



Il Polinomio di Kauffman: Un Invariante di Isotopia Regolare

Tesi di Laurea Triennale

Antonio De Lucreziis

Dipartimento di Matematica
Università di Pisa

2025-07-11



Outline

Introduzione e Motivazione

Teoria e Costruzione

Risultati e Applicazioni



Motivazione

Come distinguere matematicamente due nodi?



Motivazione

Come distinguere matematicamente due nodi?

- I nodi possono apparire diversi ma essere topologicamente equivalenti
- Abbiamo bisogno di **invarianti**: proprietà che non cambiano sotto deformazioni ammesse
- Gli invarianti polinomiali sono strumenti potenti e computabili



Motivazione

Come distinguere matematicamente due nodi?

- I nodi possono apparire diversi ma essere topologicamente equivalenti
- Abbiamo bisogno di **invarianti**: proprietà che non cambiano sotto deformazioni ammesse
- Gli invarianti polinomiali sono strumenti potenti e computabili

Obiettivo: costruire un invariante polinomiale robusto



Nodi e Diagrammi

Definizione: Un **nodo tame** è un sottoinsieme $K \subset \mathbb{R}^3$ per cui esiste un embedding $f : \mathbb{S}^1 \hookrightarrow \mathbb{R}^3$ localmente piatto con $K = f(\mathbb{S}^1)$.



Nodi e Diagrammi

Definizione: Un **nodo tame** è un sottoinsieme $K \subset \mathbb{R}^3$ per cui esiste un embedding $f : \mathbb{S}^1 \hookrightarrow \mathbb{R}^3$ localmente piatto con $K = f(\mathbb{S}^1)$.

Problema: Lavorare direttamente con embedding in \mathbb{R}^3 è complesso



Nodi e Diagrammi

Definizione: Un **nodo tame** è un sottoinsieme $K \subset \mathbb{R}^3$ per cui esiste un embedding $f : \mathbb{S}^1 \hookrightarrow \mathbb{R}^3$ localmente piatto con $K = f(\mathbb{S}^1)$.

Problema: Lavorare direttamente con embedding in \mathbb{R}^3 è complesso

Soluzione: Proiezioni su un piano

- Proiettiamo il nodo su un piano
- Aggiungiamo informazione **sopra/sotto** ad ogni incrocio
- Otteniamo un **diagramma** del nodo



Nodi e Diagrammi

Definizione: Un **nodo tame** è un sottoinsieme $K \subset \mathbb{R}^3$ per cui esiste un embedding $f : \mathbb{S}^1 \hookrightarrow \mathbb{R}^3$ localmente piatto con $K = f(\mathbb{S}^1)$.

Problema: Lavorare direttamente con embedding in \mathbb{R}^3 è complesso

Soluzione: Proiezioni su un piano

- Proiettiamo il nodo su un piano
- Aggiungiamo informazione **sopra/sotto** ad ogni incrocio
- Otteniamo un **diagramma** del nodo

I diagrammi sono l'interfaccia computazionale per studiare i nodi



Equivalenze tra Nodi

Isotopia Ambiente: Deformare un nodo senza tagliarlo o incollarlo

Due nodi $K_0, K_1 \subset \mathbb{R}^3$ sono **equivalenti** se esiste un'**isotopia ambiente** $H : \mathbb{R}^3 \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$



Equivalenze tra Nodi

Isotopia Ambiente: Deformare un nodo senza tagliarlo o incollarlo

Due nodi $K_0, K_1 \subset \mathbb{R}^3$ sono **equivalenti** se esiste un'**isotopia ambiente** $H : \mathbb{R}^3 \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$

Teorema di Reidemeister: Due diagrammi rappresentano nodi equivalenti se e solo se sono collegati da mosse I, II, III



Equivalenze tra Nodi

Isotopia Ambiente: Deformare un nodo senza tagliarlo o incollarlo

Due nodi $K_0, K_1 \subset \mathbb{R}^3$ sono **equivalenti** se esiste un'**isotopia ambiente** $H : \mathbb{R}^3 \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$

