



UNIVERSITÀ DI PISA

Dipartimento di Matematica
Corso di Laurea Triennale in Matematica

Tesi di Laurea

Il polinomio di Kauffman: un invariante di isotopia regolare

Relatore:
Prof. Paolo Lisca

Candidato:
Antonio De Lucreziis

Anno Accademico 2024/2025

Abstract

In questa tesi tratteremo del polinomio di Kauffman, un invariante di nodi e link di isotopia regolare. Introduciamo dei risultati di fondazione della teoria dei nodi per definire l'isotopia regolare. Infine vedremo la dimostrazione della buona definizione del polinomio di Kauffman a partire dalla forma assiomatica. Per il progetto di Laboratorio Computazionale abbiamo implementato in Python questo polinomio e verificato tutti i valori presenti nel database di KnotInfo e trovato un errore nel calcolo del nodo 10_{125} .

Indice

1. Introduzione	3
1.1. Introduzione alla Teoria dei Nodi	3
1.2. Proiezioni e Diagrammi	6
1.3. Operazioni su Diagrammi	8
2. Isotopia Regolare	9
2.1. Writhe	10
2.2. Da isotopia regolare ad ambiente	13
3. Il Polinomio di Kauffman	14
3.1. Definizione assiomatica	14
3.2. Alcune proprietà del polinomio di Kauffman	16
3.3. Considerazioni preliminari	18
3.4. La definizione induttiva	24
3.5. Dimostrazione buona definizione	25
4. Bibliografia	42

Capitolo 1

Introduzione

1.1. Introduzione alla Teoria dei Nodi

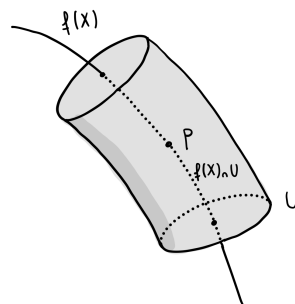
Ora introdurremo alcuni risultati fondamentali di teoria dei nodi. Vedremo le definizioni di nodo e link ed alcuni risultati di fondazione che ci serviranno per poter parlare ad esempio dei diagrammi planari e dell'isotopia regolare.

Definizione. Dati X, Y spazi topologici, $f : X \rightarrow Y$ continua si dice **embedding** se X è omeomorfo a $f(X) \subset Y$ con la topologia di sottospazio indotta da Y .

Fatto. Dati X, Y spazi topologici con X compatto, Y di Hausdorff e data un'applicazione continua $f : X \rightarrow Y$ allora f è un embedding $\Leftrightarrow$ è iniettiva.

Definizione. Dato un embedding $f : X \rightarrow Y$, un punto $p \in X$ allora f si dice **localmente piatto** in p se $\exists U \subset \mathbb{R}^3$ intorno di p , tale che

$$\begin{aligned} U &\approx \mathbb{D}^2 \times [0, 1] \\ U \cap f(X) &\Leftrightarrow \{0\} \times [0, 1] \end{aligned}$$



inoltre f si dice embedding **localmente piatto** se lo è in ogni punto di X .

Definizione. Un **nodo tame** è un sottoinsieme $K \subset \mathbb{R}^3$ per cui esiste un embedding $f : \mathbb{S}^1 \hookrightarrow \mathbb{R}^3$ localmente piatto con $K = f(\mathbb{S}^1)$. In questo caso f è anche detto **embedding tame**.

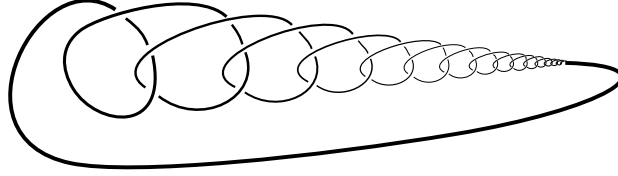


FIGURA 1. Un esempio di nodo non tame

Esistono anche nodi non tame come quello riportato nella figura precedente [1], ma d'ora in avanti considereremo solo nodi tame.

