



UNIVERSITÀ DI PISA

Dipartimento di Matematica
Corso di Laurea Triennale in Matematica

Tesi di Laurea

Il polinomio di Kauffman: un invariante di isotopia regolare

Relatore:
Prof. Paolo Lisca

Candidato:
Antonio De Lucreziis

Anno Accademico 2024/2025

Abstract

In questa tesi tratteremo del polinomio di Kauffman, un invariante di nodi e link di isotopia regolare. Introduciamo dei risultati di fondazione della teoria dei nodi per definire l'isotopia regolare. Infine vedremo la dimostrazione della buona definizione del polinomio di Kauffman a partire dalla forma assiomatica. Per il progetto di Laboratorio Computazionale abbiamo implementato in Python questo polinomio e verificato tutti i valori presenti nel database di KnotInfo e trovato un errore nel calcolo del nodo 10_{125} .

Indice

1. Introduzione	3
1.1. Introduzione alla Teoria dei Nodi	3
1.2. Proiezioni e Diagrammi	6
1.3. Operazioni su Diagrammi	8
2. Isotopia Regolare	9
2.1. Writhe	10
2.2. Da isotopia regolare ad ambiente	13
3. Il Polinomio di Kauffman	14
3.1. Definizione assiomatica	14
3.2. Alcune proprietà del polinomio di Kauffman	15
3.3. Strumenti Forma Induttiva	18
3.4. Forma Induttiva	19
3.5. Dimostrazione buona definizione	22
4. Bibliografia	28

Capitolo 1

Introduzione

1.1. Introduzione alla Teoria dei Nodi

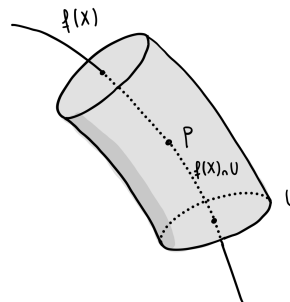
Ora introdurremo alcuni risultati fondamentali di teoria dei nodi. Vedremo le definizioni di nodo e link ed alcuni risultati di fondazione che ci serviranno per poter parlare ad esempio dei diagrammi planari e dell'isotopia regolare.

Definizione. Dati X, Y spazi topologici, $f : X \rightarrow Y$ continua si dice **embedding** se X è omeomorfo a $f(X) \subset Y$ con la topologia di sottospazio indotta da Y .

Fatto. Dati X, Y spazi topologici con X compatto, Y di Hausdorff e data un'applicazione continua $f : X \rightarrow Y$ allora f è un embedding \Leftrightarrow è iniettiva.

Definizione. Dato un embedding $f : X \rightarrow Y$, un punto $p \in X$ allora f si dice **localmente piatto** in p se $\exists U \subset \mathbb{R}^3$ intorno di p , tale che

$$\begin{aligned} U &\approx \mathbb{D}^2 \times [0, 1] \\ U \cap f(X) &\Leftrightarrow \{0\} \times [0, 1] \end{aligned}$$



inoltre f si dice embedding **localmente piatto** se lo è in ogni punto di X .

Definizione. Un **nodo tame** è un sottoinsieme $K \subset \mathbb{R}^3$ per cui esiste un embedding $f : \mathbb{S}^1 \hookrightarrow \mathbb{R}^3$ localmente piatto con $K = f(\mathbb{S}^1)$. In questo caso f è anche detto **embedding tame**.

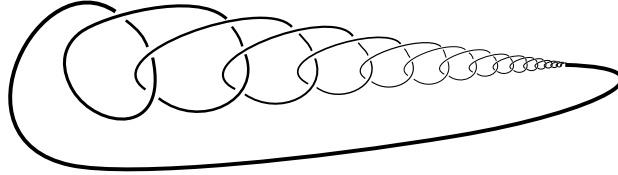


FIGURE 1. Un esempio di nodo non tame

Esistono anche nodi non tame come quello riportato nella figura precedente [1], ma d'ora in avanti considereremo solo nodi tame.

Definizione. Due nodi $K_0, K_1 \subset \mathbb{R}^3$ sono **equivalenti** se esiste un'**isotopia ambiente** H che porta uno nell'altro, ovvero esiste $H : \mathbb{R}^3 \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$ applicazione continua, tale che

- $\forall t \in [0, 1], H(\cdot, t)$ è un omeomorfismo

e ponendo $H_t(x) := H(x, t)$ si ha

- $H_0 = \text{id}_{\mathbb{R}^3}$
- $H_1(K_0) = K_1$

Inoltre se due nodi sono equivalenti allora vale che $\mathbb{R}^3 \setminus K_0 \approx \mathbb{R}^3 \setminus K_1$.

Spesso serve fare manipolazioni direttamente sui nodi o sui diagrammi e lavorare con gli embedding $\mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{R}^3$ non è molto comodo da un punto di vista formale e pratico, per questo motivo introduciamo i *nodi poligonali* che ci permettono di dare una formalizzazione alternativa dei nodi tame più operativa.

Definizione. Un **nodo poligonale** è un nodo equivalente ad un'unione finita di segmenti lineari.

Fatto – Crowell [2]. Dato un nodo $K \subset \mathbb{R}^3$, K è tame $\Leftrightarrow K$ è poligonale.

Definizione. Il **nodo banale** è la classe di equivalenza del bordo di un triangolo equilatero.

Passiamo ora al caso in cui abbiamo un nodo con più di una componente

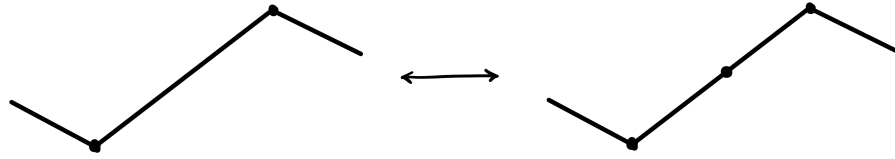
Definizione. $L \subset \mathbb{R}^3$ è detto **link** se \exists embedding $f : \mathbb{S}^1 \cup \dots \cup \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{R}^3$ local-mente piatto con immagine L .

Possiamo generalizzare tutte le definizioni che diamo per i nodi ai link, sostituendo \mathbb{S}^1 con $\mathbb{S}^1 \cup \dots \cup \mathbb{S}^1$ e apportando le giuste modifiche.

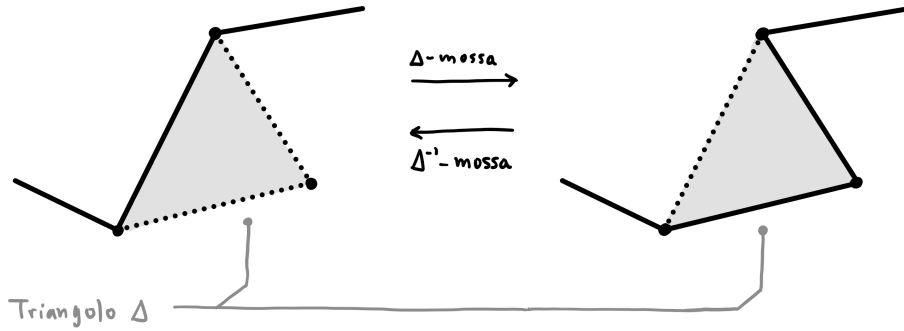
Introduciamo ora il concetto di equivalenza combinatoria di link poligonal in \mathbb{R}^3 ; questo è il primo passo che ci permetterà di descrivere l'equivalenza per isotopia ambiente tra nodi attraverso una sequenza finita di mosse.

