Università di Pisa

**Dipartimento di Matematica**
**Corso di Laurea Triennale in Matematica**

Tesi di Laurea

# Il polinomio di Kauffman: un invariante di isotopia regolare

Relatore:
**Prof. Paolo Lisca**

Candidato:
**Antonio De Lucreziis**

**Anno Accademico 2024/2025**

## Abstract

In questa tesi tratteremo del polinomio di Kauffman, un invariante di nodi e link di isotopia regolare. Introdurremo dei risultati di fondazione della teoria dei nodi per definire l'isotopia regolare. Infine vedremo la dimostrazione della buona definizione del polinomio di Kauffman a partire dalla forma assiomatica. Per il progetto di Laboratorio Computazionale abbiamo implementato in Python questo polinomio e verificato tutti i valori presenti nel database di KnotInfo e trovato un errore nel calcolo del nodo $10_{125}$.


## Indice


1. Introduzione . . . 3
   1.1. Introduzione alla Teoria dei Nodi . . . 3
   1.2. Proiezioni e Diagrammi . . . 6
   1.3. Operazioni su Diagrammi . . . 8
2. Isotopia Regolare . . . 9
   2.1. Writhe . . . 10
   2.2. Da isotopia regolare ad ambiente . . . 13
3. Il Polinomio di Kauffman . . . 14
   3.1. Definizione assiomatica . . . 15
   3.2. Alcune proprietà del polinomio di Kauffman . . . 15
   3.3. Strumenti Forma Induttiva . . . 18
   3.4. Forma Induttiva . . . 19
   3.5. Dimostrazione buona definizione . . . 22
4. Bibliografia . . . 35

Capitolo 1

# Introduzione

## 1.1. Introduzione alla Teoria dei Nodi

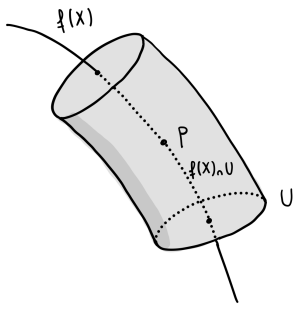
Ora introdurremo alcuni risultati fondamentali di teoria dei nodi. Vedremo le definizioni di nodo e link ed alcuni risultati di fondazione che ci serviranno per poter parlare ad esempio dei diagrammi planari e dell'isotopia regolare.

**Definizione.** Dati $X, Y$ spazi topologici, $f : X \to Y$ continua si dice **embedding** se $X$ è omeomorfo a $f(X) \subset Y$ con la topologia di sottospazio indotta da $Y$.

**Fatto.** Dati $X$, $Y$ spazi topologici con $X$ compatto, $Y$ di Hausdorff e data un'applicazione continua $f : X \to Y$ allora $f$ è un embedding $\Leftrightarrow$ è iniettiva.

**Definizione.** Dato un embedding $f : X \to Y$, un punto $p \in X$ allora $f$ si dice **localmente piatto** in $p$ se $\exists U \subset \mathbb{R}^3$ intorno di $p$, tale che

$$\begin{array}{rcl} U & \approx & \mathbb{D}^2 \times [0,1] \\ U \cap f(X) & \leftrightarrow & \{0\} \times [0,1] \end{array}$$



inoltre $f$ si dice embedding **localmente piatto** se lo è in ogni punto di $X$.

**Definizione.** Un **nodo tame** è un sottoinsieme $K \subset \mathbb{R}^3$ per cui esiste un embedding $f : \mathbb{S}^1 \hookrightarrow \mathbb{R}^3$ localmente piatto con $K = f(\mathbb{S}^1)$. In questo caso $f$ è anche detto **embedding tame**.

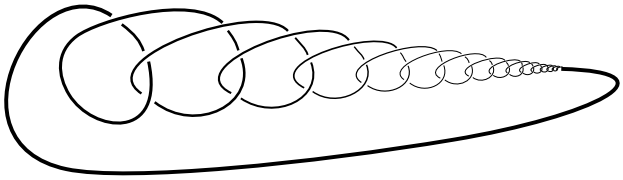


FIGURE 1. Un esempio di nodo non tame

Esistono anche nodi non tame come quello riportato nella figura precedente [1], ma d'ora in avanti considereremo solo nodi tame.

**Definizione.** Due nodi $K_0, K_1 \subset \mathbb{R}^3$ sono **equivalenti** se esiste un'**isotopia ambiente** $H$ che porta uno nell'altro, ovvero esiste $H : \mathbb{R}^3 \times [0,1] \to \mathbb{R}^3$ applicazione continua, tale che

- $\forall t \in [0,1], H(\cdot, t)$ è un omeomorfismo

e ponendo $H_t(x) \coloneqq H(x,t)$ si ha

- $H_0 = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}$
- $H_1(K_0) = K_1$

Inoltre se due nodi sono equivalenti allora vale che $\mathbb{R}^3 \setminus K_0 \approx \mathbb{R}^3 \setminus K_1$.

Spesso serve fare manipolazioni direttamente sui nodi o sui diagrammi e lavorare con gli embedding $\mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}^3$ non è molto comodo da un punto di vista formale e pratico, per questo motivo introduciamo i *nodi poligonali* che ci permettono di dare una formalizzazione alternativa dei nodi tame più operativa.

**Definizione.** Un **nodo poligonale** è un nodo equivalente ad un'unione finita di segmenti lineari.

**Fatto – Crowell [2].** Dato un nodo $K \subset \mathbb{R}^3$, $K$ è tame $\Leftrightarrow$ $K$ è poligonale.

**Definizione.** Il **nodo banale** è la classe di equivalenza del bordo di un triangolo equilatero.

Passiamo ora al caso in cui abbiamo un nodo con più di una componente

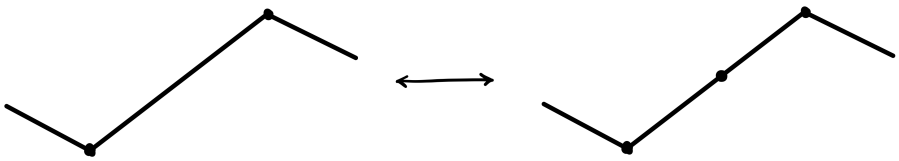
**Definizione.** $L \subset \mathbb{R}^3$ è detto **link** se $\exists$ embedding $f : \mathbb{S}^1 \cup \cdots \cup \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}^3$ localmente piatto con immagine $L$.

Possiamo generalizzare tutte le definizioni che diamo per i nodi ai link, sostituendo $\mathbb{S}^1$ con $\mathbb{S}^1 \cup \cdots \cup \mathbb{S}^1$ e apportando le giuste modifiche.

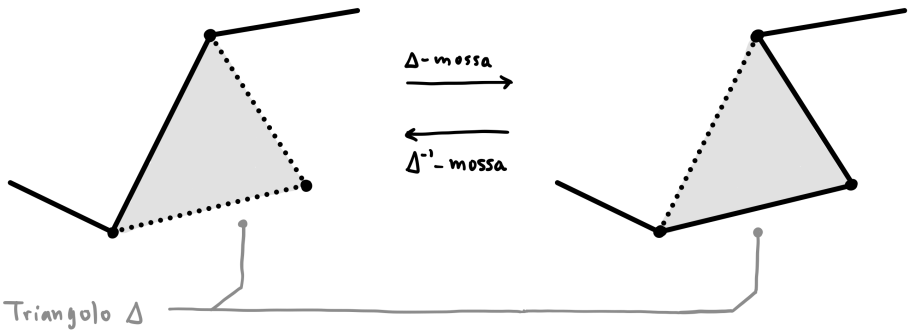
Introduciamo ora il concetto di equivalenza combinatoria di link poligonali in $\mathbb{R}^3$; questo è il primo passo che ci permetterà di descrivere l'equivalenza per isotopia ambiente tra nodi attraverso una sequenza finita di mosse.

**Definizione.** Due link $L_1, L_2$ sono **combinatorialmente equivalenti** se si ottengono uno dall'altro tramite un numero finito delle seguenti mosse:

i) Aggiunta/rimozione di vertici



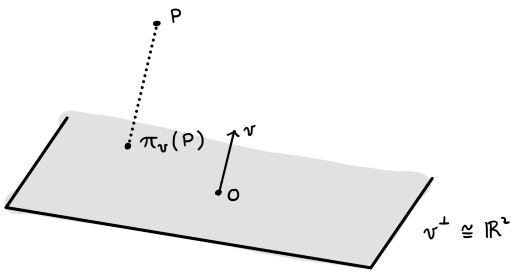
ii) Dato un triangolo piano $\Delta \subset \mathbb{R}^3$ tale che $\Delta \cap L$ sia un lato di $\Delta$ ed un segmento di $L$ allora una $\Delta$-**mossa** è la seguente




**Fatto.** Due link poligonali $L_1, L_2 \subset \mathbb{R}^3$ sono equivalenti $\Leftrightarrow$ sono combinatorialmente equivalenti.

