodo banale** è la classe di equivalenza del bordo di un triangolo equilatero.

Passiamo ora al caso in cui abbiamo un nodo con più di una componente

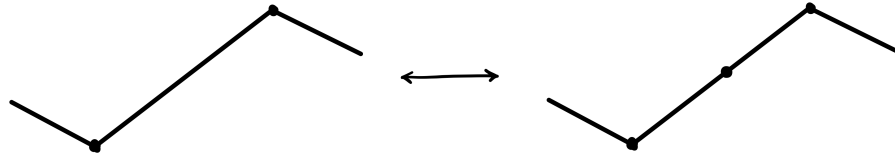
Definizione. $L \subset \mathbb{R}^3$ è detto **link** se \exists embedding $f : \mathbb{S}^1 \cup \dots \cup \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{R}^3$ localmente piatto con immagine L .

Possiamo generalizzare tutte le definizioni che diamo per i nodi ai link, sostituendo \mathbb{S}^1 con $\mathbb{S}^1 \cup \dots \cup \mathbb{S}^1$ e apportando le giuste modifiche.

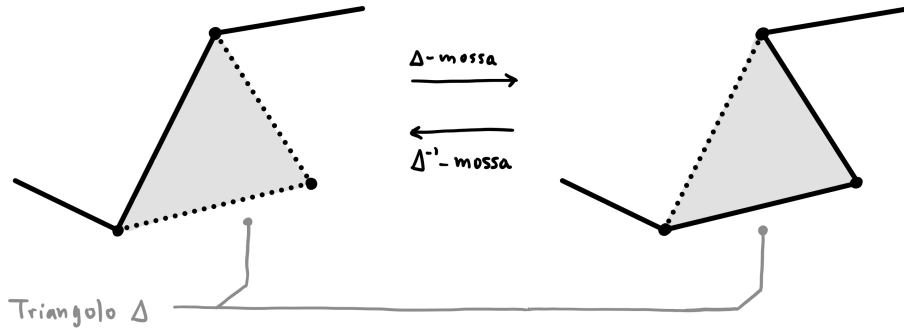
Introduciamo ora il concetto di equivalenza combinatoria di link poligonalali in \mathbb{R}^3 ; questo è il primo passo che ci permetterà di descrivere l'equivalenza per isotopia ambiente tra nodi attraverso una sequenza finita di mosse.

Definizione. Due link L_1, L_2 sono **combinatorialmente equivalenti** se si ottengono uno dall'altro tramite un numero finito delle seguenti mosse:

- i) Aggiunta/rimozione di vertici



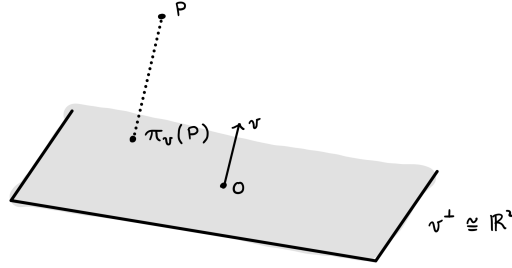
- ii) Dato un triangolo piano $\Delta \subset \mathbb{R}^3$ tale che $\Delta \cap L$ sia un lato di Δ ed un segmento di L allora una Δ -mossa è la seguente



Fatto. Due link poligonalali $L_1, L_2 \subset \mathbb{R}^3$ sono equivalenti \Leftrightarrow sono combinatorialmente equivalenti.

1.2. Proiezioni e Diagrammi

Data una direzione $v \in \mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$, possiamo definire $\pi_v : \mathbb{R}^3 \rightarrow v^\perp$ proiezione sul piano ortogonale a v come nella seguente figura:



Per formalizzare il concetto di diagramma di un nodo introdurremo il concetto di proiezione regolare, ovvero una proiezione in cui i punti di intersezione tra le immagini dei segmenti di L sono solamente gli incroci del nodo (e senza segmenti paralleli alla direzione di proiezione).