Definizione. Due nodi $K_0, K_1 \subset \mathbb{R}^3$ sono **equivalenti** se esiste un'**isotopia ambiente** H che porta uno nell'altro, ovvero esiste $H : \mathbb{R}^3 \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$ applicazione continua, tale che

- $\forall t \in [0, 1], H(\cdot, t)$ è un omeomorfismo

e ponendo $H_t(x) := H(x, t)$ si ha

- $H_0 = \text{id}_{\mathbb{R}^3}$
- $H_1(K_0) = K_1$

Inoltre se due nodi sono equivalenti allora vale che $\mathbb{R}^3 \setminus K_0 \approx \mathbb{R}^3 \setminus K_1$.

Spesso serve fare manipolazioni direttamente sui nodi o sui diagrammi e lavorare con gli embedding $\mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{R}^3$ non è molto comodo da un punto di vista formale e pratico, per questo motivo introduciamo i *nodi poligonali* che ci permettono di dare una formalizzazione alternativa dei nodi tame più operativa.

Definizione. Un **nodo poligonale** è un nodo equivalente ad un'unione finita di segmenti lineari.

Fatto – Crowell [2]. Dato un nodo $K \subset \mathbb{R}^3$, K è tame $\Leftrightarrow K$ è poligonale.

Definizione. Il **nodo banale** è la classe di equivalenza del bordo di un triangolo equilatero.

Passiamo ora al caso in cui abbiamo un nodo con più di una componente

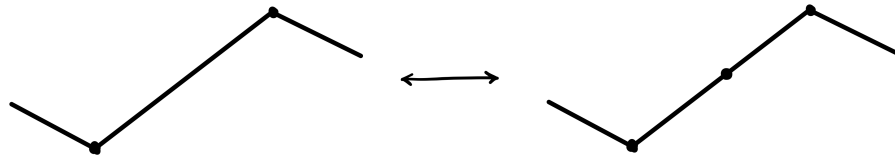
Definizione. $L \subset \mathbb{R}^3$ è detto **link** se $\exists$ embedding $f : \mathbb{S}^1 \cup \dots \cup \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{R}^3$ local-mente piatto con immagine L .

Possiamo generalizzare tutte le definizioni che diamo per i nodi ai link, sostituendo $\mathbb{S}^1$ con $\mathbb{S}^1 \cup \dots \cup \mathbb{S}^1$ e apportando le giuste modifiche.

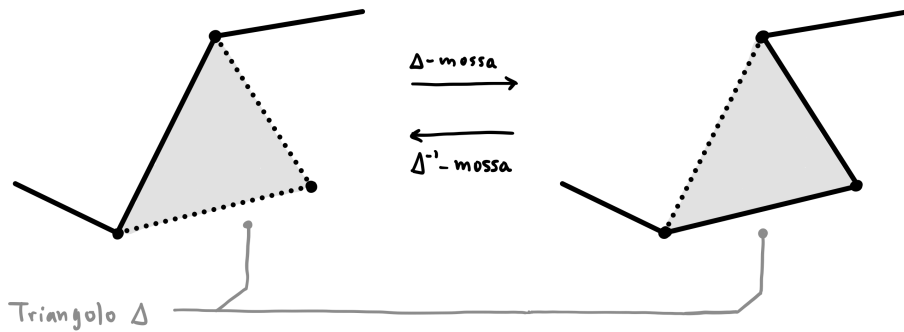
Introduciamo ora il concetto di equivalenza combinatoria di link poligonal in $\mathbb{R}^3$; questo è il primo passo che ci permetterà di descrivere l'equivalenza per isotopia ambiente tra nodi attraverso una sequenza finita di mosse.