## 1.2. Proiezioni e Diagrammi

Data una direzione $v \in \mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$, possiamo definire $\pi_v : \mathbb{R}^3 \to v^\perp$ proiezione sul piano ortogonale a $v$ come nella seguente figura:




Per formalizzare il concetto di diagramma di un nodo introdurremo il concetto di proiezione regolare, ovvero una proiezione in cui i punti di intersezione tra le immagini dei segmenti di $L$ sono solamente gli incroci del nodo (e senza segmenti paralleli alla direzione di proiezione).

**Definizione.** Sia $L \subset \mathbb{R}^3$ un link, $v \in \mathbb{S}^2$ una direzione e $\pi_v : \mathbb{R}^3 \to v^\perp$ la proiezione su $v^\perp$ come in precedenza. Allora un punto $x \in \pi(L) \subset v^\perp$ si dice

- **regolare** se $\left|\pi^{-1}(x)\right| = 1$
- **singolare** se $\left|\pi^{-1}(x)\right| > 1$
- **doppio** se $\left|\pi^{-1}(x)\right| = 2$

**Fatto.** Dato un link poligonale $L \subset \mathbb{R}^3$, esiste un aperto denso $U \subset \mathbb{S}^2$ tale che $\forall v \in U$ si ha che

i) $L$ non ha segmenti paralleli a $v$.

ii) Se $x \in \pi_v(L)$ è singolare allora

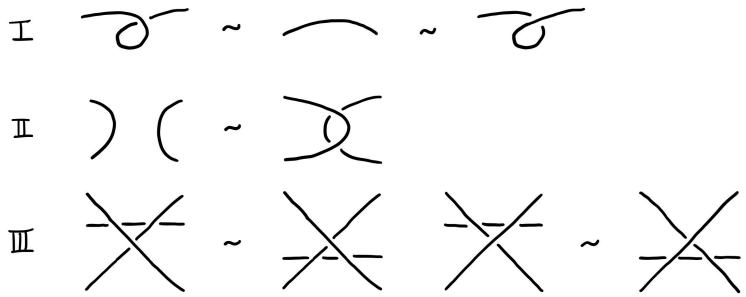
- $\pi_v^{-1}(x)$ non contiene vertici di $L$
- $x$ è un punto doppio
- $x$ è un punto di intersezione trasversa delle immagini di due segmenti

Quindi dato $L \subset \mathbb{R}^3$ link poligonale, esiste una proiezione regolare $\pi(L) \subset \mathbb{R}^2$ con un numero finito di punti singolari, ciascuno dei quali è un punto doppio e di intersezione trasversa. Ognuno di questi punti doppi viene detto **incrocio**.

**Definizione.** Un **diagramma** $D \subset \mathbb{R}^2$ di un link $L \subset \mathbb{R}^3$ è l'immagine di $L$ attraverso una proiezione regolare decorata con l'informazione sopra/sotto ad ogni incrocio.

**Fatto.** Due link con stesso diagramma sono equivalenti.

**Definizione.** Le mosse I, II, III (e le loro inverse) sono dette **mosse di Reidemeister**.



**Teorema (di Reidemeister) 1.1.** Due diagrammi di link equivalenti sono collegati da una successione finita di isotopie planari e mosse di Reidemeister.

Il modo principale in cui utilizzeremo il teorema di Reidemeister è attraverso la seguente proprietà. Indichiamo con $\mathscr{D}$ l'insieme dei diagrammi di nodi e link.

**Proposizione 1.1.** Data una funzione $\varphi : \mathscr{D} \to S$ con $S$ un insieme (eventualmente con una qualche struttura come quella di anello) con la proprietà che $D \sim D' \Rightarrow \varphi(D) = \varphi(D')$ allora se $\varphi(D) \neq \varphi(D') \Rightarrow D \nsim D'$, in particolare se $D, D'$ sono diagrammi per $K, K'$ allora $K \nsim K'$.

*Dimostrazione.* È semplicemente la forma contronominale del teorema di Reidemeister. □

Funzioni con la stessa proprietà di $\varphi$ sono quindi invarianti di nodi o link per isotopia ambiente e ci danno un modo di distinguerli. Più avanti vedremo ad esempio il polinomio $F_K(a, z) : \mathscr{D} \to \mathbb{Z}[a, a^{-1}, z, z^{-1}]$ che risulterà essere un invariante di isotopia ambiente per link orientatati.

Come abbiamo generalizzato da nodi a link possiamo ripetere tutto anche aggiungendo un'orientazione e studiare **nodi e link orientati** ed abbiamo anche una versione orientata del teorema di Reidemeister.

## 1.3. Operazioni su Diagrammi

**Definizione.** Dato un link $L \subset \mathbb{R}^3$ possiamo definire

- Il **mirror** $m(L) := \rho(L)$ dove $\rho : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ è la riflessione rispetto al piano di proiezione. In particolare dato un diagramma, il suo mirror è lo stesso diagramma con tutte le informazioni sopra/sotto scambiate.

inoltre, se diamo anche un'*orientazione* ad $L$ possiamo definire

- Il **reverse** $r(L)$, in cui prendiamo l'orientazione opposta su ogni componente.
- L'**inverso** $-L := m(r(L)) = r(m(L))$.

**Definizione.** Sia $K \subset \mathbb{R}^3$, se $K$ non è equivalente a $m(K)$ allora diciamo che $K$ è **chirale**, altrimenti è detto **anfichirale**.

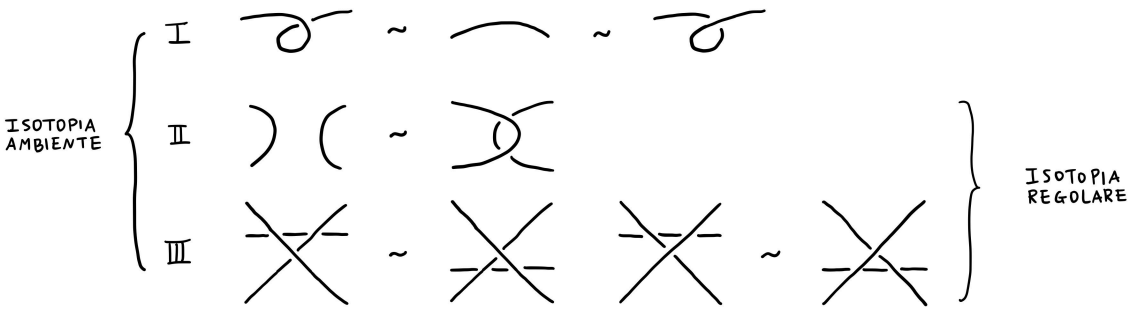
## Capitolo 2

# Isotopia Regolare

Il teorema di Reidemeister ci dice che due nodi sono equivalenti a meno di isotopia ambiente se e solo se lo sono anche dei loro diagrammi a meno di isotopie planari e mosse I, II e III.

Possiamo chiederci cosa succede se ci restringiamo all'equivalenza generata solo dalle isotopie planari e dalle mosse II e III, questo ci dà una nuova equivalenza tra nodi più stringente dell'isotopia ambiente.

**Definizione.** Due diagrammi $D_1$, $D_2$ di nodi o link si dicono equivalenti a meno di **isotopia regolare** se e solo se sono equivalenti a meno di isotopie planari e mosse II e III di Reidemeister.



Una prima cosa che possiamo notare è che tutte le mosse di tipo I, quelle che introducono quelli che chiameremo **riccioli**, possono passare sopra o sotto altri fili senza problemi applicando le seguenti mosse

Quindi i riccioli possono essere spostati liberamente e non ci impediscono di applicare mosse di tipo II o III. In particolare questo ci permette anche di "fattorizzare" tutti i riccioli di una componente in modo che siano tutti vicini.

Un'altra osservazione sul comportamento dell'isotopia regolare rispetto alle mosse di tipo I è la seguente. Quando abbiamo una coppia di riccioli con segni opposti abbiamo la seguente proprietà di cancellazione detto *trucco di Whitney*.

Un'altra osservazione importante che possiamo fare quando si parla di isotopia regolare è che quest'ultima è equivalente all'isotopia di *link con framing*[1]. In particolare l'isotopia regolare preserva il framing del nodo.

Questo sarà importante più avanti quando vedremo invarianti come il polinomio $F_K$ che risulteranno essere invarianti per isotopia ambiente. Nel caso del polinomio $F_K$, il calcolo va fatto fissando un particolare diagramma del link. È tutt'ora un problema aperto dare una definizione "intrinseca" di $F_K$ senza usare diagrammi.

## 2.1. Writhe

Vediamo ora un primo invariante di isotopia regolare per link orientati, per prima cosa definiamo il segno di un incrocio.

