

Il polinomio di Kauffman, un Invariante di Isotopia Regolare

ANTONIO DE LUCREZIIS

Abstract. In questa tesi introdurremo la teoria dei nodi con alcuni risultati fondazionali. Parleremo brevemente delle relazioni skein che ci serviranno

Indice

1. Introduzione	2
1.1. Introduzione alla Teoria dei Nodi	2
2. Relazioni Skein	4
3. Polinomio di Kauffman	6
3.1. Bibliografia	8

Capitolo 1

Introduzione

In questa tesi studieremo un invariante di isotopia regolare chiamato polinomio di Kauffman [1]. Dato un nodo o link non orientato K , $L_K(a, z)$ è definito in forma assiomatica attraverso le seguenti relazioni

i) Se K e K' sono equivalenti a meno di isotopia regolare, allora $L_K(a, z) = L_{K'}(a, z)$.

ii) Valgono le seguenti relazioni skein

- $L(\text{crossing}) + L(\text{crossing}) = z(L(\text{smooth}) + L(\text{smooth}))$
- $L(\bigcirc) = 1$
- $L(\text{crossing}) = aL(\text{smooth})$
- $L(\text{crossing}) = a^{-1}L(\text{smooth})$

dove ogni simbolo indica che per un link fissato K e per ogni suo crossing i , applichiamo le modifiche ad i in modo da rendere quel crossing come indicato dal simbolo in figura.

1.1. Introduzione alla Teoria dei Nodi

Spiegare meglio questa cosa o toglierla e basta

Definizione 1. Siano X, Y due spazi topologici, allora un'applicazione continua $f : X \rightarrow Y$ si dice **embedding** se X è omeomorfo a $f(X) \subset Y$ con la topologia di sottospazio indotta da Y .

Work in Progress

Dati due spazi topologici X compatto e Y di Hausdorff e un'applicazione continua $f : X \rightarrow Y$ allora f è un *embedding* $\Leftrightarrow$ è iniettiva.

Definizione 3. Un *embedding* $f : X \rightarrow Y$ si dice **localmente piatto** in $p \in X$ se $\exists U \subset \mathbb{R}^3$ intorno di p , con

$$\begin{aligned} U &\approx \mathbb{D}^2 \times [0, 1] \\ U \cap K &\leftrightarrow \{0\} \times [0, 1] \end{aligned}$$

Definizione 4. Un **nodo tame** è un sottoinsieme $K \subset \mathbb{R}^3$ tale che esiste un *embedding* $f : S^1 \hookrightarrow \mathbb{R}^3$ e $\forall p \in K$, f è *localmente piatto* in p .

Capitolo 2

Relazioni Skein

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit, sed do eiusmod tempor incididunt ut labore et dolore magnam aliquam quaerat voluptatem. Ut enim aequaeque doleamus animo, cum corpore dolemus, fieri tamen permagna accessio potest, si aliquod aeternum et infinitum impendere malum nobis opinemur. Quod idem licet transferre in voluptatem, ut postea variari voluptas distinguere possit, augeri amplificarique non possit. At etiam Athenis, ut e patre audiebam facete et urbane Stoicos irridente, statua est in quo a nobis philosophia defensa et collaudata est, cum id, quod maxime placeat, facere possimus, omnis voluptas assumenda est, omnis dolor repellendus. Temporibus autem quibusdam et.

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit, sed do eiusmod tempor incididunt ut labore et dolore magnam aliquam quaerat voluptatem. Ut enim aequaeque doleamus animo, cum corpore dolemus, fieri tamen permagna accessio potest, si aliquod aeternum et infinitum impendere malum nobis opinemur. Quod idem licet transferre in voluptatem, ut postea variari voluptas distinguere possit, augeri amplificarique non possit. At etiam Athenis, ut e patre audiebam facete et urbane Stoicos irridente, statua est in quo a nobis philosophia defensa

et collaudata est, cum id, quod maxime placeat, facere possimus, omnis voluptas assumenda est, omnis dolor repellendus. Temporibus autem quibusdam et.

Capitolo 3

Polinomio di Kauffman

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit, sed do eiusmod tempor incididunt ut labore et dolore magnam aliquam quaerat voluptatem. Ut enim aequale doleamus animo, cum corpore dolemus, fieri tamen permagna accessio potest, si aliquod aeternum et infinitum impendere malum nobis opinemur. Quod idem licet transferre in voluptatem, ut postea variari voluptas distinguere possit, augeri amplificarique non possit. At etiam Athenis, ut e patre audiebam facete et urbane Stoicos irridente, statua est in quo a nobis philosophia defensa et collaudata est, cum id, quod maxime placeat, facere possimus, omnis voluptas assumenda est, omnis dolor repellendus. Temporibus autem quibusdam et.

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit, sed do eiusmod tempor incididunt ut labore et dolore magnam aliquam quaerat voluptatem. Ut enim aequale doleamus animo, cum corpore dolemus, fieri tamen permagna accessio potest, si aliquod aeternum et infinitum impendere malum nobis opinemur. Quod idem licet transferre in voluptatem, ut postea variari voluptas distinguere possit, augeri amplificarique non possit. At etiam Athenis, ut e patre audiebam facete et urbane Stoicos irridente, statua est in quo a nobis philosophia defensa

et collaudata est, cum id, quod maxime placeat, facere possimus, omnis voluptas assumenda est, omnis dolor repellendus. Temporibus autem quibusdam et.

Definizione 5 (Forma chiusa per L_K). Qui di seguito la forma chiusa del polinomio $L_K(a, z)$.

i) Se $K = \hat{K}$ è un *nodo banale standard* allora $L_K(a, z) := a^{w(K)}$

ii) Se K_1 è *sopra* K_2 , sia $d := (a + a^{-1})/z - 1$ e allora

$$L(K_1 \cup K_2) := dL(K_1)L(K_2)$$

iii) Se $K = K_1 \cup \dots \cup K_n$

- Se un K_i è *sopra* un altro componente allora applica (ii).
- Se nessun K_i è *sopra* tutti gli altri, siano $p_1, \dots, p_n$ dei *punti di partenza direzionati* su $K_1, \dots, K_n$ e sia $\bar{p}_i$ lo stesso *punto di partenza direzionato* con la direzione opposta di p_i su K_i . Sia $\lambda(p_i)$ la sequenza di scambi di incroci di K_i con $K - K_i$ tale che $\hat{K}(\lambda(p_i)) = K_i \sqcup (K - K_i)$ tale che K_i sia *sopra* il resto delle componenti. A questo punto possiamo definire L_K come

$$L_K(a, z) := \frac{1}{2n} \left[\sum_{i=1}^n \sum_{q=p_i, \bar{p}_i} \left((-1)^{|\lambda(q)|+1} dL_{K_i}L_{K-K_i} + z \sum_K (\lambda(q)) \right) \right]$$

- Se K è una singola componente allora sia p un punto di partenza direzionato su K e $\bar{p}$ quello con direzione opposta. Sia $\lambda(p)$ la sequenza di scambi di incroci che lo porta al nodo banale standard $\hat{K}$ e definiamo

$$L_K(a, z) := \frac{1}{2} \left[\sum_{q=p, \bar{p}} \left((-1)^{|\lambda(q)|+1} L(\hat{K}(\lambda(q))) + z \sum_K (\lambda(q)) \right) \right]$$

Bibliografia

- [1] L. H. Kauffman, “An invariant of regular isotopy,” *Trans. Am. Math. Soc.*, vol. 318, no. 2, pp. 417–471, 1990.