Teorema di Reidemeister: Due diagrammi rappresentano nodi equivalenti se e solo se sono collegati da mosse I, II, III

Isotopia Regolare: Equivalenza generata solo da mosse II e III (ignoriamo la mossa I)



Equivalenze tra Nodi

Isotopia Ambiente: Deformare un nodo senza tagliarlo o incollarlo

Due nodi $K_0, K_1 \subset \mathbb{R}^3$ sono **equivalenti** se esiste un'**isotopia ambiente** $H : \mathbb{R}^3 \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$

Teorema di Reidemeister: Due diagrammi rappresentano nodi equivalenti se e solo se sono collegati da mosse I, II, III

Isotopia Regolare: Equivalenza generata solo da mosse II e III (ignoriamo la mossa I)

L'isotopia regolare “vede” i riccioli (curls)



Outline

Introduzione e Motivazione

Teoria e Costruzione

Risultati e Applicazioni



Il Writhe: Un Primo Invariante

Definizione del segno di un incrocio: $\varepsilon(+)$ = +1 $\varepsilon(-)$ = -1



Il Writhe: Un Primo Invariante

Definizione del segno di un incrocio: $\varepsilon(+)$ = +1 $\varepsilon(-)$ = -1

Il writhe: $w(K) := \sum_{\text{incroci } c} \varepsilon(c)$



Il Writhe: Un Primo Invariante

Definizione del segno di un incrocio: $\varepsilon(+)$ = +1 $\varepsilon(-)$ = -1

Il writhe: $w(K) := \sum_{\text{incroci } c} \varepsilon(c)$

Proprietà:

- Invariante per mosse II e III ✓
- NON invariante per mossa I ✗



Il Writhe: Un Primo Invariante

Definizione del segno di un incrocio: $\varepsilon(+)$ = +1 $\varepsilon(-)$ = -1

Il writhe: $w(K) := \sum_{\text{incroci } c} \varepsilon(c)$

Proprietà:

- Invariante per mosse II e III ✓
- NON invariante per mossa I X

Formula di correzione: Se L_K è invariante per isotopia regolare con $L(\text{sopra-ricciolo}) = aL(\text{filo})$, $L(\text{sotto-ricciolo}) = a^{-1}L(\text{filo})$

Allora: $F_K := a^{-w(K)} L_K$ è invariante per isotopia ambiente!



Il Polinomio di Kauffman: Definizione

Il protagonista: $L_K(a, z) \in \mathbb{Z}[a, a^{-1}, z, z^{-1}]$

Assiomi:

1. Se K, K' sono equivalenti a meno di isotopia regolare, allora $L_K = L_{\{K'\}}$



Il Polinomio di Kauffman: Definizione

Il protagonista: $L_K(a, z) \in \mathbb{Z}[a, a^{-1}, z, z^{-1}]$

Assiomi:

1. Se K, K' sono equivalenti a meno di isotopia regolare, allora $L_K = L_{\{K'\}}$
2. Relazioni skein:
 - $L(\text{sopra}) + L(\text{sotto}) = z(L(\text{h-splice}) + L(\text{v-splice}))$
 - $L(\text{nodo banale}) = 1$
 - $L(\text{sopra-ricciolo}) = aL(\text{filo}), L(\text{sotto-ricciolo}) = a^{-1}L(\text{filo})$



Il Polinomio di Kauffman: Definizione

Il protagonista: $L_K(a, z) \in \mathbb{Z}[a, a^{-1}, z, z^{-1}]$

Assiomi:

1. Se K, K' sono equivalenti a meno di isotopia regolare, allora $L_K = L_{\{K'\}}$
2. Relazioni skein:
 - $L(\text{sopra}) + L(\text{sotto}) = z(L(\text{h-splice}) + L(\text{v-splice}))$
 - $L(\text{nodo banale}) = 1$
 - $L(\text{sopra-ricciolo}) = aL(\text{filo}), L(\text{sotto-ricciolo}) = a^{-1}L(\text{filo})$

Domanda: Gli assiomi definiscono univocamente L_K ?