[1]Nel caso di nodi come embedding da $\mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^3$, un **nodo con framing** è un embedding di $\mathbb{D}^2 \times \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^3$. Il **framing** del nodo è l'immagine di $I \times \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^3$. Un nodo con framing può essere visto come una banda embedded dove il framing è il numero di twist con segno.

**Definizione.** Dato un incrocio del diagramma di un link orientato ci possono essere due casi in base alla direzione in cui il filo sotto si trova rispetto a quello sopra. Definiamo **il segno** di un incrocio in base a questi casi come segue

$$\varepsilon\Big(\diagup\!\!\!\!\diagdown\Big) = +1 \qquad \varepsilon\Big(\diagdown\!\!\!\!\diagup\Big) = -1$$

**Definizione.** Dato $K$ link orientato, il **writhe** $w(K)$ o numero di avvolgimento è dato dalla somma dei segni dei suoi incroci

$$w(K) := \sum_{c \text{ incrocio}} \varepsilon(c)$$

**Proposizione 2.2.** Se $K$ è il diagramma di un nodo, il writhe non dipende dall'orientazione.

*Dimostrazione.* Basta ricondurci a controllare cosa succede quando applichiamo il cambio dell'orientazione in $\varepsilon$:

$$\varepsilon\Big(\diagdown\!\!\!\!\diagup\Big) = \varepsilon\Big(\diagup\!\!\!\!\diagdown\Big) = +1$$
$$\varepsilon\Big(\diagup\!\!\!\!\diagup\Big) = \varepsilon\Big(\diagdown\!\!\!\!\diagdown\Big) = -1$$

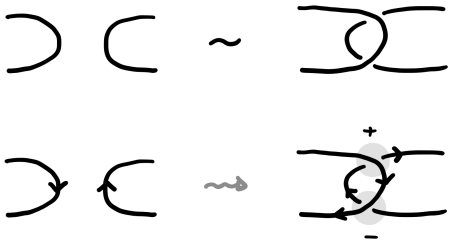
Nel primo caso invertendo le due frecce il filo che passa sotto va sempre verso sinistra rispetto a quello sopra quindi il segno rimane invariato, il secondo caso è analogo. □

Questo risultato può essere generalizzato a diagrammi di link con l'accortezza di invertire l'orientazione di tutte le componenti (o anche solamente tutte quelle che appartengono ad una sola componente connessa della sua ombra planare).

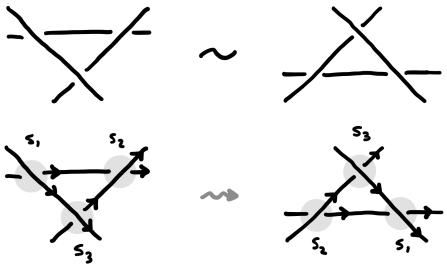
**Proposizione 2.3.** Il writhe è un invariante di isotopia regolare, ovvero se $K_1, K_2$ sono diagrammi di link equivalenti a meno di isotopia regolare allora $w(K_1) = w(K_2)$.

*Dimostrazione.* Controlliamo cosa succede nel caso delle mosse di tipo II e III:

- Nel caso della mossa II si può vedere che indipendentemente dalle orientazioni dei due fili, quando portiamo uno sopra l'altro compaiono sempre due incroci con segni opposti quindi per additività del writhe la somma totale non cambia.




- Per quanto riguarda la mossa III, il numero di incroci non cambia quindi basta controllare che la somma sia la stessa




Come possiamo notare nel caso mostrato in figura ciò che accade è che stiamo solo spostando e scambiando alcuni degli incroci tra loro. In particolare possiamo identificare ogni incrocio come l'intersezione di due delle tre rette, dopo aver applicato la mossa III le rette si saranno spostate ma le orientazioni saranno sempre le stesse e quindi anche i segni degli incroci.

Inoltre notiamo che il writhe non è influenzato dalle isotopie planari quindi questo conclude la dimostrazione. □

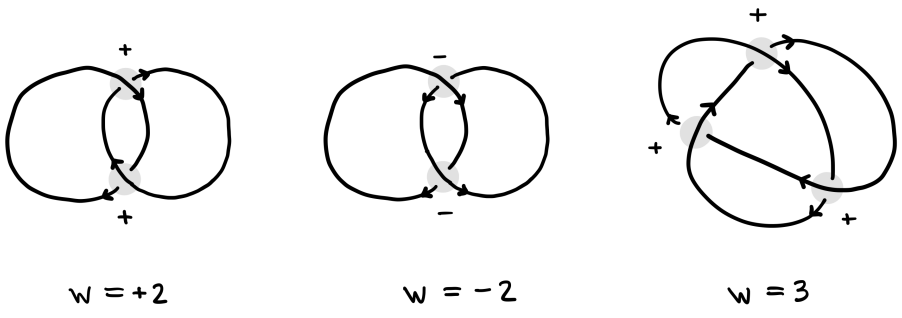



FIGURE 9. Esempi di calcolo del writhe

## 2.2. Da isotopia regolare ad ambiente

Un primo fatto generale che possiamo vedere è che, dato un invariante di isotopia regolare per diagrammi che si comporta "bene" rispetto alle mosse di tipo I, possiamo costruire un invariante di isotopia ambiente per link aggiungendo un fattore di correzione dato dal writhe.

**Proposizione 2.4.** Sia $R$ un anello, $a \in R$ un elemento invertibile e $K$ un link orientato, $\mathscr{D}$ l'insieme dei diagrammi di link orientatati, allora se $L : \mathscr{D} \to R$ è un invariante di isotopia regolare tale che

$$L\Big(\;\Big) = aL\Big(\;\Big) \qquad L\Big(\;\Big) = a^{-1}L\Big(\;\Big)$$

allora $F(K) := a^{-w(K)}L(K)$ è un invariante di isotopia ambiente.

**Osservazione.** In questo caso la notazione "$L(\;) = aL(\;)$" indica che ci sono due diagrammi $D_1, D_2$ identici ovunque tranne che nella parte evidenziata.

*Dimostrazione.* Per prima cosa notiamo che $w(K)$ è invariante per isotopia regolare, dunque lo è anche $a^{-w(K)}$. Osserviamo che $a^{-w(K)} \cdot L(K)$ è un prodotto di quantità invarianti per isotopia regolare dunque anche $F(K)$ è invariante per isotopia regolare.

Dunque basta controllare che $F(K)$ sia invariante rispetto alle mosse di tipo I. Per prima cosa osserviamo che

$$w\Big(\;\Big) = w\Big(\;\Big) + 1 \qquad w\Big(\;\Big) = w\Big(\;\Big) - 1$$

ed usando la proprietà dell'ipotesi otteniamo

$$\begin{aligned} F\Big(\;\Big) &= a^{-w(\;)} \cdot L\Big(\;\Big) \\ &= a^{-w(\;)-1} \cdot a \cdot L\Big(\;\Big) \\ &= a^{-w(\;)} \cdot \cancel{a^{-1}} \cdot \cancel{a} \cdot L\Big(\;\Big) \\ &= a^{-w(\;)} \cdot L\Big(\;\Big) = F\Big(\;\Big) \end{aligned}$$

e analogamente segue anche per l'altro ricciolo che $F\Big(\;\Big) = F\Big(\;\Big)$. □

## Capitolo 3

# Il Polinomio di Kauffman

Ora introdurremo il polinomio di Kauffman [3], che vedremo essere un invariante di isotopia regolare. Questo polinomio è definito in modo implicito da assiomi che utilizzano le relazioni skein, queste relazioni possono essere utilizzate direttamente per calcolare il polinomio di Kauffman per un certo diagramma sia in modo implicito che sfruttando una valutazione che porta man mano verso un nodo banale standard.

Vedremo come questi assiomi definiscono un unico invariante di isotopia regolare ben definito e come $L_K(a, z)$ può essere generalizzato ad un invariante di isotopia ambiente $F_K(a, z)$.

**Notazione.** Per rendere alcune calcoli più leggibili, in questo capitolo utilizzeremo in modo intercambiabile le notazioni $L_K$ e $L[K]$ per indicare le valutazioni di $L$ in un certo diagramma.