Definizione. Due link L_1, L_2 sono **combinatorialmente equivalenti** se si ottengono uno dall'altro tramite un numero finito delle seguenti mosse:

- i) Aggiunta/rimozione di vertici



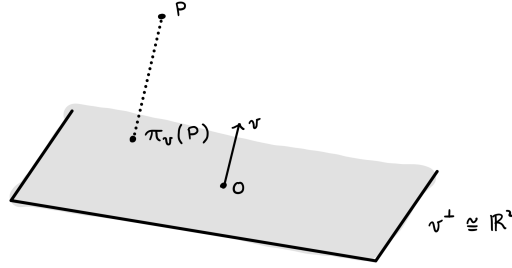
- ii) Dato un triangolo piano $\Delta \subset \mathbb{R}^3$ tale che $\Delta \cap L$ sia un lato di Δ ed un segmento di L allora una Δ -mossa è la seguente



Fatto. Due link poligonal $L_1, L_2 \subset \mathbb{R}^3$ sono equivalenti $\Leftrightarrow$ sono combinatorialmente equivalenti.

1.2. Proiezioni e Diagrammi

Data una direzione $v \in \mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$, possiamo definire $\pi_v : \mathbb{R}^3 \rightarrow v^\perp$ proiezione sul piano ortogonale a v come nella seguente figura:



Per formalizzare il concetto di diagramma di un nodo introdurremo il concetto di proiezione regolare, ovvero una proiezione in cui i punti di intersezione tra le immagini dei segmenti di L sono solamente gli incroci del nodo (e senza segmenti paralleli alla direzione di proiezione).

Definizione. Sia $L \subset \mathbb{R}^3$ un link, $v \in \mathbb{S}^2$ una direzione e $\pi_v : \mathbb{R}^3 \rightarrow v^\perp$ la proiezione su $v^\perp$ come in precedenza. Allora un punto $x \in \pi(L) \subset v^\perp$ si dice

- **regolare** se $|\pi^{-1}(x)| = 1$
- **singolare** se $|\pi^{-1}(x)| > 1$
- **doppio** se $|\pi^{-1}(x)| = 2$

Fatto. Dato un link poligonale $L \subset \mathbb{R}^3$, esiste un aperto denso $U \subset \mathbb{S}^2$ tale che $\forall v \in U$ si ha che

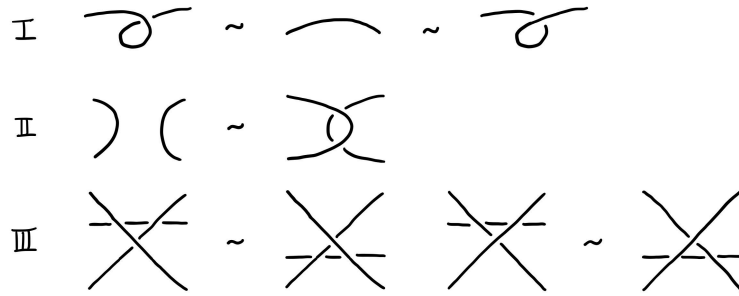
- i) L non ha segmenti paralleli a v .
- ii) Se $x \in \pi_v(L)$ è singolare allora
 - $\pi_v^{-1}(x)$ non contiene vertici di L
 - x è un punto doppio
 - x è un punto di intersezione trasversa delle immagini di due segmenti

Quindi dato $L \subset \mathbb{R}^3$ link poligonale, esiste una proiezione regolare $\pi(L) \subset \mathbb{R}^2$ con un numero finito di punti singolari, ciascuno dei quali è un punto doppio e di intersezione trasversa. Ognuno di questi punti doppi viene detto **incrocio**.

Definizione. Un **diagramma** $D \subset \mathbb{R}^2$ di un link $L \subset \mathbb{R}^3$ è l'immagine di L attraverso una proiezione regolare decorata con l'informazione sopra/sotto ad ogni incrocio.

Fatto. Due link con stesso diagramma sono equivalenti.

Definizione. Le mosse I, II, III (e le loro inverse) sono dette **mosse di Reidemeister**.



Teorema (di Reidemeister) 1.1. Due diagrammi di link equivalenti sono collegati da una successione finita di isotopie planari e mosse di Reidemeister.