Definizione. Due link L_1, L_2 sono **combinatorialmente equivalenti** se si ottengono uno dall'altro tramite un numero finito delle seguenti mosse:

- i) Aggiunta/rimozione di vertici



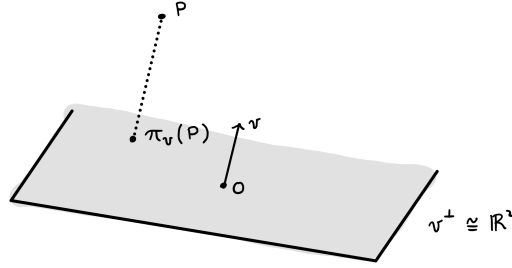
- ii) Dato un triangolo piano $\Delta \subset \mathbb{R}^3$ tale che $\Delta \cap L$ sia un lato di Δ ed un segmento di L allora una Δ -mossa è la seguente



Fatto. Due link poligonal $L_1, L_2 \subset \mathbb{R}^3$ sono equivalenti \Leftrightarrow sono combinatorialmente equivalenti.

1.2. Proiezioni e Diagrammi

Data una direzione $v \in \mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$, possiamo definire $\pi_v : \mathbb{R}^3 \rightarrow v^\perp$ proiezione sul piano ortogonale a v come nella seguente figura:



Per formalizzare il concetto di diagramma di un nodo introdurremo il concetto di proiezione regolare, ovvero una proiezione in cui i punti di intersezione tra le immagini dei segmenti di L sono solamente gli incroci del nodo (e senza segmenti paralleli alla direzione di proiezione).

Definizione. Sia $L \subset \mathbb{R}^3$ un link, $v \in \mathbb{S}^2$ una direzione e $\pi_v : \mathbb{R}^3 \rightarrow v^\perp$ la proiezione su v^\perp come in precedenza. Allora un punto $x \in \pi(L) \subset v^\perp$ si dice

- **regolare** se $|\pi^{-1}(x)| = 1$
- **singolare** se $|\pi^{-1}(x)| > 1$
- **doppio** se $|\pi^{-1}(x)| = 2$

Fatto. Dato un link poligonale $L \subset \mathbb{R}^3$, esiste un aperto denso $U \subset \mathbb{S}^2$ tale che $\forall v \in U$ si ha che

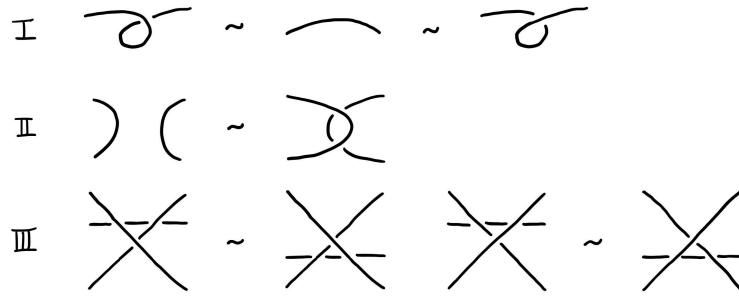
- i) L non ha segmenti paralleli a v .
- ii) Se $x \in \pi_v(L)$ è singolare allora
 - $\pi_v^{-1}(x)$ non contiene vertici di L
 - x è un punto doppio
 - x è un punto di intersezione trasversa delle immagini di due segmenti

Quindi dato $L \subset \mathbb{R}^3$ link poligonale, esiste una proiezione regolare $\pi(L) \subset \mathbb{R}^2$ con un numero finito di punti singolari, ciascuno dei quali è un punto doppio e di intersezione trasversa. Ognuno di questi punti doppi viene detto **incrocio**.

Definizione. Un **diagramma** $D \subset \mathbb{R}^2$ di un link $L \subset \mathbb{R}^3$ è l'immagine di L attraverso una proiezione regolare decorata con l'informazione sopra/sotto ad ogni incrocio.

Fatto. Due link con stesso diagramma sono equivalenti.

Definizione. Le mosse I, II, III (e le loro inverse) sono dette **mosse di Reidemeister**.



Teorema (di Reidemeister) 1.1. Due diagrammi di link equivalenti sono collegati da una successione finita di isotopie planari e mosse di Reidemeister.

Il modo principale in cui utilizzeremo il teorema di Reidemeister è attraverso la seguente proprietà. Indichiamo con \mathcal{D} l'insieme dei diagrammi di nodi e link.

Proposizione 1.1. Data una funzione $\varphi : \mathcal{D} \rightarrow S$ con S un insieme (eventualmente con una qualche struttura come quella di anello) con la proprietà che $D \sim D' \Rightarrow \varphi(D) = \varphi(D')$ allora se $\varphi(D) \neq \varphi(D') \Rightarrow D \not\sim D'$, in particolare se D, D' sono diagrammi per K, K' allora $K \not\sim K'$.

Dimostrazione. È semplicemente la forma contronominale del teorema di Reidemeister. \square

Funzioni con la stessa proprietà di φ sono quindi invarianti di nodi o link per isotopia ambiente e ci danno un modo di distinguerli. Più avanti vedremo ad esempio il polinomio $F_K(a, z) : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{Z}[a, a^{-1}, z, z^{-1}]$ che risulterà essere un invariante di isotopia ambiente per link orientati.

Come abbiamo generalizzato da nodi a link possiamo ripetere tutto anche aggiungendo un'orientazione e studiare **nodi e link orientati** ed abbiamo anche una versione orientata del teorema di Reidemeister.

1.3. Operazioni su Diagrammi

Definizione. Dato un link $L \subset \mathbb{R}^3$ possiamo definire

- Il **mirror** $m(L) := \rho(L)$ dove $\rho : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ è la riflessione rispetto al piano di proiezione. In particolare dato un diagramma, il suo mirror è lo stesso diagramma con tutte le informazioni sopra/sotto scambiate.

inoltre, se diamo anche un'orientazione ad L possiamo definire

- Il **reverse** $r(L)$, in cui prendiamo l'orientazione opposta su ogni componente.
- L'**inverso** $-L := m(r(L)) = r(m(L))$.

Definizione. Sia $K \subset \mathbb{R}^3$, se K non è equivalente a $m(K)$ allora diciamo che K è **chirale**, altrimenti è detto **anfichirale**.