## 3.1. Definizione assiomatica

**Definizione.** Dato $K$ il diagramma di il diagramma di un link non orientato, e sia $\mathbb{Z}[a, a^{-1}, z, z^{-1}]$ l'anello i polinomi di Laurent sugli interi nelle variabili $a$ e $z$, allora $L_K \in \mathbb{Z}[a, a^{-1}, z, z^{-1}]$, e verifica i seguenti assiomi:

i) Se $K, K'$ sono equivalenti a meno di isotopia regolare, allora $L_K = L_{K'}$.

ii) Valgono le seguenti relazioni skein per quaterne di diagrammi identici ovunque tranne che nei punti indicati

a) $L\left(\times\right) + L\left(\times\right) = z\left(L\left(\asymp\right) + L\left(\right)\ \left(\right)\right)$

b) $L\left(\bigcirc\right) = 1$

c) $L\left(\text{⌒}\right) = aL\left(\text{⌒}\right)$

d) $L\left(\text{⌒}\right) = a^{-1}L\left(\text{⌒}\right)$

Come già anticipato in precedenza, vedremo che questo è un invariante di isotopia regolare e può essere generalizzato ad invariante di isotopia ambiente come segue

**Definizione.** Definiamo $F_K \in Z[a, a^{-1}, z, z^{-1}]$ per diagrammi orientati $K$ come

$$F_K := a^{-w(K)} L_K$$

dove $L_K$ di un diagramma orientato è definito dimenticando l'orientazione.

**Proposizione 3.5.** Il polinomio $F_K(a, z)$ è un invariante di isotopia ambiente

*Dimostrazione.* Segue dalla Proposizione 2.4. □

## 3.2. Alcune proprietà del polinomio di Kauffman

**Lemma 3.6.** Sia $K$ il diagramma di un link orientato e $m(K)$ il suo mirror. Allora abbiamo le seguenti relazioni

$$L_{m(K)}(a, z) = L_K(1/a, z) \qquad F_{m(K)}(a, z) = F_K(1/a, z)$$

*Dimostrazione.* $m(K)$ è ottenuto da $K$ scambiando tutti i suoi incroci quindi se analizziamo cosa succede nei vari assiomi solo vicino ad un certo incrocio otteniamo le seguenti relazioni

$$L\Big[m\Big(\bigcirc\Big)\Big] = L\Big[\bigcirc\Big] = 1$$

$$L\Big[m\Big(\;\cup\!\!\cap\;\Big)\Big] = L\Big[\;\cup\!\!\cap\;\Big] = a^{-1}L\Big[\frown\Big]$$

$$L\Big[m\Big(\;\cup\!\!\cap\;\Big)\Big] = L\Big[\;\cup\!\!\cap\;\Big] = aL\Big[\frown\Big]$$

ed infine l'ultima relazione rimane invariata per la simmetria del polinomio di Kauffman

$$L\Big[m\Big(\times\Big)\Big] + L\Big[m\Big(\times\Big)\Big] = z\Big(L\Big[m\Big(\smile\!\!\frown\Big)\Big] + L\Big[m\Big(\,\big)\;\big(\,\Big)\Big]\Big)$$

$$\Rightarrow L\Big[\times\Big] + L\Big[\times\Big] = z\Big(L\Big[\smile\!\!\frown\Big] + L\Big[\,\big)\;\big(\,\Big]\Big)$$

$$\Rightarrow L\Big[\times\Big] + L\Big[\times\Big] = z\Big(L\Big[\smile\!\!\frown\Big] + L\Big[\,\big)\;\big(\,\Big]\Big)$$

quindi passare al mirror ha l'effetto di scambiare solamente $a$ con $1/a$ ma il resto della valutazione rimane identico.

Infine per $F_{m(K)}$ basta osservare che $w(m(K)) = -w(K)$ per una motivazione analoga. □

Prima di passare alla dimostrazione della buona definizione vediamo alcuni esempi di calcolo di $L_K$ in modo "implicito", questo può essere fatto scegliendo accuratamente i diagrammi in cui effettuare la valutazione attraverso le relazioni skein degli assiomi.

Ad esempio proviamo a ricavare il valore di $\delta := L\Big[\bigcirc\bigcirc\Big]$

$$L\Big[\infty\Big] + L\Big[\infty\Big] = z\Big(L\Big[\infty\Big] + L\Big[\infty\Big]\Big)$$

$$\Rightarrow aL\Big[\bigcirc\Big] + a^{-1}L\Big[\bigcirc\Big] = z\Big(\delta + L\Big[\bigcirc\Big]\Big)$$

$$\Rightarrow a + a^{-1} = z(\delta + 1)$$

$$\Rightarrow \delta = (a + a^{-1})/z - 1$$

Questo valore $\delta = (a + 1/a)/z - 1$ ricomparirà anche in seguito ed è il coefficiente che il polinomio di Kauffman introduce quando abbiamo più componenti disgiunte. Possiamo anche trovare il risultato per il link di Hopf come segue

$$L\Big[\quad\Big] + L\Big[\quad\Big] = z\Big(L\Big[\quad\Big] + L\Big[\quad\Big]\Big)$$
$$\Rightarrow L\Big[\quad\Big] + \delta = z(a + a^{-1})$$
$$\Rightarrow L\Big[\quad\Big] = -(a + a^{-1})z^{-1} + 1 + (a + a^{-1})z$$

E del nodo trifoglio

$$L\Big[\quad\Big] + L\Big[\quad\Big] = z\Big(L\Big[\quad\Big] + L\Big[\quad\Big]\Big)$$
$$\Rightarrow L\Big[\quad\Big] + a = z\Big(L\Big[\quad\Big] + a^{-2}\Big)$$
$$\Rightarrow L\Big[\quad\Big] = -(2a + a^{-1}) + (1 + a^{-2})z + (a + a^{-1})z^2$$

**Definizione.** Diremo che un diagramma è *split* se è l'unione disgiunta di due diagrammi separati, in questo caso scriviamo $K = K_1 \sqcup K_2$ dove $K_1$ e $K_2$ sono le due componenti disgiunte.

**Definizione.** Un diagramma $K$ è una **somma connessa** se appare come due diagrammi disgiunti connessi da due archi paralleli (a meno di isotopie planari). Tagliando questi due archi e riunendo insieme le estremità dello stesso sottodiagramma otteniamo un nuovo diagramma split della forma $\tilde{K} = K_1 \sqcup K_2$, in questo caso chiamiamo la somma connessa $K = K_1 \# K_2$.

**Proposizione 3.7.** Valgono le seguenti relazioni di $L$ ed $F$ per diagrammi split o in somma connessa

$$L[K_1 \sqcup K_2] = \delta L[K_1]L[K_2] \qquad F[K_1 \sqcup K_2] = \delta F[K_1]F[K_2]$$
$$L[K_1 \# K_2] = L[K_1]L[K_2] \qquad F[K_1 \# K_2] = F[K_1]F[K_2]$$

dove $\delta = (a + a^{-1})/z - 1$ ed è lo stesso coefficiente che abbiamo trovato nell'esempio precedente.

## 3.3. Strumenti Forma Induttiva

Prima di passare a descrivere la definizione induttiva diamo alcune definizioni di manipolazioni di un diagramma.

**Definizione.** Sia $K$ un diagramma di un nodo, $\mathcal{U}$ la sua ombra planare[2] e $p \in \mathcal{U}$ un punto di partenza direzionato in $\mathcal{U}$.

- Il suo **nodo banale standard** associato detto $\hat{K}(\mathcal{U}, p)$ è definito come segue: si prende il primo punto di partenza direzionato e si inizia a percorrere l'ombra planare in quella direzione e si rende ogni incrocio un sopra-incrocio quando ci si passa sopra per la prima volta.

  Questa definizione si estende anche a diagrammi di link prendendo un insieme di punti base ordinati come mostrato in figura.

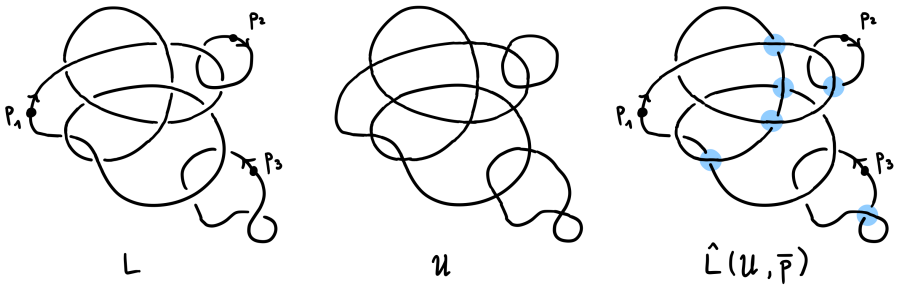
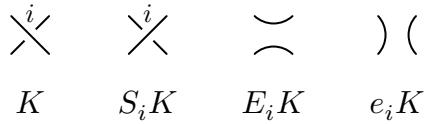



FIGURE 10. Un link con tre componenti e punti di partenza direzionati $p_1, p_2, p_3$, con $\overline{p} = (p_1, p_2, p_3)$. In $\hat{L}(\mathcal{U}, \overline{p})$ sono evidenziati in azzurro gli incroci scambiati rispetto al link $L$.

- Definiamo ora le seguenti mosse su un diagramma, sia $i$ l'etichetta di un incrocio del diagramma




  in questo caso $S_iK$ scambia l'informazione sopra/sotto dell'incrocio, mentre $E_iK$ e $e_iK$ applicano gli **splice** orizzontali e verticali a quell'incrocio.