Definizione. Sia $L \subset \mathbb{R}^3$ un link, $v \in \mathbb{S}^2$ una direzione e $\pi_v : \mathbb{R}^3 \rightarrow v^\perp$ la proiezione su v^\perp come in precedenza. Allora un punto $x \in \pi(L) \subset v^\perp$ si dice

- **regolare** se $|\pi^{-1}(x)| = 1$
- **singolare** se $|\pi^{-1}(x)| > 1$
- **doppio** se $|\pi^{-1}(x)| = 2$

Fatto. Dato un link poligonale $L \subset \mathbb{R}^3$, esiste un aperto denso $U \subset \mathbb{S}^2$ tale che $\forall v \in U$ si ha che

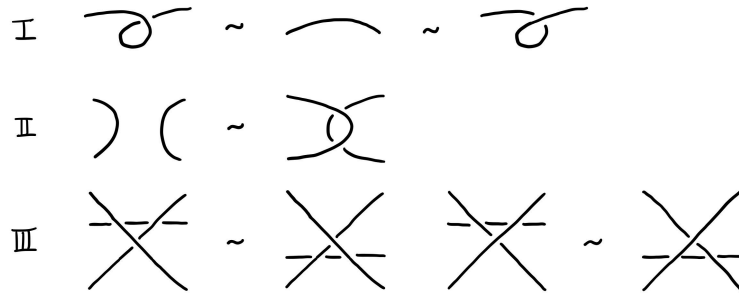
- i) L non ha segmenti paralleli a v .
- ii) Se $x \in \pi_v(L)$ è singolare allora
 - $\pi_v^{-1}(x)$ non contiene vertici di L
 - x è un punto doppio
 - x è un punto di intersezione trasversa delle immagini di due segmenti

Quindi dato $L \subset \mathbb{R}^3$ link poligonale, esiste una proiezione regolare $\pi(L) \subset \mathbb{R}^2$ con un numero finito di punti singolari, ciascuno dei quali è un punto doppio e di intersezione trasversa. Ognuno di questi punti doppi viene detto **incrocio**.

Definizione. Un **diagramma** $D \subset \mathbb{R}^2$ di un link $L \subset \mathbb{R}^3$ è l'immagine di L attraverso una proiezione regolare decorata con l'informazione sopra/sotto ad ogni incrocio.

Fatto. Due link con stesso diagramma sono equivalenti.

Definizione. Le mosse I, II, III (e le loro inverse) sono dette **mosse di Reidemeister**.



Teorema (di Reidemeister) 1.1. Due diagrammi di link equivalenti sono collegati da una successione finita di isotopie planari e mosse di Reidemeister.

Il modo principale in cui utilizzeremo il teorema di Reidemeister è attraverso la seguente proprietà. Indichiamo con \mathcal{D} l'insieme dei diagrammi di nodi e link.

Proposizione 1.1. Data una funzione $\varphi : \mathcal{D} \rightarrow S$ con S un insieme (eventualmente con una qualche struttura come quella di anello) con la proprietà che $D \sim D' \Rightarrow \varphi(D) = \varphi(D')$ allora se $\varphi(D) \neq \varphi(D') \Rightarrow D \not\sim D'$, in particolare se D, D' sono diagrammi per K, K' allora $K \not\sim K'$.

Dimostrazione. È semplicemente la forma contronominale del teorema di Reidemeister. \square

Funzioni con la stessa proprietà di φ sono quindi invarianti di nodi o link per isotopia ambiente e ci danno un modo di distinguerli. Più avanti vedremo ad esempio il polinomio $F_K(a, z) : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{Z}[a, a^{-1}, z, z^{-1}]$ che risulterà essere un invariante di isotopia ambiente per link orientati.

Come abbiamo generalizzato da nodi a link possiamo ripetere tutto anche aggiungendo un'orientazione e studiare **nodi e link orientati** ed abbiamo anche una versione orientata del teorema di Reidemeister.