Il modo principale in cui utilizzeremo il teorema di Reidemeister è attraverso la seguente proprietà. Indichiamo con $\mathcal{D}$ l'insieme dei diagrammi di nodi e link.

Proposizione 1.1. Data una funzione $\varphi : \mathcal{D} \rightarrow S$ con S un insieme (eventualmente con una qualche struttura come quella di anello) con la proprietà che $D \sim D' \Rightarrow \varphi(D) = \varphi(D')$ allora se $\varphi(D) \neq \varphi(D') \Rightarrow D \approx D'$, in particolare se D, D' sono diagrammi per K, K' allora $K \approx K'$.

Dimostrazione. È semplicemente la forma contronominale del teorema di Reidemeister. $\square$

Funzioni con la stessa proprietà di φ sono quindi invarianti di nodi o link per isotopia ambiente e ci danno un modo di distinguerli. Più avanti vedremo ad esempio il polinomio $F_K(a, z) : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{Z}[a, a^{-1}, z, z^{-1}]$ che risulterà essere un invariante di isotopia ambiente per link orientati.

Come abbiamo generalizzato da nodi a link possiamo ripetere tutto anche aggiungendo un'orientazione e studiare **nodi e link orientati** ed abbiamo anche una versione orientata del teorema di Reidemeister.

1.3. Operazioni su Diagrammi

Definizione. Dato un link $L \subset \mathbb{R}^3$ possiamo definire

- Il **mirror** $m(L) := \rho(L)$ dove $\rho : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ è la riflessione rispetto al piano di proiezione. In particolare dato un diagramma, il suo mirror è lo stesso diagramma con tutte le informazioni sopra/sotto scambiate.

inoltre, se diamo anche un'*orientazione* ad L possiamo definire

- Il **reverse** $r(L)$, in cui prendiamo l'orientazione opposta su ogni componente.
- L'**inverso** $-L := m(r(L)) = r(m(L))$.

Definizione. Sia $K \subset \mathbb{R}^3$, se K non è equivalente a $m(K)$ allora diciamo che K è **chirale**, altrimenti è detto **anfichirale**.

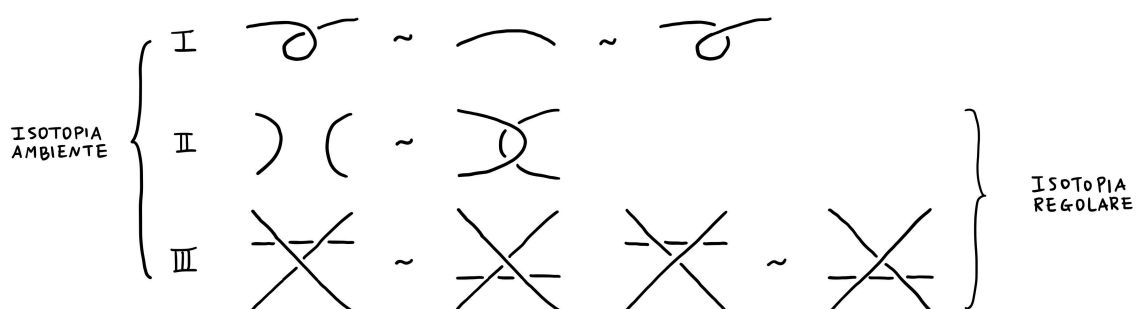
Capitolo 2

Isotopia Regolare

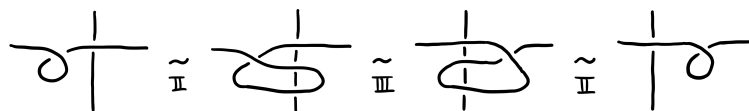
Il teorema di Reidemeister ci dice che due nodi sono equivalenti a meno di isotopia ambiente se e solo se lo sono anche dei loro diagrammi a meno di isotopie planari e mosse I, II e III.