[2] Ovvero per $K \subset \mathbb{R}^3$ poniamo $U := \pi(K) \subset \mathbb{R}^2$

Sia ora $\lambda = (\lambda_n, ..., \lambda_0)$ una sequenza di etichette di suoi incroci.

- Definiamo le seguenti operazioni compatte per una sequenza di scambi seguita da uno splice finale

$$A_i^\lambda = E_{\lambda_i} S_{\lambda_{i-1}} \cdots S_{\lambda_0} \qquad B_i^\lambda = e_{\lambda_i} S_{\lambda_{i-1}} \cdots S_{\lambda_0}$$

  notiamo che per $i = 0$ abbiamo che $A_0^\lambda K = E_{\lambda_0} K$ e $B_0^\lambda K = e_{\lambda_0} K$ che è l'unico caso degenere per questa definizione.

- Poniamo $\hat{K}(\lambda) = S_{\lambda_n} \cdots S_{\lambda_0} K$ e definiamo le notazioni compatte per le seguenti somme alternate

$$\sum_K(\lambda) := \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \big(L\big[A_i^\lambda K\big] + L\big[B_i^\lambda K\big]\big)$$
$$\Omega_K(\lambda) := (-1)^{|\lambda|+1} L\Big[\hat{K}(\lambda)\Big] + z \sum_K(\lambda)$$

  dove $|\lambda| = n$ per $\lambda$ come sopra.

**Osservazione.** Se abbiamo una sequenza di operazioni $S_i$, $E_i$, $e_i$ su incroci diversi queste operazioni commutano tra loro. Questo segue dal fatto che queste operazioni fanno solo modifiche locali al diagramma.

**Definizione.** Dati $K_1, K_2$ diagrammi di link, diciamo che $K_1$ **sovrasta** $K_2$ se per ogni incrocio tra $K_1$ e $K_2$ abbiamo che sono tutti sopra-incroci.

## 3.4. Forma Induttiva

Per prima cosa enunciamo un lemma che utilizzeremo più volte in seguito.

**Lemma 3.8.** Uno nodo banale standard o è composto interamente da riccioli o ammette una sequenza di mosse di tipo II e III che portano ad un nodo formato solo da riccioli.

*Dimostrazione.* Per prima cosa osserviamo che il diagramma di un nodo non orientato $K$ allora, preso $p$ un qualsiasi punto di partenza direzionato, $\hat{K}(\mathcal{U}, p)$ sarà un nodo banale. Esisterà quindi una sequenza di mosse di tipi I, II, III che ci porta al diagramma $\bigcirc$. Rimuovendo da questa successione tutte le mosse di tipo I e modificando le mosse II e III della successione in modo da far passare i riccioli

attraverso i fili (come visto in precedenza si può fare usando alcune mosse II e III) otteniamo una successione composta solamente da mosse II e III che ci porta ad un diagramma composto solamente da riccioli. □

Vediamo ora l'idea che ci permette di trovare una formula chiusa per il polinomio $L_K$ che utilizzeremo nella dimostrazione della buona definizione.

### 3.4.1. Caso base: nodo banale standard

Utilizzando il lemma precedente possiamo mostrare che calcolare esplicitamente $L_{\widehat{K}(\mathcal{U},p)}$ che può essere risolto usando solo gli assiomi ii.b), ii.c), ii.d) ovvero quelli per , , . Segue facilmente per induzione che $L_{\widehat{K}}(a,z) = a^{w(K)}$.

### 3.4.2. Caso ricorsivo

L'idea per la definizione induttiva è di considerare dato un nodo o un link $K$ il suo nodo o link discendente standard $\hat{K}$. Questo induce una sequenza di indici $\lambda$ che indichiamo con $0, ..., n$. Se applichiamo incrementalmente gli scambi a $K$, ovvero consideriamo $S_i \cdots S_0 K$, ed applichiamo la relazione skein principale a questi diagrammi otteniamo le seguenti relazioni

$$\begin{aligned}
L[K] + L[S_0K] &= z(L[E_0K] + L[e_0K]) \\
L[S_0K] + L[S_1S_0K] &= z(L[E_0S_0K] + L[e_0S_0K]) \\
&\vdots \\
L[S_{n-1} \cdots S_0K] + L[\underbrace{S_n \cdots S_0K}_{\widehat{K}}] &= z(L[E_nS_{n-1} \cdots S_0K] + L[e_nS_{n-1} \cdots S_0K])
\end{aligned}$$

se ora sommiamo e sottraiamo membro a membro queste equazioni otteniamo la seguente identità

$$\begin{aligned}
L[K] + L[S_0K] & & z(L[E_0K] + L[e_0K]) \\
-(L[S_0K] + L[S_1S_0K]) & & -z(L[E_0S_0K] + L[e_0S_0K]) \\
\vdots & = & \vdots \\
+(-1)^n\left(L[S_{n-1} \cdots S_0K] + L\left[\hat{K}\right]\right) & & +(-1)^n(z(L[E_nS_{n-1} \cdots S_0K] + L[e_nS_{n-1} \cdots S_0K]))
\end{aligned}$$

notiamo che possiamo cancellare tutti i termini del membro di sinistra che compaiono due volte con segno opposto

$$\begin{aligned}
L[K] + \cancel{L[S_0K]} & & z(L[E_0K] + L[e_0K])
\end{aligned}$$

$$
\begin{array}{lcl}
-(\cancel{L[S_0K]} + \cancel{L[S_1S_0K]}) & & -z(L[E_0S_0K] + L[e_0S_0K]) \\
\vdots & = & \vdots \\
+(-1)^n\left(\cancel{L[S_{n-1}\cdots S_0K]} + L\left[\hat{K}\right]\right) & & +(-1)^n(z(L[E_nS_{n-1}\cdots S_0K] + L[e_nS_{n-1}\cdots S_0K]))
\end{array}
$$

Da cui otteniamo un'espressione ricorsiva per $L_K$:

$$
\begin{aligned}
\Rightarrow L_K &= (-1)^{n+1}L_{\widehat{K}} + z\sum_{i=0}^{n}(-1)^i(L[E_nS_{n-1}\cdots S_0K] + L[e_nS_{n-1}\cdots S_0K]) \\
&= (-1)^{n+1}L_{\widehat{K}} + z\sum_{i=0}^{n}(-1)^i\big(L\big[A_n^\lambda K\big] + L\big[B_n^\lambda K\big]\big)
\end{aligned}
\tag{1}
$$

Questo ci dà un'idea su come sia possibile calcolare induttivamente $L_K$ in termini di $L_{\widehat{K}}$ e di altri diagrammi con meno incroci del diagramma di partenza o più "vicini" a $\hat{K}$.

Affinché sia sempre possibile raggiungere un nodo in forma di nodo banale standard serve anche aggiungere la relazione

$$
L_{K_1\sqcup K_2} = \delta L_{K_1}L_{K_2} \tag{2}
$$

per $K = K_1 \sqcup K_2$ con $K_1$ sovrastante[3] $K_2$.

sempre con $\delta = (a + a^{-1})/z - 1$.

## 3.4.3. La definizione induttiva

**Definizione – Forma chiusa per $L_K$.** Il polinomio $L_K(a, z)$ è definito induttivamente come segue, abbiamo i seguenti casi:

i) Se $K = \hat{K}(\mathcal{U}, p)$ è un *nodo banale standard* per un qualche $p$ allora

$$
L_K(a, z) := a^{w(K)}
$$

ii) Se $K_1, K_2$ sono due diagrammi tali che $K_1 \cup K_2 \subseteq K$ ed abbiamo che $K_1$ *sovrasta* $K_2$, allora poniamo

$$
L(K_1 \cup K_2) := dL(K_1)L(K_2)
$$

[3] Questo include anche il caso di componenti disgiunte in quanto sono sovrastanti tra loro a vuoto.

con $d := (a + a^{-1})/z - 1$.

iii) Sia $K = K_1 \cup \cdots \cup K_n$, se nessun $K_i$ sovrasta tutti gli altri[4] allora:

a) Se $K$ è composto da più componenti allora siano $p_1, ..., p_n$ dei punti di partenza direzionati su $K_1, ..., K_n$ e $\overline{p}_i$ lo stesso punto di partenza $p_i$ con la direzione opposta su $K_i$. Sia $\lambda(p_i)$ la sequenza di scambi di incroci di $K_i$ con $K - K_i$ tale che $\hat{K}(\lambda(p_i)) = K_i \sqcup (K - K_i)$ tale che $K_i$ sia *sovrastante* il resto delle componenti. A questo punto possiamo definire $L_K$ come

$$L_K(a, z) := \frac{1}{2n}\left[\sum_{i=1}^{n}\sum_{q=p_i,\overline{p}_i}\left((-1)^{|\lambda(q)|+1} d L_{K_i} L_{K-K_i} + z\sum_{K}(\lambda(q))\right)\right]$$

b) Se $K$ è una singola componente allora sia $p$ un punto di partenza direzionato su $K$ e $\overline{p}$ quello con direzione opposta. Sia $\lambda(p)$ la sequenza di scambi di incroci che lo porta al nodo banale standard $\hat{K}$ e definiamo

$$L_K(a, z) := \frac{1}{2}\left[\sum_{q=p,\overline{p}}\left((-1)^{|\lambda(q)|+1} L\Big(\hat{K}(\lambda(q))\Big) + z\sum_{K}(\lambda(q))\right)\right]$$

## 3.5. Dimostrazione buona definizione

Bla bla iii.b).