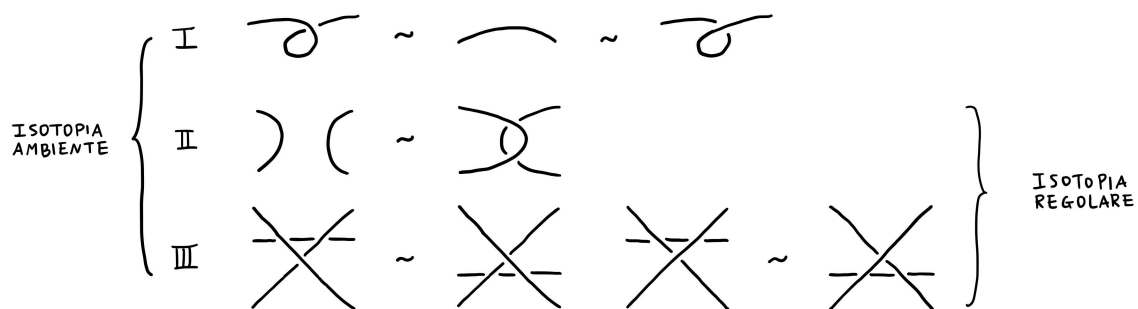
Capitolo 2

Isotopia Regolare

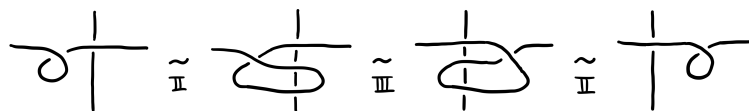
Il teorema di Reidemeister ci dice che due nodi sono equivalenti a meno di isotopia ambiente se e solo se lo sono anche dei loro diagrammi a meno di isotopie planari e mosse I, II e III.

Possiamo chiederci cosa succede se ci restringiamo all'equivalenza generata solo dalle isotopie planari e dalle mosse II e III, questo ci dà una nuova equivalenza tra nodi più stringente dell'isotopia ambiente.

Definizione. Due diagrammi D_1, D_2 di nodi o link si dicono equivalenti a meno di **isotopia regolare** se e solo se sono equivalenti a meno di isotopie planari e mosse II e III di Reidemeister.



Una prima cosa che possiamo notare è che tutte le mosse di tipo I, quelle che introducono quelli che chiameremo **riccioli**, possono passare sopra o sotto altri fili senza problemi applicando le seguenti mosse



Quindi i riccioli possono essere spostati liberamente e non ci impediscono di applicare mosse di tipo II o III. In particolare questo ci permette anche di “fattorizzare” tutti i riccioli di una componente in modo che siano tutti vicini.

Un'altra osservazione sul comportamento dell'isotopia regolare rispetto alle mosse di tipo I è la seguente. Quando abbiamo una coppia di riccioli con segni opposti abbiamo la seguente proprietà di cancellazione detto *trucco di Whitney*.



Un'altra osservazione importante che possiamo fare quando si parla di isotopia regolare è che quest'ultima è equivalente all'isotopia di *link con framing*¹. In particolare l'isotopia regolare preserva il framing del nodo.

Questo sarà importante più avanti quando vedremo invarianti come il polinomio F_K che risulteranno essere invarianti per isotopia ambiente. Nel caso del polinomio F_K , il calcolo va fatto fissando un particolare diagramma del link. È tutt'ora un problema aperto dare una definizione “intrinseca” di F_K senza usare diagrammi.

2.1. Writhe

Vediamo ora un primo invariante di isotopia regolare per link orientati, per prima cosa definiamo il segno di un incrocio.

¹Nel caso di nodi come embedding da $\mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^3$, un **nodo con framing** è un embedding di $\mathbb{D}^2 \times \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^3$. Il **framing** del nodo è l'immagine di $I \times \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^3$. Un nodo con framing può essere visto come una banda embedded dove il framing è il numero di twist con segno.

Definizione. Dato un incrocio del diagramma di un link orientato ci possono essere due casi in base alla direzione in cui il filo sotto si trova rispetto a quello sopra. Definiamo il **segno** di un incrocio in base a questi casi come segue

$$\varepsilon\left(\begin{array}{c} \nearrow \\ \searrow \end{array}\right) = +1 \quad \varepsilon\left(\begin{array}{c} \nwarrow \\ \swarrow \end{array}\right) = -1$$

Definizione. Dato K link orientato, il **writhe** $w(K)$ o numero di avvolgimento è dato dalla somma dei segni dei suoi incroci

$$w(K) := \sum_{c \text{ incrocio}} \varepsilon(c)$$

Proposizione 2.2. Se K è il diagramma di un nodo, il writhe non dipende dall'orientazione.

Dimostrazione. Basta ricondurci a controllare cosa succede quando applichiamo il cambio dell'orientazione in ε :

$$\begin{aligned} \varepsilon\left(\begin{array}{c} \nwarrow \\ \swarrow \end{array}\right) &= \varepsilon\left(\begin{array}{c} \nearrow \\ \searrow \end{array}\right) = +1 \\ \varepsilon\left(\begin{array}{c} \nearrow \\ \swarrow \end{array}\right) &= \varepsilon\left(\begin{array}{c} \nwarrow \\ \searrow \end{array}\right) = -1 \end{aligned}$$

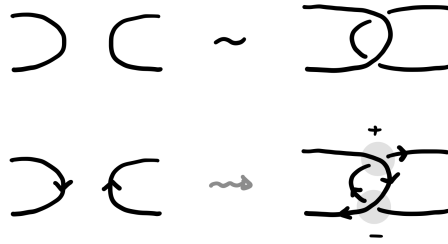
Nel primo caso invertendo le due frecce il filo che passa sotto va sempre verso sinistra rispetto a quello sopra quindi il segno rimane invariato, il secondo caso è analogo. \square

Questo risultato può essere generalizzato a diagrammi di link con l'accortezza di invertire l'orientazione di tutte le componenti (o anche solamente tutte quelle che appartengono ad una sola componente connessa della sua ombra planare).

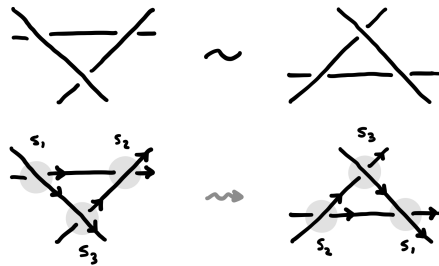
Proposizione 2.3. Il writhe è un invariante di isotopia regolare, ovvero se K_1, K_2 sono diagrammi di link equivalenti a meno di isotopia regolare allora $w(K_1) = w(K_2)$.

Dimostrazione. Controlliamo cosa succede nel caso delle mosse di tipo II e III:

- Nel caso della mossa II si può vedere che indipendentemente dalle orientazioni dei due fili, quando portiamo uno sopra l'altro compaiono sempre due incroci con segni opposti quindi per additività del writhe la somma totale non cambia.



- Per quanto riguarda la mossa III, il numero di incroci non cambia quindi basta controllare che la somma sia la stessa



Come possiamo notare nel caso mostrato in figura ciò che accade è che stiamo solo spostando e scambiando alcuni degli incroci tra loro. In particolare possiamo identificare ogni incrocio come l'intersezione di due delle tre rette, dopo aver applicato la mossa III le rette si saranno spostate ma le orientazioni saranno sempre le stesse e quindi anche i segni degli incroci.