1.3. Operazioni su Diagrammi

Definizione. Dato un link $L \subset \mathbb{R}^3$ possiamo definire

- Il **mirror** $m(L) := \rho(L)$ dove $\rho : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ è la riflessione rispetto al piano di proiezione. In particolare dato un diagramma, il suo mirror è lo stesso diagramma con tutte le informazioni sopra/sotto scambiate.

inoltre, se diamo anche un'*orientazione* ad L possiamo definire

- Il **reverse** $r(L)$, in cui prendiamo l'orientazione opposta su ogni componente.
- L'**inverso** $-L := m(r(L)) = r(m(L))$.

Definizione. Sia $K \subset \mathbb{R}^3$, se K non è equivalente a $m(K)$ allora diciamo che K è **chirale**, altrimenti è detto **anfichirale**.

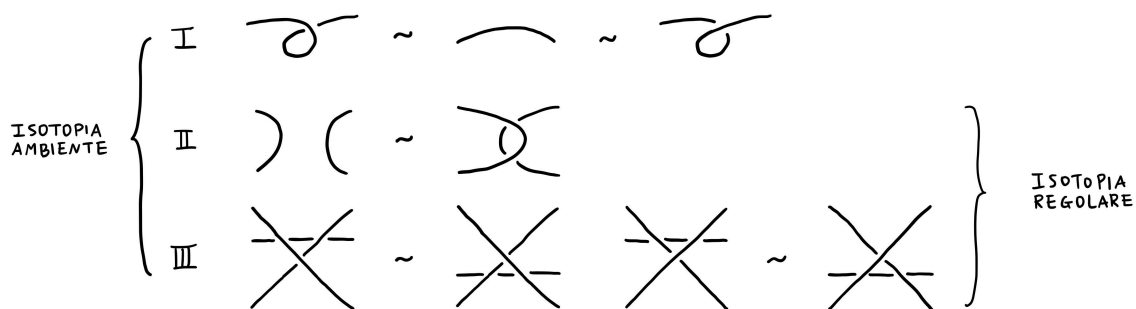
Capitolo 2

Isotopia Regolare

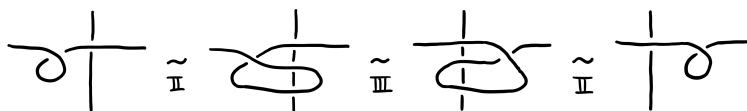
Il teorema di Reidemeister ci dice che due nodi sono equivalenti a meno di isotopia ambiente se e solo se lo sono anche dei loro diagrammi a meno di isotopie planari e mosse I, II e III.

Possiamo chiederci cosa succede se ci restringiamo all'equivalenza generata solo dalle isotopie planari e dalle mosse II e III, questo ci dà una nuova equivalenza tra nodi più stringente dell'isotopia ambiente.

Definizione. Due diagrammi D_1, D_2 di nodi o link si dicono equivalenti a meno di **isotopia regolare** se e solo se sono equivalenti a meno di isotopie planari e mosse II e III di Reidemeister.



Una prima cosa che possiamo notare è che tutte le mosse di tipo I, quelle che introducono quelli che chiameremo **riccioli**, possono passare sopra o sotto altri fili senza problemi applicando le seguenti mosse



Quindi i riccioli possono essere spostati liberamente e non ci impediscono di applicare mosse di tipo II o III. In particolare questo ci permette anche di “fattorizzare” tutti i riccioli di una componente in modo che siano tutti vicini.

Un'altra osservazione sul comportamento dell'isotopia regolare rispetto alle mosse di tipo I è la seguente. Quando abbiamo una coppia di riccioli con segni opposti e su lati opposti abbiamo la seguente proprietà di cancellazione detto *trucco di Whitney*.



C'è un'osservazione importante da fare quando parliamo di isotopia regolare. Quest'ultima è definita solo quando si parla di diagrammi. Quando invece parliamo di isotopia ambiente ha senso parlare dei link sia come diagrammi che come embedding $S^1 \rightarrow \mathbb{R}^3$.