Per prima cosa osserviamo che dato che in ogni termine della definizione induttiva per $L_K$, quando questa dipende dalla scelta di un punto base sono presenti i termini per entrambe le direzioni; quindi ci basta dimostrare induttivamente che le definizioni non dipendono dalla scelta di punto base.

Nel corso della dimostrazione tutti gli argomenti per induzione si baseranno sul numero di incroci dei diagrammi di link. Ometteremo i casi base ovvero i controlli per diagrammi con pochi vertici che fanno partire l'induzione in quanto sono tutti facili da controllare.

[4] Questo sicuramente accade altrimenti potremmo usare il punto ii).

**Definizione – L'ipotesi induttiva.** L'ipotesi induttiva che useremo nel corso della dimostrazione è la la seguente:

Per ogni diagramma di link $K$ con $< N$ incroci e diagrammi con meno di $N$ incroci:

a) $L_K$ è ben definito (non dipende dalla scelta di punto base).

b) $L_K$ verifica gli assiomi:

- $L[K] + L[S_i K] = z(L[e_i K] + L[E_i K])$
- $L[$ $] = aL[$ $]$
- $L[$ $] = aL[$ $]$

c) $L_K$ è invariante per mosse di tipo II e III che non aumentano il numero di incroci.

**Lemma 3.9.** Sia $\lambda = (\lambda_n, ..., \lambda_1, \lambda_0)$ una scelta di etichette per un sottoinsieme di incroci di un diagramma di link $K$. Sia $\mu = (\lambda_0, \lambda_n, ..., \lambda_1)$ la stessa successione $\lambda$ ma ruotata di 1 in avanti. Allora

$$\sum_K(\lambda) = \sum_K(\mu)$$

*Dimostrazione.* Per prima cosa rinominiamo le etichette $\lambda_n, ..., \lambda_0$ come $n, ..., 0$ per semplificare la notazione dunque

$$\lambda = (n, n-1, ..., 1, 0) \qquad \mu = (0, n, n-1, ..., 1)$$

ricordiamo ora le definizioni

$$\begin{aligned}\sum_K(\lambda) &= \sum_{i=0}^{n}(-1)\big(L\big[A_i^\lambda K\big] + L\big[B_i^\lambda K\big]\big) \\ &= +(L[E_0 K] + L[e_0 K]) + \\ &\quad -(L[E_1 S_0 K] + L[e_1 S_0 K]) + \\ &\quad \vdots \\ &\quad +(-1)^n(L[E_n S_{n-1} \cdots S_0 K] + L[e_n S_{n-1} \cdots S_0 K])\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sum_K(\mu) &= \sum_{i=0}^{n}(-1)(L[A_i^\mu K] + L[B_i^\mu K]) \\ &= +(L[E_1K] + L[e_1K]) + \\ &\quad -(L[E_2S_1K] + L[e_2S_1K]) + \\ &\quad \vdots \\ &\quad +(-1)^n(L[E_0S_n \cdots S_1K] + L[e_0S_n \cdots S_1K])\end{aligned}$$

Calcoliamo ora $\sum_K(\lambda) - \sum_K(\mu)$, per prima cosa allineiamo i termini come segue:

$$\begin{aligned} &(L[E_0K] + L[e_0K]) + && \\ &-(L[E_1S_0K] + L[e_1S_0K]) + && (L[E_1K] + L[e_1K]) + \\ &+(L[E_2S_1S_0K] + L[e_2S_1S_0K]) + && -(L[E_2S_1K] + L[e_2S_1K]) + \\ &\vdots && +(L[E_3S_2S_1K] + L[e_3S_2S_1K]) + \\ &+(-1)^n(L[E_nS_{n-1} \cdots S_0K] + L[e_nS_{n-1} \cdots S_0K]) && \vdots \\ & && +(-1)^n(L[E_0S_n \cdots S_1K] + L[e_0S_n \cdots S_1K])\end{aligned}$$

A questo punto raggruppiamoli fattorizzando per righe:

$$\begin{aligned}\sum_K(\lambda) - \sum_K(\mu) &= +(L[E_0K] + L[e_0K]) + \\ &\quad -(L[E_1S_0K] + L[e_1S_0K] + L[E_1K] + L[e_1K]) + \\ &\quad \vdots \\ &\quad +(-1)^n(L[E_nS_{n-1} \cdots S_1S_0K] + L[e_nS_{n-1} \cdots S_1S_0K] + \\ &\qquad +L[E_nS_{n-1} \cdots S_1K] + L[e_nS_{n-1} \cdots S_1K]) + \\ &\quad +(-1)^{n+1}(L[E_0S_n \cdots S_1K] + L[e_0S_n \cdots S_1K])\end{aligned}$$

Permutando i termini di tutte le righe tranne la prima e l'ultima possiamo riscriverli in modo da averli nella forma $L[\boxed{\cdots}K] + L[\boxed{\cdots}S_0K]$:

$$\begin{aligned}\sum_K(\lambda)-\sum_K(\mu) = &+(L[E_0K]+L[e_0K])+\\ &-(L[E_1K]+L[E_1S_0K]+L[e_1K]+L[e_1S_0K])+\\ &\vdots\\ &(-1)^n(L[E_nS_{n-1}\cdots S_1K]+L[E_nS_{n-1}\cdots S_1S_0K]+\\ &+L[e_nS_{n-1}\cdots S_1K]+L[e_nS_{n-1}\cdots S_1S_0K])\\ &+(-1)^{n+1}(L[E_0S_n\cdots S_1K]+L[e_0S_n\cdots S_1K])\end{aligned}$$

Ora utilizziamo un'osservazione precedente riguardo l'ordine di applicazione delle operazioni $S_i$ quindi otteniamo $S_{n-1}\cdots S_1S_0K = S_0S_{n-1}\cdots S_1K$, dunque possiamo applicare l'induzione ovunque troviamo

$$L[\boxed{\cdots}]+L[S_i\boxed{\cdots}] = z(L[E_i\boxed{\cdots}]+L[e_i\boxed{\cdots}])$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow\sum_K(\lambda)-\sum_K(\mu) = &+(L[E_0K]+L[e_0K])+\\ &-z(L[E_0E_1K]+L[e_0E_1K]+L[E_0e_1K]+L[e_0e_1K])+\\ &\vdots\\ &(-1)^n z(L[E_0E_nS_{n-1}\cdots S_1K]+L[e_0E_nS_{n-1}\cdots S_1K]+\\ &+L[E_0e_nS_{n-1}\cdots S_1K]+L[e_0e_nS_{n-1}\cdots S_1K])\\ &+(-1)^{n+1}(L[E_0S_n\cdots S_1K]+L[e_0S_n\cdots S_1K])\end{aligned}$$

riordiniamo le operazioni e portiamo $E_0$ e $e_0$ all'inizio delle successioni di operazioni

$$\begin{aligned}= &+(L[E_0K]+L[e_0K])+\\ &-z(L[E_1\ E_0K]+L[E_1\ e_0K]+L[e_1\ E_0K]+L[e_1\ e_0K])+\\ &\vdots\\ &(-1)^n z(L[E_nS_{n-1}\cdots S_1\ E_0K]+L[E_nS_{n-1}\cdots S_1\ e_0K]+\\ &+L[e_nS_{n-1}\cdots S_1\ E_0K]+L[e_nS_{n-1}\cdots S_1\ e_0K])\\ &+(-1)^{n+1}(L[S_n\cdots S_1\ E_0K]+L[S_n\cdots S_1\ e_0K])\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= L[E_0K] + (-1)^{n+1}L[S_n \cdots S_1\ E_0K] + \\
&\quad -z\Big((L[E_1\ E_0K] + L[e_1\ E_0K]) + \\
&\quad\quad -(L[E_2S_1\ E_0K] + L[e_2S_1\ E_0K]) + \\
&\quad\quad\quad \vdots \\
&\quad +(-1)^n(L[E_nS_{n-1}...S_1\ E_0K] + L[e_nS_{n-1}...S_1\ E_0K])\Big) \\
&\quad +L[e_0K] + (-1)^{n+1}L[S_n \cdots S_1\ e_0K] + \\
&\quad\quad -z\Big((L[E_1\ e_0K] + L[e_1\ e_0K]) + \\
&\quad\quad\quad -(L[E_2S_1\ e_0K] + L[e_2S_1\ e_0K]) + \\
&\quad\quad\quad\quad \vdots \\
&\quad\quad +(-1)^n(L[E_nS_{n-1}...S_1\ e_0K] + L[e_nS_{n-1}...S_1\ e_0K])\Big)
\end{aligned}
$$