Possiamo chiederci cosa succede se ci restringiamo all'equivalenza generata solo dalle isotopie planari e dalle mosse II e III, questo ci dà una nuova equivalenza tra nodi più stringente dell'isotopia ambiente.

Definizione. Due diagrammi D_1, D_2 di nodi o link si dicono equivalenti a meno di **isotopia regolare** se e solo se sono equivalenti a meno di isotopie planari e mosse II e III di Reidemeister.



Osservazione 2.1. Tutte le mosse di tipo I, quelle che introducono quelli che chiameremo **riccioli**, possono passare sopra o sotto altri fili senza problemi applicando le seguenti mosse



Quindi i riccioli possono essere spostati liberamente e non ci impediscono di applicare mosse di tipo II o III. In particolare questo ci permette anche di “fattorizzare” tutti i riccioli di una componente in modo che siano tutti vicini.

Osservazione 2.2. Un'altra osservazione sul comportamento dell'isotopia regolare rispetto alle mosse di tipo I è la seguente. Quando abbiamo una coppia di riccioli con segni opposti abbiamo la seguente proprietà di cancellazione detto *trucco di Whitney*.



C'è un'osservazione importante da fare quando parliamo di isotopia regolare. Quest'ultima è definita solo quando si parla di diagrammi nel piano o su $\mathbb{S}^2$. Nel caso dell'isotopia regolare su $\mathbb{S}^2$ questa è equivalente all'isotopia di *link con framing*¹. In particolare l'isotopia regolare preserva il framing del nodo.

Questo sarà importante più avanti quando vedremo invarianti come il polinomio F_K che risulteranno essere invarianti per isotopia ambiente. Nel caso del polinomio F_K , il calcolo va fatto fissando un particolare diagramma del link. È tutt'ora un problema aperto dare una definizione “intrinseca” di F_K senza usare diagrammi.

2.1. Writhe

Vediamo ora un primo invariante di isotopia regolare per link orientati, per prima cosa definiamo il segno di un incrocio.

¹Nel caso di nodi come embedding da $\mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^3$, un **nodo con framing** è un embedding di $\mathbb{D}^2 \times \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^3$. Il **framing** del nodo è l'immagine di $I \times \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^3$. Un nodo con framing può essere visto come una banda embedded dove il framing è il numero di twist con segno.

Definizione. Dato un incrocio del diagramma di un link orientato ci possono essere due casi in base alla direzione in cui il filo sotto si trova rispetto a quello sopra. Definiamo il **segno** di un incrocio in base a questi casi come segue

$$\varepsilon\left(\begin{array}{c} \nearrow \\ \searrow \end{array}\right) = +1 \quad \varepsilon\left(\begin{array}{c} \nwarrow \\ \swarrow \end{array}\right) = -1$$

Definizione. Dato K link orientato, il **writhe** $w(K)$ o numero di avvolgimento è dato dalla somma dei segni dei suoi incroci

$$w(K) := \sum_{c \text{ incrocio}} \varepsilon(c)$$

Proposizione 2.2. Se K è il diagramma di un nodo, il writhe non dipende dall'orientazione.

Dimostrazione. Basta ricondurci a controllare cosa succede quando applichiamo il cambio dell'orientazione in ε :

$$\begin{aligned} \varepsilon\left(\begin{array}{c} \nwarrow \\ \swarrow \end{array}\right) &= \varepsilon\left(\begin{array}{c} \nearrow \\ \searrow \end{array}\right) = +1 \\ \varepsilon\left(\begin{array}{c} \nearrow \\ \swarrow \end{array}\right) &= \varepsilon\left(\begin{array}{c} \nwarrow \\ \searrow \end{array}\right) = -1 \end{aligned}$$

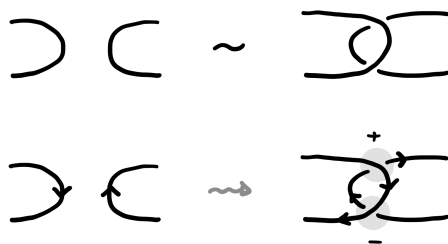
Nel primo caso invertendo le due frecce il filo che passa sotto va sempre verso sinistra rispetto a quello sopra quindi il segno rimane invariato, il secondo caso è analogo. $\square$

Questo risultato può essere generalizzato a diagrammi di link con l'accortezza di invertire l'orientazione di tutte le componenti (o anche solamente tutte quelle che appartengono ad una sola componente connessa della sua ombra planare).