Esempio: Link di Hopf

Applichiamo la relazione skein:

$$L[\text{Hopf}] + L[\text{versione scambiata}] = z(L[\text{due cerchi}] + L[\text{due fili}])$$



Esempio: Link di Hopf

Applichiamo la relazione skein:

$$L[\text{Hopf}] + L[\text{versione scambiata}] = z(L[\text{due cerchi}] + L[\text{due fili}])$$

Sapendo che:

- $L[\text{due cerchi}] = \delta = \frac{a+a^{-1}}{z} - 1$
- $L[\text{due fili}] = a + a^{-1}$



Esempio: Link di Hopf

Applichiamo la relazione skein:

$$L[\text{Hopf}] + L[\text{versione scambiata}] = z(L[\text{due cerchi}] + L[\text{due fili}])$$

Sapendo che:

- $L[\text{due cerchi}] = \delta = \frac{a+a^{-1}}{z} - 1$
- $L[\text{due fili}] = a + a^{-1}$

$$\text{Otteniamo: } L[\text{Hopf}] = -(a + a^{-1})z^{-1} + 1 + (a + a^{-1})z$$



Esempio: Link di Hopf

Applichiamo la relazione skein:

$$L[\text{Hopf}] + L[\text{versione scambiata}] = z(L[\text{due cerchi}] + L[\text{due fili}])$$

Sapendo che:

- $L[\text{due cerchi}] = \delta = \frac{a+a^{-1}}{z} - 1$
- $L[\text{due fili}] = a + a^{-1}$

$$\text{Otteniamo: } L[\text{Hopf}] = -(a + a^{-1})z^{-1} + 1 + (a + a^{-1})z$$

Questi calcoli suggeriscono che L_K esiste, ma serve una dimostrazione rigorosa!



La Sfida della Buona Definizione

Problema centrale: Gli assiomi definiscono L_K in modo unico?



La Sfida della Buona Definizione



La Sfida della Buona Definizione

Problema centrale: Gli assiomi definiscono L_K in modo unico?

Sfide:

1. Gli assiomi sono **impliciti** (relazioni, non formule)
2. Come garantire che esista una soluzione?
3. Come garantire l'unicità?
4. Come verificare l'indipendenza dalle scelte computazionali?



La Sfida della Buona Definizione



La Sfida della Buona Definizione

Problema centrale: Gli assiomi definiscono L_K in modo unico?

Sfide:

1. Gli assiomi sono **impliciti** (relazioni, non formule)
2. Come garantire che esista una soluzione?
3. Come garantire l'unicità?
4. Come verificare l'indipendenza dalle scelte computazionali?

Scelte che potrebbero influenzare il risultato:

- Scelta del punto base p su ogni componente
- Direzione del punto base (orario vs antiorario)
- Ordine delle operazioni nelle sequenze



La Sfida della Buona Definizione



La Sfida della Buona Definizione

Problema centrale: Gli assiomi definiscono L_K in modo unico?

Sfide:

1. Gli assiomi sono **impliciti** (relazioni, non formule)
2. Come garantire che esista una soluzione?
3. Come garantire l'unicità?
4. Come verificare l'indipendenza dalle scelte computazionali?

Scelte che potrebbero influenzare il risultato:

- Scelta del punto base p su ogni componente
- Direzione del punto base (orario vs antiorario)
- Ordine delle operazioni nelle sequenze



La Sfida della Buona Definizione

Senza questa dimostrazione, L_K non sarebbe ben definito!