Infine osserviamo che i termini in $z(\boxed{\cdots})$ sono proprio le somme incrementali sugli scambi per $E_0K$ e $e_0K$, dunque possiamo riscrivere l'espressione precedente come

$$
\begin{aligned}
&= L[E_0K] + (-1)^{n+1}L[S_n \cdots S_1E_0K] - z\sum_{E_0K}((n,...,1)) \\
&\quad +L[e_0K] + (-1)^{n+1}L[S_n \cdots S_1e_0K] - z\sum_{e_0K}((n,...,1))
\end{aligned}
$$

Ora possiamo applicare l'ipotesi induttiva in quanto tutti i diagrammi hanno strettamente meno di $N$ incroci. Applicando l'ipotesi induttiva per $\gamma = (n,...,1)$ e osservando che con la convenzione di Kauffman $|\gamma| + 1 = (n-1) + 1 = n$, otteniamo che

$$
\begin{aligned}
\Omega_{K(\gamma)} &= (-1)^{|\gamma|+1}L_{\widehat{K}(\gamma)} + z\sum_K(\gamma) \\
&= (-1)^{n+1}L_{\widehat{K}(\gamma)} - z\sum_K(\gamma)
\end{aligned}
$$

infine sostituendo

$$
\begin{aligned}
&= L[E_0K] - \Omega_{E_0K}(\gamma) + L[e_0K] - \Omega_{e_0K}(\gamma) \\
&= 0 + 0 = 0
\end{aligned}
$$

E questo conclude la dimostrazione. □

**Corollario.** Nella definizione della forma chiusa di $L_K$, il caso ii.a) non dipende dalla scelta del punto base.

*Dimostrazione.* Rivediamo l'espressione in questione, siano $p_i$ dei punti base direzionati sulle componenti di $K$

$$L_K(a,z) := \frac{1}{2n}\left[\sum_{i=1}^{n}\sum_{q=p_i,\overline{p}_i}\left((-1)^{|\lambda(q)|+1}dL_{K_i}L_{K-K_i} + z\sum_{K}(\lambda(q))\right)\right]$$

se applichiamo una 1-rotazione alle sequenze di scambi le lunghezze non cambiano ed abbiamo appena mostrato che $\sum_K(\lambda(q)))$ è invariante per 1-rotazioni.

A questo punto possiamo estendere l'invarianza per 1-rotazioni a tutte le possibili permutazioni cicliche delle sequenze di scambi e questo ci dimostra che questo caso non dipende dalla scelta del punto base. □

---

Ora rimane da verificare l'invarianza per scelta di punto base per il caso ii.b) ovvero quando $K$ è fo per $p$ punto base direzionato su $K$.

$$L_K(a,z) := \frac{1}{2}\left[\sum_{q=p,\overline{p}}\left((-1)^{|\lambda(q)|+1}L\left[\hat{K}(\lambda(q))\right] + z\sum_{K}(\lambda(q))\right)\right]$$

**Lemma 3.10.** Consideriamo i due modi di fare uno splice di un nodo banale standard al primo incrocio subito dopo un punto base direzionato. Ci sono due casi: in uno otteniamo due nodi banali in forma standard, nell'altro un solo nodo banale (non necessariamente in forma standard).

*Dimostrazione.*

TODO

work in progress

□

**Lemma 3.11.** La proprietà del lemma Lemma 3.8 si estende al diagramma $e_i\hat{K}$.

*Dimostrazione.*

TODO

work in progress

□

**Lemma 3.12.** Sia $p$ un punto di partenza direzionato e $\hat{K} := \hat{K}(\mathcal{U}, p)$ un nodo banale standard. Sia $i$ il primo incrocio in $K$ subito dopo il punto di partenza $p$. Sia $q$ un altro punto base direzionato posto nell'arco subito dopo l'incrocio $i$ con la sua stessa direzione e poniamo $\hat{K}' := \hat{K}(\mathcal{U}, q)$. Allora valgono le seguenti proprietà

i) $S_i\hat{K} = \hat{K}'$

ii) $L\left[\hat{K}\right] + L\left[\hat{K}'\right] = z\Big(L\left[E_i\hat{K}\right] + L\left[e_i\hat{K}\right]\Big)$

*Dimostrazione.*

i) Per definizione di nodo banale standard $\hat{K}(\mathcal{U}, q) = S_i\hat{K}(\mathcal{U}, p)$ poiché l'incrocio $i$ in $\hat{K}(\mathcal{U}, p)$ compare come sopra-incrocio mentre in $\hat{K}(\mathcal{U}, q)$ è l'ultimo incrocio visitato quindi è certamente la seconda occorrenza di $i$ quindi è un sotto-incrocio. Tutti gli altri incroci compaiono nello stesso ordine quindi restano invariati.

ii) Per questo secondo punto usiamo che $L_{\widehat{K}} = a^{w\left(\widehat{K}\right)}$, assumiamo ora che tra $E_i\hat{K}$ e $e_i\hat{K}$ il primo sia il caso con due componenti composte da nodi banali standard ed il secondo quello con una sola componente di un nodo banale.

   Supponiamo che $w\Big(e_i\hat{K}\Big) = w$, allora in quanto abbiamo solo rimosso un incrocio necessariamente

$$\Big\{w\Big(\hat{K}\Big), w\Big(S_i\hat{K}\Big)\Big\} = \{w-1, w+1\}$$

   ovvero i writhe di $\hat{K}$ e $S_i\hat{K}$ differiscono di 2, assumiamo di essere nel caso $w\Big(\hat{K}\Big) = w - 1$.

   Analogamente $E_i\hat{K}$ avrà due componenti dunque $K = K_1 \# K_2$, ognuna con writhe rispettivamente $w_1$ e $w_2$. Per il teorema della curva di Jordan, la somma dei segni degli incroci tra componenti diverse ha somma zero poiché una delle due *sovrasta* l'altra dunque $w_1 + w_2 = w$.

$$
\begin{aligned}
L\Big[\hat{K}\Big] &= a^{w+1} \\
L\Big[S_i\hat{K}\Big] &= a^{w-1} \\
L\Big[e_i\hat{K}\Big] &= a^{w} \\
L\Big[E_i\hat{K}\Big] &= da^{w_1}a^{w_2} = da^{w_1+w_2} = da^{w} = (a^{w+1}+a^{w-1})/z - a^{w}
\end{aligned}
$$

che dunque verifica l'identità:

$$
\begin{aligned}
a^{w+1}+a^{w-1} &= \cancel{z}\left(\frac{a^{w+1}+a^{w-1}}{\cancel{z}} - \cancel{a^{w}} + \cancel{a^{w}}\right) \\
\Rightarrow L\Big[\hat{K}\Big] + L\Big[\hat{K}'\Big] &= z\Big(L\Big[E_i\hat{K}\Big] + L\Big[e_i\hat{K}\Big]\Big)
\end{aligned}
$$

E questo conclude la dimostrazione delle due proprietà. □

**Lemma 3.13.** Sia $K$ un diagramma di un nodo. Allora iii.b) non dipende dalla scelta di punto base. Inoltre se $p$ è un punto base direzionato su $K$ e $\lambda(p)$ la sequenza di scambi determinata da $p$ allora

$$\Omega_K(p) = (-1)^{|\lambda(p)|+1}L_{\widehat{K}(p)} + z\sum_K(\lambda(p))$$

non dipende dalla scelta di punto base.

*Dimostrazione.* Possiamo assumere che la sequenza di scambi determinata da $p$ sia etichetta $\lambda = (n, ..., 0)$, in questo modo

$$\Omega_K(p) = (-1)^{n+1}L_{\widehat{K}(p)} + z\sum_K(\lambda(p))$$

Ricordiamo come era definito $L_K$ nel caso di una sola componente iii.b) e notiamo quanto segue

$$
\begin{aligned}
L_K(a,z) &:= \frac{1}{2}\left[\sum_{q=p,\overline{p}}\left((-1)^{|\lambda(q)|+1}L\Big(\hat{K}(\lambda(q))\Big) + z\sum_K(\lambda(q))\right)\right] \\
&= \frac{1}{2}(\Omega_K(p) + \Omega_K(\overline{p}))
\end{aligned}
$$

Dunque ci basta mostrare che $\Omega_K(p)$ non dipenda dalla scelta di punto base.

Come in precedenza possiamo mostrarlo facendo scorrere $p$ nell'arco successivo al primo incrocio dopo $p$ (questo ci induce l'invarianza per permutazioni cicliche e ci permette di concludere).