Questo sarà importante più avanti quando vedremo invarianti come il polinomio F_K che risulteranno essere invarianti per isotopia ambiente. Nel caso del polinomio F_K , il calcolo va fatto fissando un particolare diagramma del link. È tutt'ora un problema aperto dare una definizione di F_K che sia indipendente dalla scelta di un diagramma.

2.1. Writhe

Vediamo ora un primo invariante di isotopia regolare per link orientati, per prima cosa definiamo il segno di un incrocio.

Definizione. Dato un incrocio di un link orientato ci possono essere due casi in base alla direzione in cui il filo sotto si trova rispetto a quello sopra. Definiamo il **segno** di un incrocio in base a questi casi come segue

$$\varepsilon\left(\begin{array}{c} \nearrow \\ \searrow \end{array}\right) = +1 \quad \varepsilon\left(\begin{array}{c} \nwarrow \\ \swarrow \end{array}\right) = -1$$

Definizione. Dato K link orientato, il **writhe** $w(K)$ o numero di avvolgimento è dato dalla somma dei segni dei suoi incroci

$$w(K) := \sum_{c \text{ incrocio}} \varepsilon(c)$$

Proposizione 2.2. Se K è un nodo, il writhe non dipende dall'orientazione.

Dimostrazione. Basta ricondurci a controllare cosa succede quando applichiamo il cambio dell'orientazione in ε :

$$\begin{aligned} \varepsilon\left(\begin{array}{c} \nwarrow \\ \swarrow \end{array}\right) &= \varepsilon\left(\begin{array}{c} \nearrow \\ \searrow \end{array}\right) = +1 \\ \varepsilon\left(\begin{array}{c} \nearrow \\ \searrow \end{array}\right) &= \varepsilon\left(\begin{array}{c} \nwarrow \\ \swarrow \end{array}\right) = -1 \end{aligned}$$

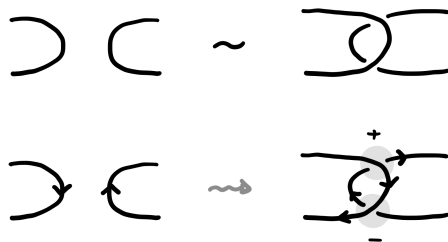
Nel primo caso invertendo le due frecce il filo che passa sotto va sempre verso sinistra rispetto a quello sopra quindi il segno rimane invariato, il secondo caso è analogo. \square

Questo risultato può essere generalizzato a link con l'accortezza di invertire l'orientazione di tutte le componenti (o anche solamente tutte quelle che appartengono ad una sola componente connessa relativamente alla sua ombra planare).

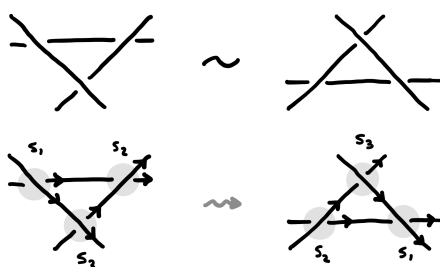
Proposizione 2.3. Il writhe è un invariante di isotopia regolare, ovvero se K_1, K_2 sono equivalenti a meno di isotopia regolare allora $w(K_1) = w(K_2)$.

Dimostrazione. Controlliamo cosa succede nel caso delle mosse di tipo II e III:

- Nel caso della mossa II si può vedere che indipendentemente dalle orientazioni dei due fili, quando portiamo uno sopra l'altro compaiono sempre due incroci con segni opposti quindi per additività del writhe la somma totale non cambia.



- Per quanto riguarda la mossa III, il numero di incroci non cambia quindi basta controllare che la somma sia la stessa



Come possiamo notare nel caso mostrato in figura ciò che accade è che stiamo solo spostando e scambiando alcuni degli incroci tra loro. In particolare possiamo identificare ogni incrocio come l'intersezione di due delle tre rette, dopo aver applicato la mossa III le rette si saranno spostate ma le orientazioni saranno sempre le stesse e quindi anche i segni degli incroci.