Inoltre notiamo che il writhe non è influenzato dalle isotopie planari quindi questo conclude la dimostrazione. \square

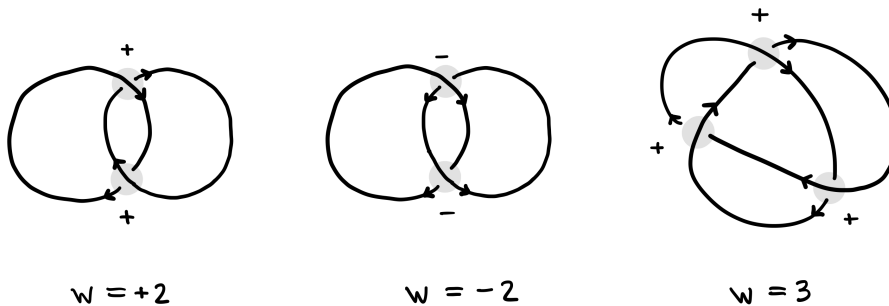


FIGURE 9. Esempi di calcolo del writhe

2.2. Da isotopia regolare ad ambiente

Un primo fatto generale che possiamo vedere è che, dato un invariante di isotopia regolare per diagrammi che si comporta “bene” rispetto alle mosse di tipo I, possiamo costruire un invariante di isotopia ambiente per link aggiungendo un fattore di correzione dato dal writhe.

Proposizione 2.4. Sia R un anello, $a \in R$ un elemento invertibile e K un link orientato, \mathcal{D} l'insieme dei diagrammi di link orientati, allora se $L : \mathcal{D} \rightarrow R$ è un invariante di isotopia regolare tale che

$$L(\overline{\bigcirc}) = aL(\frown) \quad L(\overline{\bigcirc}) = a^{-1}L(\frown)$$

allora $F(K) := a^{-w(K)}L(K)$ è un invariante di isotopia ambiente.

Osservazione. In questo caso la notazione “ $L(\overline{\bigcirc}) = aL(\frown)$ ” indica che ci sono due diagrammi D_1, D_2 identici ovunque tranne che nella parte evidenziata.

Dimostrazione. Per prima cosa notiamo che $w(K)$ è invariante per isotopia regolare, dunque lo è anche $a^{-w(K)}$. Osserviamo che $a^{-w(K)} \cdot L(K)$ è un prodotto di quantità invarianti per isotopia regolare dunque anche $F(K)$ è invariante per isotopia regolare.

Dunque basta controllare che $F(K)$ sia invariante rispetto alle mosse di tipo I. Per prima cosa osserviamo che

$$w(\overline{\bigcirc}) = w(\frown) + 1 \quad w(\overline{\bigcirc}) = w(\frown) - 1$$

ed usando la proprietà dell'ipotesi otteniamo

$$\begin{aligned} F(\overline{\bigcirc}) &= a^{-w(\overline{\bigcirc})} \cdot L(\overline{\bigcirc}) \\ &= a^{-w(\frown)-1} \cdot a \cdot L(\frown) \\ &= a^{-w(\frown)} \cdot \cancel{a} \cdot \cancel{a} \cdot L(\frown) \\ &= a^{-w(\frown)} \cdot L(\frown) = F(\frown) \end{aligned}$$

e analogamente segue anche per l'altro ricciolo che $F(\overline{\bigcirc}) = F(\frown)$. \square

Capitolo 3

Il Polinomio di Kauffman

Ora introdurremo il polinomio di Kauffman [3] detto L_K , che vedremo essere un invariante di isotopia regolare. Questo polinomio è definito in modo implicito da assiomi che utilizzano le relazioni skein, queste relazioni possono essere utilizzate direttamente per calcolare il polinomio di Kauffman per un certo diagramma in modo implicito.

Vedremo come questi assiomi definiscono un unico invariante di isotopia regolare ben definito e come $L_K(a, z)$ può essere generalizzato ad un invariante di isotopia ambiente $F_K(a, z)$.

3.1. Definizione assiomatica

Notazione. Per rendere alcuni calcoli più leggibili, in questo capitolo utilizzeremo in modo intercambiabile le notazioni $L_K, L[K]$ per indicare il polinomio di Kauffman associato ad un certo diagramma.

Definizione. Sia K un diagramma di un link non orientato, e sia $\mathbb{Z}[a, a^{-1}, z, z^{-1}]$ l'anello i polinomi di Laurent sugli interi nelle variabili a e z .

Allora $L_K \in \mathbb{Z}[a, a^{-1}, z, z^{-1}]$, e verifica i seguenti assiomi:

- i) Se K, K' sono equivalenti a meno di isotopia regolare, allora $L_K = L_{K'}$.
- ii) Valgono le seguenti relazioni skein per quaterne di diagrammi identici ovunque tranne nella parte evidenziata

$$\text{a) } L[\text{X}] + L[\text{X}] = z(L[\text{Y}] + L[\text{Z}])$$

$$\text{b) } L[\bigcirc] = 1$$

$$\text{c) } L[\text{D}] = aL[\text{A}]$$

$$\text{d) } L[\text{D}] = a^{-1}L[\text{A}]$$

Come già anticipato in precedenza, vedremo che questo è un invariante di isotopia regolare e può essere generalizzato ad invariante di isotopia ambiente come segue

Definizione. Definiamo $F_K \in \mathbb{Z}[a, a^{-1}, z, z^{-1}]$ per diagrammi di link orientati K come

$$F_K := a^{-w(K)} L_K$$

dove L_K di un diagramma orientato è definito dimenticando l'orientazione.

Proposizione 3.5. Il polinomio $F_K(a, z)$ è un invariante di isotopia ambiente

Dimostrazione. Segue dalla Proposizione 2.4 osservando che a è invertibile in $\mathbb{Z}[a, a^{-1}, z, z^{-1}]$. \square

3.2. Alcune proprietà del polinomio di Kauffman

Lemma 3.6. Sia K il diagramma di un link orientato e $m(K)$ il suo mirror. Allora abbiamo le seguenti relazioni

$$L_{m(K)}(a, z) = L_K(1/a, z) \quad F_{m(K)}(a, z) = F_K(1/a, z)$$

Dimostrazione. $m(K)$ è ottenuto da K scambiando tutti i suoi incroci quindi se analizziamo cosa succede nei vari assiomi solo vicino ad un certo incrocio otteniamo le seguenti relazioni

$$\begin{aligned} L[m(\bigcirc)] &= L[\bigcirc] = 1 \\ L[m(\overline{\mathcal{D}})] &= L[\overline{\mathcal{D}}] = a^{-1}L[\neg] \\ L[m(\overline{\mathcal{D}})] &= L[\overline{\mathcal{D}}] = aL[\neg] \end{aligned}$$

ed infine l'ultima relazione rimane invariata per la simmetria del polinomio di Kauffman

$$\begin{aligned} L[m(\times)] + L[m(\times)] &= z(L[m(\smile)] + L[m(\frown)]) \\ \Rightarrow L[\times] + L[\times] &= z(L[\smile] + L[\frown]) \\ \Rightarrow L[\times] + L[\times] &= z(L[\smile] + L[\frown]) \end{aligned}$$

quindi passare al mirror ha l'effetto di scambiare solamente a con $1/a$ ma il resto della valutazione rimane identica.