Sia $i$ l'etichetta del primo incrocio dopo $p$. In $\hat{K}(p)$ questo incrocio sarà sicuramente un sopra-incrocio in quanto $i$ è visitato per la prima volta essendo il primo incrocio dopo $p$. Invece in $K(p)$ può essere sia un sopra-incrocio che un sotto-incrocio, abbiamo quindi due casi:

- Se $i$ è un sotto-incrocio in $K(p)$ allora $i$ sarà il primo incrocio nella sequenza di scambi ed avremo $i = n$

  TODO
  disegnino

  Consideriamo ora la situazione di $K(q)$

  TODO
  disegnino

  come già detto prima se l'ultimo incrocio è un sotto-incrocio allora è già in forma di nodo banale standard. Segue che $i$ non appartiene alla sequenza di scambi in questo caso ed avremo $(n-1, ..., 0)$ e $\hat{K}(q) = S_{n-1} \cdots S_0 K$. Vorremo vedere che $\Omega_K(p) = \Omega_K(q)$, ovvero:

$$\Omega_K(p) = (-1)^{n+1} L\left[\hat{K}(p)\right] + z \sum_K (\lambda(p))$$
$$\Omega_K(q) = (-1)^{(n-1)+1} L\left[\hat{K}(q)\right] + z \sum_K (\lambda(q))$$

  come in precedenza studiamo la differenza:

$$\begin{aligned}\Omega_K(p) - \Omega_K(q) &= (-1)^{n+1} L\left[\hat{K}(p)\right] + z \sum_K (\lambda(p)) \\ &\quad + \underbrace{(-1)^{n+1}}_{=-(-1)^n} L\left[\hat{K}(q)\right] - z \sum_K (\lambda(q)) \\ &= (-1)^{n+1}\left(L\left[\hat{K}(p)\right] + L\left[\hat{K}(q)\right]\right) \\ &\quad + z(-1)^n \left(L[A_n^\lambda K] + L[B_n^\lambda K]\right)\end{aligned}$$

dove abbiamo usato il fatto che tutti i termini in $\sum_K(\lambda(p)) - \sum_K(\lambda(q))$ si cancellano tra loro tranne l'ultimo di $\sum_K(\lambda(p))$.

Ora notiamo che

$$\begin{aligned} A_n^\lambda K &= E_n S_{n-1} \cdots S_0 K = E_n \hat{K}(p) \\ B_n^\lambda K &= e_n S_{n-1} \cdots S_0 K = e_n \hat{K}(p) \\ \hat{K}(p) &= S_n\ \hat{K}(p) \end{aligned}$$

inoltre per il Lemma 3.12 abbiamo anche che

$$L\big[\hat{K}(p)\big] + L\big[\hat{K}(q)\big] = z\Big(L\big[E_n\hat{K}(p)\big] + L\big[e_n\hat{K}(p)\big]\Big)$$

Per concludere questo caso basta sostituire in queste ultime identità

$$\begin{aligned} \Omega_K(p) - \Omega_K(q) &= (-1)^{n+1}\Big(L\big[\hat{K}(p)\big] + L\big[\hat{K}(q)\big]\Big) \\ &\quad + z(-1)^n\big(L[A_n^\lambda K] + L[B_n^\lambda K]\big) \\ &= \cancel{z(-1)^{n+1}\Big(L\big[E_n\hat{K}(p)\big] + L\big[e_n\hat{K}(p)\big]\Big)} \\ &\quad \cancel{+ z(-1)^n\Big(L\big[E_n\hat{K}(p)\big] + L\big[e_n\hat{K}(p)\big]\Big)} \\ &= 0 \end{aligned}$$

e quindi $\Omega_K(p) = \Omega_K(q)$.

- Se $i$ è un sopra-incrocio in $K(p)$ siamo nella seguente situazione

TODO

disegnino

In questo caso, $i$ non fa parte della sequenza di scambi per $K(q)$. Però dopo aver spostato il punto base avremo la seguente situazione

TODO

disegnino

Questa volta $i$ fa parte della sequenza di scambi per $K(q)$ e quando compare come ultimo incrocio è un sotto-incrocio. Avremo quindi le seguenti sequenze di scambi

$$\lambda(q) = (n, n-1, ..., i, ..., 1, 0)$$
$$\lambda(p) = (n, n-1, ..., i+1, i-1, ..., 1, 0)$$

a meno di riordinare gli scambi è facile vedere che $S_i\hat{K}(q) = \hat{K}(p)$, e che il Lemma 3.12 si applica alla coppia $\hat{K}(p), \hat{K}(q)$ per l'indice $i$. Per il Lemma 3.9 abbiamo anche che $\sum_K(p), \sum_K(q)$ sono invarianti a meno di permutazioni cicliche. Possiamo quindi sostituire $\lambda(p)$ e $\lambda(q)$ con le seguenti sequenze di scambi applicando le giuste rotazioni.

$$\lambda'(p) = (i-1, ..., 1, 0, n, n-1, ..., i+1)$$
$$\lambda'(q) = (i, i-1, ..., 1, 0, n, n-1, ..., i+1)$$

A questo punto possiamo applicare un argomento simile a quello del punto precedente.

E questo completa la dimostrazione dell'indipendenza di $\Omega_K(p)$ dalla scelta di punto base. □

**Lemma 3.14.** Sia $i$ un incrocio di un diagramma di link $K$. Allora $L_K$ verifica le identità

i) $L[K] + L[S_iK] = z(L[E_iK] + L[e_iK])$

ii) $L[\,\overset{\frown}{\supset}\,] = aL[\frown], L[\,\overset{\frown}{\subset}\,] = a^{-1}L[\frown]$

*Dimostrazione.* Mostriamo per induzione sul numero di incroci nel diagramma.

i) Consideriamo i seguenti casi:

ricontrollare tutta questa

- Se $K$ ha una sola componente ed un incrocio $i$. Consideriamo $S_iK$, $E_iK$ e $e_iK$, scegliendo bene $p$ possiamo fare in modo che $i$ sia il primo incrocio nella sequenza di scambi. A questo punto otteniamo la tesi calcolando la differenza nelle espansioni di $\Omega_K(p)$ e $\Omega_{S_iK}(p)$.

- Se $K$ ha più di una componente e $i$ è un incrocio di una componente con se stessa. In questo caso la tesi segue per dalla Definizione 3.17 utilizzando per induzione il caso ii.a).

- Se $K$ ha più di una componente e $i$ è un incrocio tra due componenti diverse allora per gli addendi che non intersecano nessuna delle due com-

ponenti possiamo procedere per induzione. Altrimenti possiamo scegliere un punto base appropriato e procedere per induzione.

ii) La dimostrazione è analoga, basta osservare che possiamo sempre scegliere un punto base che non faccia comparire l'incrocio del ricciolo nella sequenza di scambi.

E questo conclude la dimostrazione del lemma. □

**Lemma 3.15.** Sia $K$, $K'$ diagrammi di link equivalenti a meno di isotopia regolare. Allora $L_K = L_{K'}$, ovvero $L_K$ è un invariante di isotopia regolare.

*Dimostrazione.* Procediamo sempre per induzione e mostriamo l'invarianza per mosse che non aumentano il numero di incroci.

- Mossa II: Ci sono più casi in base a se la mossa riguarda una o più componenti
  - Se la mossa è su una sola componente allora ci basta scegliere il punto base come segue

    TODO
    disegnino

    in questo modo i due incroci non compariranno nella sequenza di scambi. Tutti i termini di ii.a) saranno invarianti per mosse di tipo II e lo sarà anche $L_K$.
  - Se la mossa riguarda più componenti allora il caso peggiore è il seguente

    TODO
    disegnino

    Vediamo che $L[K] = L[S_2 S_1 K]$...
- Mossa III:
  - Se la mossa è su fili di una sola componente allora allora possiamo scegliere il punto base sul filo che passa sopra, in questo modo avremo la situazione seguente:

    TODO
    disegnino

In un caso possiamo procedere per induzione, se invece ci sono degli splice possiamo utilizzare le seguenti equivalenze di diagrammi e poi procedere per induzione

TODO

disegnino

- Nel caso in cui la mossa riguardi fili di più componenti possiamo utilizzare l'identità della mossa precedente $L[K] = L[S_2 S_1 K]$ per semplificare la situazione e procedere per induzione.

Questo completa la dimostrazione. □

# Bibliografia

[1] Jkasd, "Wild knot.svg." [Online]. Available: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Wild_knot.svg

[2] R. Crowell and R. Fox, *Introduction to Knot Theory*. in Graduate Text in Mathematics. Springer New York, 1977.

[3] L. H. Kauffman, "An invariant of regular isotopy," *Trans. Am. Math. Soc.*, vol. 318, no. 2, pp. 417–471, 1990.