Ingredienti per la Costruzione

Concetti chiave necessari:

1. **Nodo banale standard:** $\hat{K}(\mathcal{U}, p)$

- Percorrere l'ombra planare da un punto base p
- Primo passaggio su ogni incrocio = sopra-incrocio



Ingredienti per la Costruzione

Concetti chiave necessari:

1. **Nodo banale standard:** $\hat{K}(\mathcal{U}, p)$

- Percorrere l'ombra planare da un punto base p
- Primo passaggio su ogni incrocio = sopra-incrocio

2. **Operazioni sui diagrammi:**

- $S_i K$: scambia l'incrocio i
- $E_i K, e_i K$: splice orizzontale e verticale



Ingredienti per la Costruzione

Concetti chiave necessari:

1. **Nodo banale standard:** $\hat{K}(\mathcal{U}, p)$

- Percorrere l'ombra planare da un punto base p
- Primo passaggio su ogni incrocio = sopra-incrocio

2. **Operazioni sui diagrammi:**

- $S_i K$: scambia l'incrocio i
- $E_i K, e_i K$: splice orizzontale e verticale

3. **Sequenze di scambi:** $\lambda = (\lambda_n, \dots, \lambda_0)$

- Trasformano K in $\hat{K}(\lambda)$



Ingredienti per la Costruzione

Concetti chiave necessari:

1. **Nodo banale standard:** $\hat{K}(\mathcal{U}, p)$

- Percorrere l'ombra planare da un punto base p
- Primo passaggio su ogni incrocio = sopra-incrocio

2. **Operazioni sui diagrammi:**

- $S_i K$: scambia l'incrocio i
- $E_i K, e_i K$: splice orizzontale e verticale

3. **Sequenze di scambi:** $\lambda = (\lambda_n, \dots, \lambda_0)$

- Trasformano K in $\hat{K}(\lambda)$

Proprietà fondamentale: $L[\hat{K}] = a^{w(\hat{K})}$



La Formula Ricorsiva

Idea: Esprimere L_K in termini di diagrammi “più semplici”

Applicando le relazioni skein incrementalmente:

$$L[K] + L[S_0 K] = z(L[E_0 K] + L[e_0 K])$$

$$L[S_0 K] + L[S_1 S_0 K] = z(L[E_1 S_0 K] + L[e_1 S_0 K])$$

⋮

$$L[S_{n-1} \dots S_0 K] + L[\hat{K}] = z(L[E_n S_{n-1} \dots S_0 K] + L[e_n S_{n-1} \dots S_0 K])$$



La Formula Ricorsiva

Idea: Esprimere L_K in termini di diagrammi “più semplici”

Applicando le relazioni skein incrementalmente:

$$L[K] + L[S_0 K] = z(L[E_0 K] + L[e_0 K])$$

$$L[S_0 K] + L[S_1 S_0 K] = z(L[E_1 S_0 K] + L[e_1 S_0 K])$$

⋮

$$L[S_{n-1} \dots S_0 K] + L[\hat{K}] = z(L[E_n S_{n-1} \dots S_0 K] + L[e_n S_{n-1} \dots S_0 K])$$

Sommando e sottraendo membro a membro, i termini intermedi si cancellano!



La Formula Ricorsiva

Idea: Esprimere L_K in termini di diagrammi “più semplici”

Applicando le relazioni skein incrementalmente:

$$L[K] + L[S_0 K] = z(L[E_0 K] + L[e_0 K])$$

$$L[S_0 K] + L[S_1 S_0 K] = z(L[E_1 S_0 K] + L[e_1 S_0 K])$$

⋮

$$L[S_{n-1} \dots S_0 K] + L[\hat{K}] = z(L[E_n S_{n-1} \dots S_0 K] + L[e_n S_{n-1} \dots S_0 K])$$

Sommando e sottraendo membro a membro, i termini intermedi si cancellano!