Infine per $F_{m(K)}$ basta osservare che $w(m(K)) = -w(K)$ per una motivazione analoga. \square

Prima di passare alla dimostrazione della buona definizione vediamo alcuni esempi di calcolo di L_K in modo “implicito”, questo può essere fatto scegliendo accuratamente i diagrammi in cui effettuare la valutazione attraverso le relazioni skein degli assiomi.

Ad esempio proviamo a ricavare il valore di $\delta := L[\bigcirc\bigcirc]$

$$\begin{aligned} L[\text{8}] + L[\text{8}] &= z(L[\text{8}] + L[\text{8}]) \\ \Rightarrow aL[\bigcirc] + a^{-1}L[\bigcirc] &= z(\delta + L[\bigcirc]) \\ \Rightarrow a + a^{-1} &= z(\delta + 1) \\ \Rightarrow \delta &= (a + a^{-1})/z - 1 \end{aligned}$$

Questo valore $\delta = (a + 1/a)/z - 1$ ricomparirà anche in seguito ed è il coefficiente che il polinomio di Kauffman introduce quando abbiamo più componenti disgiunte (ovvero $L[K_1 \sqcup K_2] = \delta L[K_1]L[K_2]$).

Possiamo anche trovare il valore per il link di Hopf come segue

$$\begin{aligned} L\left[\text{link of Hopf}\right] + L\left[\text{link of Hopf}\right] &= z\left(L\left[\text{link of Hopf}\right] + L\left[\text{link of Hopf}\right]\right) \\ \Rightarrow L\left[\text{link of Hopf}\right] + \delta &= z(a + a^{-1}) \\ \Rightarrow L\left[\text{link of Hopf}\right] &= -(a + a^{-1})z^{-1} + 1 + (a + a^{-1})z \end{aligned}$$

E ad esempio anche del nodo trifoglio:

$$\begin{aligned} L\left[\text{trifoglio}\right] + L\left[\text{trifoglio}\right] &= z\left(L\left[\text{trifoglio}\right] + L\left[\text{trifoglio}\right]\right) \\ \Rightarrow L\left[\text{trifoglio}\right] + a &= z\left(L\left[\text{link of Hopf}\right] + a^{-2}\right) \\ \Rightarrow L\left[\text{trifoglio}\right] &= -(2a + a^{-1}) + (1 + a^{-2})z + (a + a^{-1})z^2 \end{aligned}$$

Definizione. Diremo che un diagramma è **split** se è l'unione disgiunta di due diagrammi separati, in questo caso scriviamo $K = K_1 \sqcup K_2$ dove K_1 e K_2 sono le due componenti disgiunte.

Definizione. Un diagramma K è una **somma connessa** se appare come due diagrammi disgiunti connessi da due archi paralleli (a meno di isotopie planari). Tagliando questi due archi e riunendo insieme le estremità dello stesso sotto-diagramma otteniamo un nuovo diagramma split della forma $\tilde{K} = K_1 \sqcup K_2$, in questo caso chiamiamo la somma connessa $K = K_1 \# K_2$.

Fatto. Valgono le seguenti relazioni di L ed F per diagrammi split o in somma connessa

$$\begin{aligned} L[K_1 \sqcup K_2] &= \delta L[K_1]L[K_2] & F[K_1 \sqcup K_2] &= \delta F[K_1]F[K_2] \\ L[K_1 \# K_2] &= L[K_1]L[K_2] & F[K_1 \# K_2] &= F[K_1]F[K_2] \end{aligned}$$

dove $\delta = (a + a^{-1})/z - 1$ ed è lo stesso coefficiente che abbiamo trovato nell'esempio precedente.

3.3. Strumenti Forma Induttiva

Prima di descrivere la definizione induttiva diamo alcune definizioni per certe manipolazioni dei diagrammi di nodi e link.

Definizione. Sia K un diagramma di un nodo, \mathcal{U} la sua ombra planare² e $p \in \mathcal{U}$ un punto di partenza direzionato in \mathcal{U} .

- Il suo **nodo banale standard** (o *in forma discendente*) associato a K detto $\hat{K}(\mathcal{U}, p)$ è definito come segue: si prende il primo punto di partenza direzionato e si inizia a percorrere l'ombra planare in quella direzione e si rende ogni incrocio un sopra-incrocio quando ci si passa sopra per la prima volta.

Questa definizione si estende anche a diagrammi di link prendendo un insieme di punti base ordinati come mostrato in figura.

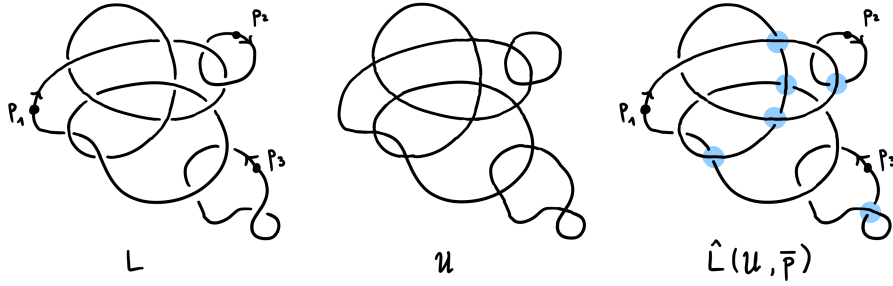


FIGURE 10. Un link con tre componenti e punti di partenza direzionati p_1, p_2, p_3 , con $\bar{p} = (p_1, p_2, p_3)$. In $\hat{L}(\mathcal{U}, \bar{p})$ sono evidenziati in **azzurro** gli incroci scambiati rispetto al link L .

- Definiamo ora le seguenti mosse su un diagramma, sia i l'etichetta di un incrocio del diagramma

$$\begin{array}{cccc}
 \begin{array}{c} \diagup \diagdown \\ \diagdown \diagup \end{array} & \begin{array}{c} \diagup \diagdown \\ \diagup \diagdown \end{array} & \begin{array}{c} \frown \\ \smile \end{array} & \begin{array}{c}) \\ (\end{array} \\
 K & S_i K & E_i K & e_i K
 \end{array}$$

in questo caso $S_i K$ scambia l'informazione sopra/sotto dell'incrocio, mentre $E_i K$ e $e_i K$ applicano gli **splice** orizzontali e verticali a quell'incrocio.

Sia $\lambda = (\lambda_n, \dots, \lambda_0)$ una sequenza di etichette di suoi incroci.

²Ovvero per $K \subset \mathbb{R}^3$ poniamo $\mathcal{U} := \pi(K) \subset \mathbb{R}^2$

- Definiamo le seguenti operazioni compatte per una sequenza di scambi seguita da uno splice finale

$$A_i^\lambda := E_{\lambda_i} S_{\lambda_{i-1}} \cdots S_{\lambda_0} \quad B_i^\lambda := e_{\lambda_i} S_{\lambda_{i-1}} \cdots S_{\lambda_0}$$

notiamo che per $i = 0$ abbiamo che $A_0^\lambda K = E_{\lambda_0} K$ e $B_0^\lambda K = e_{\lambda_0} K$ che è l'unico caso degenere per questa definizione.