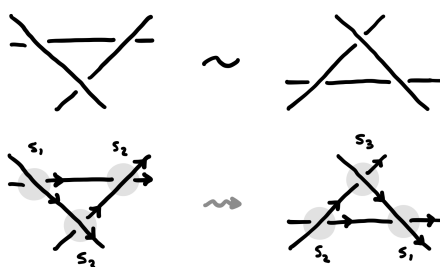
Proposizione 2.3. Il writhe è un invariante di isotopia regolare, ovvero se K_1, K_2 sono diagrammi di link equivalenti a meno di isotopia regolare allora $w(K_1) = w(K_2)$.

Dimostrazione. Controlliamo cosa succede nel caso delle mosse di tipo II e III:

- Nel caso della mossa II si può vedere che indipendentemente dalle orientazioni dei due fili, quando portiamo uno sopra l'altro compaiono sempre due incroci con segni opposti quindi per additività del writhe la somma totale non cambia.



- Per quanto riguarda la mossa III, il numero di incroci non cambia quindi basta controllare che la somma sia la stessa



Come possiamo notare nel caso mostrato in figura ciò che accade è che stiamo solo spostando e scambiando alcuni degli incroci tra loro. In particolare possiamo identificare ogni incrocio come l'intersezione di due delle tre rette, dopo aver applicato la mossa III le rette si saranno spostate ma le orientazioni saranno sempre le stesse e quindi anche i segni degli incroci.

Inoltre notiamo che il writhe non è influenzato dalle isotopie planari quindi questo conclude la dimostrazione. $\square$

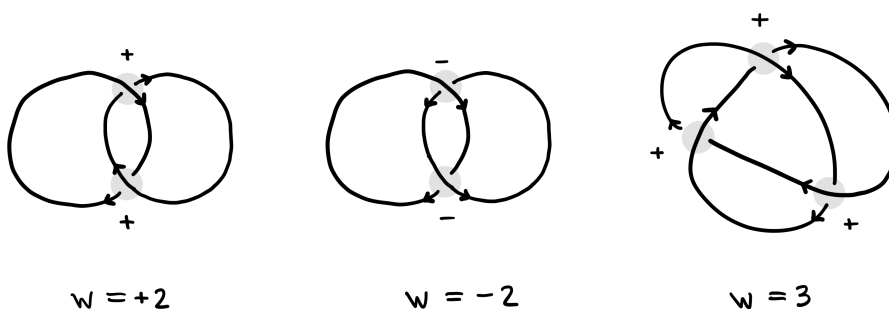


FIGURA 9. Esempi di calcolo del writhe

2.2. Da isotopia regolare ad ambiente

Un primo fatto generale che possiamo vedere è che, dato un invariante di isotopia regolare per diagrammi che si comporta “bene” rispetto alle mosse di tipo I, possiamo costruire un invariante di isotopia ambiente per link aggiungendo un fattore di correzione dato dal writhe.

Proposizione 2.4. Sia R un anello, $a \in R$ un elemento invertibile e K un link orientato, $\mathcal{D}$ l'insieme dei diagrammi di link orientati, allora se $L : \mathcal{D} \rightarrow R$ è un invariante di isotopia regolare tale che

$$L(\overline{\bigcirc}) = aL(\frown) \quad L(\overline{\bigcirc}) = a^{-1}L(\frown)$$

allora $F(K) := a^{-w(K)}L(K)$ è un invariante di isotopia ambiente.