Formula finale: $L_K = (-1)^{n+1} L_{\hat{K}} + z \sum_{i=0}^n (-1)^i (L[A_i^\lambda K] + L[B_i^\lambda K])$



Definizione Induttiva Completa

Caso 1: $K = \hat{K}$ (nodo banale standard) $L_K = a^{w(K)}$



Definizione Induttiva Completa

Caso 1: $K = \hat{K}$ (nodo banale standard) $L_K = a^{w(K)}$

Caso 2: $K = K_1 \cup K_2$ con K_1 sovrastante K_2 $L_K = \delta L_{K_1} L_{K_2}$ dove $\delta = \frac{a+a^{-1}}{z} - 1$



Definizione Induttiva Completa

Caso 1: $K = \hat{K}$ (nodo banale standard) $L_K = a^{w(K)}$

Caso 2: $K = K_1 \cup K_2$ con K_1 sovrastante K_2 $L_K = \delta L_{K_1} L_{K_2}$ dove $\delta = \frac{a+a^{-1}}{z} - 1$

Caso 3: Uso della formula ricorsiva: $L_K = \frac{1}{2} \left[\sum_{q=p, \bar{p}} \left((-1)^{|\lambda(q)|+1} L_{\hat{K}(q)} + z \sum_K (\lambda(q)) \right) \right]$



Definizione Induttiva Completa

Caso 1: $K = \hat{K}$ (nodo banale standard) $L_K = a^{w(K)}$

Caso 2: $K = K_1 \cup K_2$ con K_1 sovrastante K_2 $L_K = \delta L_{K_1} L_{K_2}$ dove $\delta = \frac{a+a^{-1}}{z} - 1$

Caso 3: Uso della formula ricorsiva: $L_K = \frac{1}{2} \left[\sum_{q=p, \bar{p}} \left((-1)^{|\lambda(q)|+1} L_{\hat{K}(q)} + z \sum_K (\lambda(q)) \right) \right]$

Proprietà cruciale: Ogni termine a destra ha meno incroci o è “più vicino” al caso base



Strategia della Dimostrazione

Ipotesi induttiva (per diagrammi con $< N$ incroci):

1. L_K è ben definito (indipendente dalle scelte)
2. L_K verifica tutte le relazioni skein
3. L_K è invariante per mosse II e III che non aumentano gli incroci



Strategia della Dimostrazione

Ipotesi induttiva (per diagrammi con $< N$ incroci):

1. L_K è ben definito (indipendente dalle scelte)
2. L_K verifica tutte le relazioni skein
3. L_K è invariante per mosse II e III che non aumentano gli incroci

Lemmi tecnici fondamentali:

- **Lemma delle Rotazioni:** L'ordine ciclico degli scambi non influenza il risultato
- **Invarianza del punto base:** La definizione non dipende dal punto base scelto
- **Identità per nodi banali:** $L[\hat{K}(p)] + L[\hat{K}(q)] = z(L[E_i\hat{K}] + L[e_i\hat{K}])$



Strategia della Dimostrazione

Ipotesi induttiva (per diagrammi con $< N$ incroci):

1. L_K è ben definito (indipendente dalle scelte)
2. L_K verifica tutte le relazioni skein
3. L_K è invariante per mosse II e III che non aumentano gli incroci

Lemmi tecnici fondamentali:

- **Lemma delle Rotazioni:** L'ordine ciclico degli scambi non influenza il risultato
- **Invarianza del punto base:** La definizione non dipende dal punto base scelto
- **Identità per nodi banali:** $L[\hat{K}(p)] + L[\hat{K}(q)] = z(L[E_i\hat{K}] + L[e_i\hat{K}])$

Metodo: Spostando il punto base di un incrocio per volta, si dimostra l'invarianza completa



Verifica degli Assiomi e Invarianza

Teorema: La definizione induttiva soddisfa tutti gli assiomi di Kauffman



Verifica degli Assiomi e Invarianza

Teorema: La definizione induttiva soddisfa tutti gli assiomi di Kauffman

Dimostrazione per le relazioni skein:

1. Scegli il punto base in modo che l'incrocio sia il primo nella sequenza
2. La relazione skein emerge naturalmente dalla formula ricorsiva
3. Gli altri termini si cancellano per simmetria