- Poniamo $\hat{K}(\lambda) = S_{\lambda_n} \cdots S_{\lambda_0} K$ e definiamo le notazioni compatte per le seguenti somme alternate

$$\begin{aligned} \sum_K(\lambda) &:= \sum_{i=0}^n (-1)^i (L[A_i^\lambda K] + L[B_i^\lambda K]) \\ \Omega_K(\lambda) &:= (-1)^{|\lambda|+1} L[\hat{K}(\lambda)] + z \sum_K(\lambda) \end{aligned}$$

dove $|\lambda| := n$ per λ .

Osservazione. Se consideriamo un diagramma di link K , $\hat{K}(\mathcal{U}, p)$ ci induce una sequenza di scambi λ su K tale che $\hat{K}(\mathcal{U}, p) = S_{\lambda_n} \cdots S_{\lambda_0} K$.

Osservazione. Se abbiamo una sequenza di operazioni S_i, E_i, e_i su incroci diversi queste operazioni commutano tra loro. Questo segue dal fatto che queste operazioni fanno solo modifiche locali al diagramma.

Definizione. Dati K_1, K_2 diagrammi di link, diciamo che K_1 **sovrasta** K_2 se ogni incrocio tra K_1 e K_2 abbiamo che sono tutti sopra-incroci.

3.4. Forma Induttiva

Per prima cosa enunciamo un lemma che utilizzeremo più volte in seguito.

Lemma 3.7. Sia K un diagramma di un nodo in forma discendente, allora o è composto interamente da riccioli o ammette una sequenza di mosse di tipo II e III che portano al diagramma di un nodo formato solo da riccioli.

Dimostrazione. Per prima cosa osserviamo che K come nodo è equivalente ad un nodo banale. Esisterà quindi una sequenza di mosse di tipi I, II, III che porta il diagramma K al diagramma \bigcirc . Rimuovendo una alla volta da questa successione tutte le mosse di tipo I e modificando man mano le mosse II e III della successione

in modo da far passare i riccioli attraverso i fili (come visto in precedenza si può fare usando alcune mosse II e III) otteniamo una successione composta solamente da mosse II e III che ci porta ad un diagramma composto solamente da riccioli. \square

Vediamo ora l'idea che ci permette di trovare una formula chiusa per il polinomio L_K che utilizzeremo nella dimostrazione della buona definizione.

3.4.1. Caso base: nodo banale standard

Utilizzando il lemma precedente, possiamo calcolare esplicitamente $L_{\hat{K}(\mathcal{U}, p)}$ usando solo gli assiomi ii.b), ii.c), ii.d) ovvero quelli per $\overline{\cup}$, \cup e \bigcirc . Segue facilmente per induzione che $L_{\hat{K}}(a, z) = a^{w(K)}$.

3.4.2. Caso ricorsivo

Dato un diagramma di un nodo o link K , l'idea per la costruzione della definizione ricorsiva è di considerare il suo nodo o link discendente standard $\hat{K}(\mathcal{U}, p)$ rispetto ad un punto base p .

Questo induce una sequenza di indici λ che indichiamo con $\lambda = (0, \dots, n)$. Se applichiamo incrementalmente gli scambi a K , ovvero consideriamo $S_i \cdots S_0 K$ al variare di i , ed applichiamo la relazione skein ii.a) a questi diagrammi, otteniamo le seguenti relazioni:

$$\begin{aligned} L[K] + L[S_0 K] &= z(L[E_0 K] + L[e_0 K]) \\ L[S_0 K] + L[S_1 S_0 K] &= z(L[E_1 S_0 K] + L[e_1 S_0 K]) \\ &\vdots \\ L[S_{n-1} \cdots S_0 K] + L[\underbrace{S_n \cdots S_0 K}_{\hat{K}}] &= z(L[E_n S_{n-1} \cdots S_0 K] + L[e_n S_{n-1} \cdots S_0 K]) \end{aligned}$$

Ora, sommando e sottraendo membro a membro queste equazioni otteniamo la seguente identità

$$\begin{aligned} & \begin{array}{ccc} L[K] + L[S_0 K] & & z(L[E_0 K] + L[e_0 K]) \\ -(L[S_0 K] + L[S_1 S_0 K]) & & -z(L[E_1 S_0 K] + L[e_1 S_0 K]) \\ & \vdots & \vdots \\ & \vdots & \vdots \end{array} \\ & +(-1)^n (L[S_{n-1} \cdots S_0 K] + L[\hat{K}]) \quad = \quad \begin{array}{c} \\ \\ \\ +(-1)^n (z(L[E_n S_{n-1} \cdots S_0 K] + L[e_n S_{n-1} \cdots S_0 K])) \end{array} \end{aligned}$$

notiamo che possiamo cancellare tutti i termini del membro di sinistra che compaiono due volte con segno opposto

$$\begin{aligned}
 & L[K] + \cancel{L[S_0 K]} \quad \quad \quad z(L[E_0 K] + L[e_0 K]) \\
 & -(\cancel{L[S_0 K]} + \cancel{L[S_1 S_0 K]}) \quad \quad -z(L[E_1 S_0 K] + L[e_1 S_0 K]) \\
 & \quad \quad \quad \vdots = \quad \quad \quad \vdots \\
 & +(-1)^n (\cancel{L[S_{n-1} \cdots S_0 K]} + L[\hat{K}]) \quad \quad +(-1)^n (z(L[E_n S_{n-1} \cdots S_0 K] + L[e_n S_{n-1} \cdots S_0 K]))
 \end{aligned}$$

Da cui otteniamo un'espressione ricorsiva per L_K :

$$\begin{aligned}
 \Rightarrow L_K &= (-1)^{n+1} L_{\hat{K}} + z \sum_{i=0}^n (-1)^i (L[E_i S_{i-1} \cdots S_0 K] + L[e_i S_{i-1} \cdots S_0 K]) \\
 &= (-1)^{n+1} L_{\hat{K}} + z \sum_{i=0}^n (-1)^i (L[A_i^\lambda K] + L[B_i^\lambda K])
 \end{aligned} \tag{1}$$

Questo ci dà un'idea su come sia possibile calcolare induttivamente L_K in termini di $L_{\hat{K}}$ e di altri diagrammi con meno incroci del diagramma di partenza o più "vicini" a \hat{K} .

Affinché sia sempre possibile raggiungere un nodo in forma di nodo banale standard serve anche aggiungere la relazione

$$L_{K_1 \sqcup K_2} = \delta L_{K_1} L_{K_2} \tag{2}$$

per $K = K_1 \sqcup K_2$ con K_1 sovrastante³ K_2 .

sempre con $\delta = (a + a^{-1})/z - 1$.

3.4.3. La definizione induttiva

Definizione – Forma chiusa per L_K . Il polinomio $L_K(a, z)$ è definito induttivamente come segue, abbiamo i seguenti casi:

- i) Se $K = \hat{K}(\mathcal{U}, p)$ è un *nodo banale standard* per un qualche p allora

$$L_K(a, z) := a^{w(K)}$$

³Questo include anche il caso di componenti disgiunte in quanto sono sovrastanti a vuoto a vicenda.