Inoltre notiamo che il writhe non è influenzato dalle isotopie planari quindi questo conclude la dimostrazione. \square

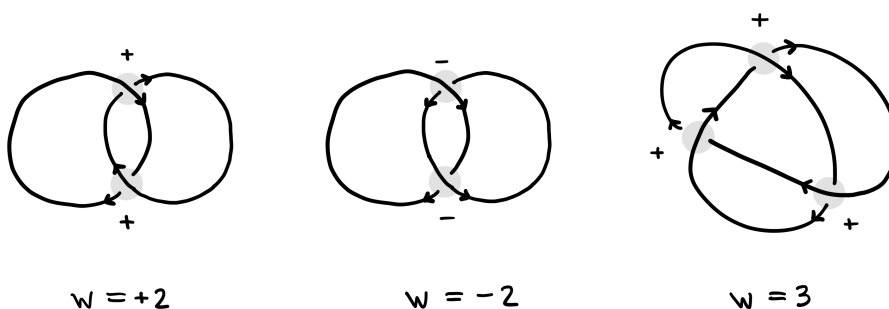


FIGURE 9. Esempi di calcolo del writhe

2.2. Da isotopia regolare ad ambiente

Un primo fatto generale che possiamo vedere è che, dato un invariante di isotopia regolare che si comporta “bene” rispetto alle mosse di tipo I, possiamo costruire un invariante di isotopia ambiente aggiungendo un fattore di correzione dato dal writhe.

Proposizione 2.4. Sia R un anello, $a \in R$ un elemento invertibile e K un link orientato, allora se $L : \mathcal{D} \rightarrow R$ è un invariante di isotopia regolare tale che

$$L(\overline{\bigcirc}) = aL(\frown) \quad L(\overline{\smile}) = a^{-1}L(\frown)$$

allora $F(K) := a^{-w(K)}L(K)$ è un invariante di isotopia ambiente.

Osservazione. In questo caso la notazione “ $L(\overline{\bigcirc}) = aL(\frown)$ ” indica che ci sono due diagrammi D_1, D_2 identici ovunque tranne che nella parte evidenziata.

Dimostrazione. Per prima cosa notiamo che $w(K)$ è invariante per isotopia regolare, dunque lo è anche $a^{-w(K)}$. Osserviamo che $a^{-w(K)} \cdot L(K)$ è un prodotto di quantità invarianti per isotopia regolare dunque anche $F(K)$ è invariante per isotopia regolare.

Dunque basta controllare che $F(K)$ sia invariante rispetto alle mosse di tipo I. Per prima cosa osserviamo che

$$w(\overline{\bigcirc}) = w(\frown) + 1 \quad w(\overline{\smile}) = w(\frown) - 1$$

ed usando la proprietà dell’ipotesi otteniamo

$$\begin{aligned} F(\overline{\bigcirc}) &= a^{-w(\overline{\bigcirc})} \cdot L(\overline{\bigcirc}) \\ &= a^{-w(\frown)-1} \cdot a \cdot L(\frown) \\ &= a^{-w(\frown)} \cdot \cancel{a} \cdot L(\frown) \\ &= a^{-w(\frown)} \cdot L(\frown) = F(\frown) \end{aligned}$$

e analogamente segue anche per l’altro ricciolo che $F(\overline{\smile}) = F(\frown)$. \square

Capitolo 3

Polinomio di Kauffman

TODO

work in progress

3.1. Definizione assiomatica

TODO

work in progress

3.2. Alcune proprietà del polinomio di Kauffman

TODO

work in progress

3.3. Dimostrazione Forma Induttiva

TODO

work in progress

Bibliografia

- [1] Jkasd, “Wild_knot.svg.” [Online]. Available: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Wild_knot.svg
- [2] R. Crowell and R. Fox, *Introduction to Knot Theory*. in Graduate Text in Mathematics. Springer New York, 1977.