Verifica degli Assiomi e Invarianza

Teorema: La definizione induttiva soddisfa tutti gli assiomi di Kauffman

Dimostrazione per le relazioni skein:

1. Scegli il punto base in modo che l'incrocio sia il primo nella sequenza
2. La relazione skein emerge naturalmente dalla formula ricorsiva
3. Gli altri termini si cancellano per simmetria

Invarianza per isotopia regolare:

- **Mossa II:** scegli punti base che evitano gli incroci coinvolti
- **Mossa III:** usa equivalenze locali e induzione



Verifica degli Assiomi e Invarianza

Teorema: La definizione induttiva soddisfa tutti gli assiomi di Kauffman

Dimostrazione per le relazioni skein:

1. Scegli il punto base in modo che l'incrocio sia il primo nella sequenza
2. La relazione skein emerge naturalmente dalla formula ricorsiva
3. Gli altri termini si cancellano per simmetria

Invarianza per isotopia regolare:

- **Mossa II:** scegli punti base che evitano gli incroci coinvolti
- **Mossa III:** usa equivalenze locali e induzione

La costruzione induttiva “conosce automaticamente” tutte le proprietà necessarie!



Outline

Introduzione e Motivazione

Teoria e Costruzione

Risultati e Applicazioni



Il Risultato Principale

Teorema: Esiste ed è unico un invariante $L_K(a, z)$ che soddisfa gli assiomi di Kauffman.



Il Risultato Principale

Teorema: Esiste ed è unico un invariante $L_K(a, z)$ che soddisfa gli assiomi di Kauffman.

Dimostrazione completa:

1. **Esistenza:** La costruzione induttiva fornisce una definizione esplicita
2. **Buona definizione:** Indipendenza dalle scelte arbitrarie
3. **Verifica assiomi:** La definizione soddisfa tutte le relazioni richieste
4. **Unicità:** Gli assiomi determinano univocamente i valori



Il Risultato Principale

Teorema: Esiste ed è unico un invariante $L_K(a, z)$ che soddisfa gli assiomi di Kauffman.

Dimostrazione completa:

1. **Esistenza:** La costruzione induttiva fornisce una definizione esplicita
2. **Buona definizione:** Indipendenza dalle scelte arbitrarie
3. **Verifica assiomi:** La definizione soddisfa tutte le relazioni richieste
4. **Unicità:** Gli assiomi determinano univocamente i valori

Conseguenza: Il polinomio di Kauffman è un invariante completo e computabile per l'isotopia regolare



Il Risultato Principale

Teorema: Esiste ed è unico un invariante $L_K(a, z)$ che soddisfa gli assiomi di Kauffman.

Dimostrazione completa:

1. **Esistenza:** La costruzione induttiva fornisce una definizione esplicita
2. **Buona definizione:** Indipendenza dalle scelte arbitrarie
3. **Verifica assiomi:** La definizione soddisfa tutte le relazioni richieste
4. **Unicità:** Gli assiomi determinano univocamente i valori

Conseguenza: Il polinomio di Kauffman è un invariante completo e computabile per l'isotopia regolare

La teoria è ora su basi solide!



Dal Regolare all'Ambiente: Il Polinomio F_K

Usando la formula di correzione: $F_K = a^{-w(K)} L_K$



Dal Regolare all'Ambiente: Il Polinomio F_K

Usando la formula di correzione: $F_K = a^{-w(K)} L_K$

Teorema: $F_K(a, z)$ è un invariante di isotopia ambiente.



Dal Regolare all'Ambiente: Il Polinomio F_K

Usando la formula di correzione: $F_K = a^{-w(K)} L_K$

Teorema: $F_K(a, z)$ è un invariante di isotopia ambiente.

Significato:

- Partendo da un invariante regolare (L_K)
- Aggiungiamo la correzione del writhe
- Otteniamo un vero invariante di nodi!