- ii) Se $K = K_1 \cup K_2$ con K_1 diagramma di un nodo e K_2 diagramma di link ed abbiamo che K_1 *sovrasta* K_2 , allora poniamo

$$L(K_1 \cup K_2) := dL(K_1)L(K_2)$$

con $d := (a + a^{-1})/z - 1$.

- iii) Sia $K = K_1 \cup \dots \cup K_n$ e nessun K_i sovrasta tutti gli altri⁴ allora:

- a) Se K è composto da più componenti allora siano p_1, \dots, p_n dei punti di partenza direzionati su K_1, \dots, K_n e \bar{p}_i lo stesso punto di partenza p_i con la direzione opposta su K_i . Sia $\lambda(p_i)$ la sequenza di scambi di incroci di K_i con $K - K_i$ tale che $\hat{K}(\lambda(p_i)) = K_i \sqcup (K - K_i)$ tale che K_i sia *sovrastante* al resto delle componenti (chiameremo questa *sequenza di rialzo*). A questo punto possiamo definire L_K come

$$L_K(a, z) := \frac{1}{2n} \left[\sum_{i=1}^n \sum_{q=p_i, \bar{p}_i} \left((-1)^{|\lambda(q)|+1} dL_{K_i} L_{K-K_i} + z \sum_K (\lambda(q)) \right) \right]$$

- b) Se K è una singola componente allora sia p un punto di partenza direzionato su K e \bar{p} quello con direzione opposta. Sia $\lambda(p)$ la sequenza di scambi di incroci che lo porta al nodo banale standard \hat{K} e definiamo

$$L_K(a, z) := \frac{1}{2} \left[\sum_{q=p, \bar{p}} \left((-1)^{|\lambda(q)|+1} L(\hat{K}(\lambda(q))) + z \sum_K (\lambda(q)) \right) \right]$$

3.5. Dimostrazione buona definizione

Per prima cosa osserviamo che in ogni termine della definizione induttiva per L_K , quando questa dipende dalla scelta di un punto base, compaiono i termini per entrambe le direzioni. Dunque ci basta dimostrare induttivamente che le definizioni non dipendono dalla scelta di punto base.

Nel corso della dimostrazione tutti gli argomenti per induzione si baseranno sul numero di incroci dei diagrammi di link. Ometteremo i casi base, ovvero i controlli per diagrammi con pochi vertici che fanno partire l'induzione in quanto sono tutte semplici verifiche.

⁴Questo sicuramente accade altrimenti potremmo usare il punto ii).

Definizione – L'ipotesi induttiva. L'ipotesi induttiva che useremo nel corso della dimostrazione è la seguente:

Per ogni diagramma di link K con $< N$ incroci e diagrammi $\overline{\bigcirc}$ con meno di N incroci:

- a) L_K è ben definito (non dipende dalla scelta di punto base).
- b) L_K verifica gli assiomi:
 - $L[K] + L[S_i K] = z(L[e_i K] + L[E_i K])$
 - $L[\overline{\bigcirc}] = aL[\frown]$
 - $L[\bigcirc] = aL[\smile]$
- c) L_K è invariante per mosse di tipo II e III che non aumentano il numero di incroci.

Lemma 3.8. Sia $\lambda = (\lambda_n, \dots, \lambda_1, \lambda_0)$ una scelta di etichette per un sottoinsieme di incroci di un diagramma di link K . Sia $\mu = (\lambda_0, \lambda_n, \dots, \lambda_1)$ la stessa successione ma ruotata di 1 in avanti. Allora

$$\sum_K (\lambda) = \sum_K (\mu)$$

Dimostrazione. Per prima cosa rinominiamo le etichette $\lambda_n, \dots, \lambda_0$ come $n, \dots, 0$ per semplificare la notazione, dunque

$$\lambda = (n, n-1, \dots, 1, 0) \quad \mu = (0, n, n-1, \dots, 1)$$

ricordiamo ora le definizioni

$$\begin{aligned} \sum_K (\lambda) &= \sum_{i=0}^n (-1) (L[A_i^\lambda K] + L[B_i^\lambda K]) \\ &= (L[E_0 K] + L[e_0 K]) + \\ &\quad -(L[E_1 S_0 K] + L[e_1 S_0 K]) + \\ &\quad \vdots \\ &\quad + (-1)^n (L[E_n S_{n-1} \cdots S_0 K] + L[e_n S_{n-1} \cdots S_0 K]) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_K (\mu) &= \sum_{i=0}^n (-1) (L[A_i^\mu K] + L[B_i^\mu K]) \\ &= (L[E_1 K] + L[e_1 K]) + \\ &\quad -(L[E_2 S_1 K] + L[e_2 S_1 K]) + \\ &\quad \vdots \\ &\quad + (-1)^n (L[E_0 S_n \cdots S_1 K] + L[e_0 S_n \cdots S_1 K]) \end{aligned}$$

Calcoliamo ora $\sum_K(\lambda) - \sum_K(\mu)$, l'idea è di fattorizzare per “righe” i termini:

$$\begin{array}{ll}
(L[E_0K] + L[e_0K]) + & \\
-(L[E_1S_0K] + L[e_1S_0K]) + & (L[E_1K] + L[e_1K]) + \\
+(L[E_2S_1S_0K] + L[e_2S_1S_0K]) + & -(L[E_2S_1K] + L[e_2S_1K]) + \\
\vdots & +(L[E_3S_2S_1K] + L[e_3S_2S_1K]) + \\
+(-1)^n(L[E_nS_{n-1} \cdots S_0K] + L[e_nS_{n-1} \cdots S_0K]) & \vdots \\
& +(-1)^n(L[E_0S_n \cdots S_1K] + L[e_0S_n \cdots S_1K])
\end{array}$$

A questo punto per come sono allineate le somme alternate possiamo raggruppare ed otteniamo quanto segue:

$$\begin{aligned} \sum_K(\lambda) - \sum_K(\mu) = & +(L[E_0K] + L[e_0K]) + \\ & -(L[E_1S_0K] + L[e_1S_0K] + L[E_1K] + L[e_1K]) + \\ & \vdots \\ & +(-1)^n(L[E_nS_{n-1} \cdots S_1S_0K] + L[e_nS_{n-1} \cdots S_1S_0K] + \\ & \quad +L[E_nS_{n-1} \cdots S_1K] + L[e_nS_{n-1} \cdots S_1K]) + \\ & +(-1)^{n+1}(L[E_0S_n \cdots S_1K] + L[e_0S_n \cdots S_1K]) \end{aligned}$$

Permutando i termini di tutte le righe centrali possiamo riscriverli in modo da averli nella forma $L[\boxed{\dots}K] + L[\boxed{\dots}S_0K]$:

$$\begin{aligned}
 \sum_K(\lambda) - \sum_K(\mu) = & +(L[E_0K] + L[e_0K]) + \\
 & -(L[E_1K] + L[E_1S_0K] + L[e_1K] + L[e_1S_0K]) + \\
 & \vdots \\
 & (-1)^n(L[E_nS_{n-1} \cdots S_1K] + L[E_nS_{n-1} \cdots S_1S_0K] + \\
 & \quad + L[e_nS_{n-1} \cdots S_1K] + L[e_nS_{n-1} \cdots S_1S_0K]) \\
 & +(-1)^{n+1}(L[E_0S_n \cdots S_1K] + L[e_0S_n \cdots S_1K])
 \end{aligned}$$