Osservazione. In questo caso la notazione “ $L(\overline{\bigcirc}) = aL(\frown)$ ” indica che ci sono due diagrammi D_1, D_2 identici ovunque tranne che nella parte evidenziata.

Dimostrazione. Per prima cosa notiamo che $w(K)$ è invariante per isotopia regolare, dunque lo è anche $a^{-w(K)}$. Osserviamo che $a^{-w(K)} \cdot L(K)$ è un prodotto di quantità invarianti per isotopia regolare dunque anche $F(K)$ è invariante per isotopia regolare.

Dunque basta controllare che $F(K)$ sia invariante rispetto alle mosse di tipo I. Per prima cosa osserviamo che

$$w(\overline{\bigcirc}) = w(\frown) + 1 \quad w(\overline{\bigcirc}) = w(\frown) - 1$$

ed usando la proprietà dell'ipotesi otteniamo

$$\begin{aligned} F(\overline{\bigcirc}) &= a^{-w(\overline{\bigcirc})} \cdot L(\overline{\bigcirc}) \\ &= a^{-w(\frown)-1} \cdot a \cdot L(\frown) \\ &= a^{-w(\frown)} \cdot \cancel{a} \cdot \cancel{a} \cdot L(\frown) \\ &= a^{-w(\frown)} \cdot L(\frown) = F(\frown) \end{aligned}$$

e analogamente segue anche per l'altro ricciolo che $F(\overline{\bigcirc}) = F(\frown)$. $\square$

Capitolo 3

Il Polinomio di Kauffman

Ora introdurremo il polinomio di Kauffman [3] detto L_K , che vedremo essere un invariante di isotopia regolare. Questo polinomio è definito in modo implicito da assiomi che utilizzano le relazioni skein, queste relazioni possono essere utilizzate direttamente per calcolare il polinomio di Kauffman per un certo diagramma in modo implicito.

Vedremo come questi assiomi definiscono un unico invariante di isotopia regolare ben definito e come $L_K(a, z)$ può essere generalizzato ad un invariante di isotopia ambiente $F_K(a, z)$.

3.1. Definizione assiomatica

Notazione. Per rendere alcuni calcoli più leggibili, in questo capitolo utilizzeremo in modo intercambiabile le notazioni $L_K, L[K]$ per indicare il polinomio di Kauffman associato ad un certo diagramma.

Definizione 3.1 – Assiomi di L_K . Sia K un diagramma di un link non orientato, e sia $\mathbb{Z}[a, a^{-1}, z, z^{-1}]$ l'anello dei polinomi di Laurent sugli interi nelle variabili a e z .

Allora $L_K \in \mathbb{Z}[a, a^{-1}, z, z^{-1}]$, e verifica i seguenti assiomi:

- i) Se K, K' sono equivalenti a meno di isotopia regolare, allora $L_K = L_{K'}$.
- ii) Valgono le seguenti relazioni skein per quaterne di diagrammi identici ovunque tranne nella parte evidenziata
 - a) $L[\text{X}] + L[\text{X}] = z(L[\text{Y}] + L[\text{Z}])$
 - b) $L[\text{O}] = 1$
 - c) $L[\text{D}] = aL[\text{A}]$
 - d) $L[\text{D}] = a^{-1}L[\text{A}]$

Al momento non sappiamo se il polinomio L_K sia ben definito, ovvero se esiste un polinomio L_K che verifica gli assiomi e non sappiamo neanche se sia unico.

In questo lavoro vedremo che L_K esiste ed è unico e che è un invariante di isotopia regolare e può essere generalizzato ad invariante di isotopia ambiente come segue

Definizione. Definiamo $F_K \in \mathbb{Z}[a, a^{-1}, z, z^{-1}]$ per diagrammi di link orientati K come

$$F_K := a^{-w(K)} L_K$$

dove L_K di un diagramma orientato è definito dimenticando l'orientazione.