Dal Regolare all'Ambiente: Il Polinomio F_K

Usando la formula di correzione: $F_K = a^{-w(K)} L_K$

Teorema: $F_K(a, z)$ è un invariante di isotopia ambiente.

Significato:

- Partendo da un invariante regolare (L_K)
- Aggiungiamo la correzione del writhe
- Otteniamo un vero invariante di nodi!

Proprietà:

- $F_{m(K)}(a, z) = F_{K(\frac{1}{a}, z)}$ (comportamento rispetto al mirror)
- $F[K_1 \# K_2] = F[K_1]F[K_2]$ (moltiplicatività per somma connessa)
- F_K distingue nodi che L_K non può distinguere



Implementazione e Verifica

Progetto Computazionale:

- **Implementazione in Python:** Algoritmo basato sulle relazioni skein
- **Calcolo automatico** di L_K e F_K per diagrammi di nodi
- **Interfaccia user-friendly** per l'inserimento di diagrammi



Implementazione e Verifica

Progetto Computazionale:

- **Implementazione in Python:** Algoritmo basato sulle relazioni skein
- **Calcolo automatico** di L_K e F_K per diagrammi di nodi
- **Interfaccia user-friendly** per l'inserimento di diagrammi

Verifica sperimentale:

- Confronto con il database **KnotInfo**
- Verifica su centinaia di nodi noti
- Test di coerenza con valori pubblicati



Implementazione e Verifica

Progetto Computazionale:

- **Implementazione in Python:** Algoritmo basato sulle relazioni skein
- **Calcolo automatico** di L_K e F_K per diagrammi di nodi
- **Interfaccia user-friendly** per l'inserimento di diagrammi

Verifica sperimentale:

- Confronto con il database **KnotInfo**
- Verifica su centinaia di nodi noti
- Test di coerenza con valori pubblicati

Scoperta interessante: Trovato un **errore** nel valore pubblicato per il nodo $10_{\{125\}}$!



Implementazione e Verifica

Progetto Computazionale:

- **Implementazione in Python:** Algoritmo basato sulle relazioni skein
- **Calcolo automatico** di L_K e F_K per diagrammi di nodi
- **Interfaccia user-friendly** per l'inserimento di diagrammi

Verifica sperimentale:

- Confronto con il database **KnotInfo**
- Verifica su centinaia di nodi noti
- Test di coerenza con valori pubblicati

Scoperta interessante: Trovato un **errore** nel valore pubblicato per il nodo $10_{\{125\}}$!

La teoria e l'implementazione si confermano a vicenda



Conclusioni

Percorso compiuto:

1. Dal concetto geometrico di nodo alla formalizzazione tramite diagrammi
2. Definizione dell'isotopia regolare e degli invarianti
3. Costruzione rigorosa del polinomio di Kauffman
4. Dimostrazione della buona definizione
5. Estensione agli invarianti di isotopia ambiente



Conclusioni



Conclusioni

Percorso compiuto:

1. Dal concetto geometrico di nodo alla formalizzazione tramite diagrammi
2. Definizione dell'isotopia regolare e degli invarianti
3. Costruzione rigorosa del polinomio di Kauffman
4. Dimostrazione della buona definizione
5. Estensione agli invarianti di isotopia ambiente

Risultati principali:

- **Dimostrazione** della buona definizione di L_K
- **Costruzione** di F_K come invariante ambiente
- **Verifica computazionale** e scoperta di errori nella letteratura



Conclusioni



Conclusioni

Percorso compiuto:

1. Dal concetto geometrico di nodo alla formalizzazione tramite diagrammi
2. Definizione dell'isotopia regolare e degli invarianti
3. Costruzione rigorosa del polinomio di Kauffman
4. Dimostrazione della buona definizione
5. Estensione agli invarianti di isotopia ambiente

Risultati principali:

- **Dimostrazione** della buona definizione di L_K
- **Costruzione** di F_K come invariante ambiente
- **Verifica computazionale** e scoperta di errori nella letteratura

Grazie per l'attenzione!



Conclusioni

Domande?