Ora utilizziamo un'osservazione precedente riguardo l'ordine di applicazione delle operazioni da cui segue che $S_{n-1} \cdots S_1 S_0 K = S_0 S_{n-1} \cdots S_1 K$, dunque possiamo applicare l'induzione sostituendo:

$$\begin{aligned}
 L[\boxed{\cdots}] + L[S_i \boxed{\cdots}] &= z(L[E_i \boxed{\cdots}] + L[e_i \boxed{\cdots}]) \\
 \Rightarrow \sum_K(\lambda) - \sum_K(\mu) = & +(L[E_0K] + L[e_0K]) + \\
 & -z(L[E_0E_1K] + L[e_0E_1K] + L[E_0e_1K] + L[e_0e_1K]) + \\
 & \vdots \\
 & (-1)^n z(L[E_0E_nS_{n-1} \cdots S_1K] + L[e_0E_nS_{n-1} \cdots S_1K] + \\
 & \quad + L[E_0e_nS_{n-1} \cdots S_1K] + L[e_0e_nS_{n-1} \cdots S_1K]) \\
 & +(-1)^{n+1}(L[E_0S_n \cdots S_1K] + L[e_0S_n \cdots S_1K])
 \end{aligned}$$

Riordiniamo ora le operazioni e portiamo E_0 e e_0 all'inizio delle sequenze di operazioni:

$$\begin{aligned}
 = & +(L[E_0K] + L[e_0K]) + \\
 & -z(L[E_1 \ E_0K] + L[E_1 \ e_0K] + L[e_1 \ E_0K] + L[e_1 \ e_0K]) + \\
 & \vdots \\
 & (-1)^n z(L[E_nS_{n-1} \cdots S_1 \ E_0K] + L[E_nS_{n-1} \cdots S_1 \ e_0K] + \\
 & \quad + L[e_nS_{n-1} \cdots S_1 \ E_0K] + L[e_nS_{n-1} \cdots S_1 \ e_0K]) \\
 & +(-1)^{n+1}(L[S_n \cdots S_1 \ E_0K] + L[S_n \cdots S_1 \ e_0K])
 \end{aligned}$$

Ora distribuiamo tutti i termini che riguardano E_0K e poi tutti quelli per e_0K ed otteniamo quanto segue:

$$\begin{aligned}
 &= L[E_0K] + (-1)^{n+1}L[S_n \cdots S_1 E_0K] + \\
 &\quad -z\left((L[E_1 E_0K] + L[e_1 E_0K]) + \right. \\
 &\quad \left. -(L[E_2S_1 E_0K] + L[e_2S_1 E_0K]) + \right. \\
 &\quad \vdots \\
 &\quad \left. +(-1)^n(L[E_nS_{n-1}\cdots S_1 E_0K] + L[e_nS_{n-1}\cdots S_1 E_0K])\right) \\
 &+ L[e_0K] + (-1)^{n+1}L[S_n \cdots S_1 e_0K] + \\
 &\quad -z\left((L[E_1 e_0K] + L[e_1 e_0K]) + \right. \\
 &\quad \left. -(L[E_2S_1 e_0K] + L[e_2S_1 e_0K]) + \right. \\
 &\quad \vdots \\
 &\quad \left. +(-1)^n(L[E_nS_{n-1}\cdots S_1 e_0K] + L[e_nS_{n-1}\cdots S_1 e_0K])\right)
 \end{aligned}$$

Infine osserviamo che i termini in $z(\boxed{\dots})$ sono proprio le somme incrementali sugli scambi per i diagrammi E_0K e e_0K per le sequenze $(n, \dots, 1)$, dunque possiamo riscrivere l'espressione precedente come

$$\begin{aligned}
 &= L[E_0K] + (-1)^{n+1}L[S_n \cdots S_1 E_0K] - z \sum_{E_0K} ((n, \dots, 1)) \\
 &\quad + L[e_0K] + (-1)^{n+1}L[S_n \cdots S_1 e_0K] - z \sum_{e_0K} ((n, \dots, 1))
 \end{aligned}$$

Ora possiamo applicare l'ipotesi induttiva in quanto tutti i diagrammi hanno strettamente meno di N incroci. Applicando l'ipotesi induttiva per $\gamma = (n, \dots, 1)$ e osservando che con la convenzione di Kauffman $|\gamma| + 1 = (n - 1) + 1 = n$, otteniamo che

$$\begin{aligned}
 \Omega_{K(\gamma)} &= (-1)^{|\gamma|+1}L_{\widehat{K}(\gamma)} + z \sum_K (\gamma) \\
 &= (-1)^n L_{\widehat{K}(\gamma)} + z \sum_K (\gamma) \\
 \Rightarrow -\Omega_{K(\gamma)} &= (-1)^{n+1}L_{\widehat{K}(\gamma)} - z \sum_K (\gamma)
 \end{aligned}$$

infine sostituendo

$$\begin{aligned}
 &= L[E_0 K] - \Omega_{E_0 K}(\gamma) + L[e_0 K] - \Omega_{e_0 K}(\gamma) \\
 &= 0 + 0 = 0
 \end{aligned}$$

E questo conclude la dimostrazione. \square

Corollario. Nella definizione della forma chiusa di L_K , il caso iii.a) non dipende dalla scelta del punto base.

Dimostrazione. Rivediamo l'espressione in questione, siano p_i dei punti base direzionati sulle componenti di K

$$L_K(a, z) := \frac{1}{2n} \left[\sum_{i=1}^n \sum_{q=p_i, \bar{p}_i} \left((-1)^{|\lambda(q)|+1} dL_{K_i} L_{K-K_i} + z \sum_K (\lambda(q)) \right) \right]$$

le espressioni che dipendono dai punti base sono $(-1)^{|\lambda(q)|+1}$ e le somme sugli scambi $\sum_K (\lambda(q))$. Se applichiamo una 1-rotazione alle sequenze di rialzo $\lambda(q)$ le lunghezze non cambiano ed abbiamo appena mostrato che $\sum_K (\lambda(q))$ è invariante per 1-rotazioni.

A questo punto possiamo estendere l'invarianza per 1-rotazioni a tutte le possibili permutazioni cicliche e questo ci dimostra che questo caso non dipende dalla scelta del punto base. \square

TODO

work in progress

Bibliografia

- [1] Jkasd, “Wild_knot.svg.” [Online]. Available: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Wild_knot.svg
- [2] R. Crowell and R. Fox, *Introduction to Knot Theory*. in Graduate Text in Mathematics. Springer New York, 1977.
- [3] L. H. Kauffman, “An invariant of regular isotopy,” *Trans. Am. Math. Soc.*, vol. 318, no. 2, pp. 417–471, 1990.