Proposizione 3.5. Il polinomio $F_K(a, z)$ è un invariante di isotopia ambiente

Dimostrazione. Segue dalla Proposizione 2.4 osservando che a è invertibile in $\mathbb{Z}[a, a^{-1}, z, z^{-1}]$. □

3.2. Alcune proprietà del polinomio di Kauffman

Lemma 3.6. Sia K il diagramma di un link orientato e $m(K)$ il suo mirror. Allora abbiamo le seguenti relazioni

$$L_{m(K)}(a, z) = L_K(1/a, z) \quad F_{m(K)}(a, z) = F_K(1/a, z)$$

Dimostrazione. $m(K)$ è ottenuto da K scambiando tutti i suoi incroci quindi se analizziamo cosa succede nei vari assiomi solo vicino ad un certo incrocio otteniamo le seguenti relazioni

$$\begin{aligned} L[m(\bigcirc)] &= L[\bigcirc] = 1 \\ L[m(\overline{\mathcal{D}})] &= L[\overline{\mathcal{D}}] = a^{-1}L[\neg] \\ L[m(\overline{\mathcal{D}})] &= L[\overline{\mathcal{D}}] = aL[\neg] \end{aligned}$$

ed infine l'ultima relazione rimane invariata per la simmetria del polinomio di Kauffman

$$\begin{aligned} L[m(\times)] + L[m(\times)] &= z(L[m(\smile)] + L[m(\frown)]) \\ \Rightarrow L[\times] + L[\times] &= z(L[\smile] + L[\frown]) \\ \Rightarrow L[\times] + L[\times] &= z(L[\smile] + L[\frown]) \end{aligned}$$

quindi passare al mirror ha l'effetto di scambiare solamente a con $1/a$ ma il resto della valutazione rimane identica.

Infine per $F_{m(K)}$ basta osservare che $w(m(K)) = -w(K)$ per una motivazione analoga. $\square$

Prima di passare alla dimostrazione della buona definizione vediamo alcuni esempi di calcolo di L_K in modo “implicito”, questo può essere fatto scegliendo accuratamente i diagrammi in cui effettuare la valutazione attraverso le relazioni skein degli assiomi.

Ad esempio proviamo a ricavare il valore di $\delta := L[\bigcirc\bigcirc]$

$$\begin{aligned}
 L[\text{8}] + L[\text{8}] &= z(L[\text{8}] + L[\text{8}]) \\
 \Rightarrow aL[\bigcirc] + a^{-1}L[\bigcirc] &= z(\delta + L[\bigcirc]) \\
 \Rightarrow a + a^{-1} &= z(\delta + 1) \\
 \Rightarrow \delta &= (a + a^{-1})/z - 1
 \end{aligned}$$

Questo valore $\delta = (a + 1/a)/z - 1$ ricomparirà anche in seguito ed è il coefficiente che il polinomio di Kauffman introduce quando abbiamo più componenti disgiunte (ovvero $L[K_1 \sqcup K_2] = \delta L[K_1]L[K_2]$).

Possiamo anche trovare il valore per il link di Hopf come segue

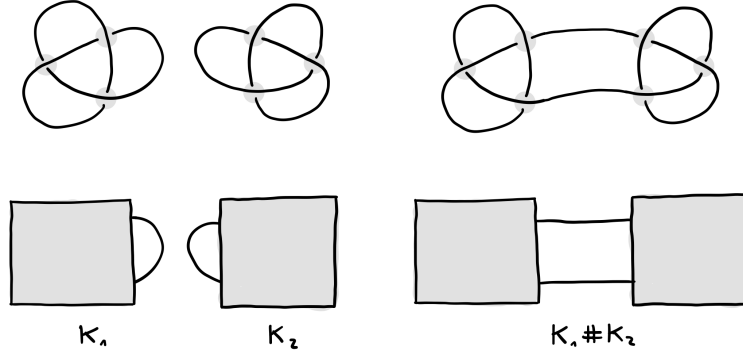
$$\begin{aligned}
 L[\text{Hopf}] + L[\text{Hopf}] &= z(L[\text{Hopf}] + L[\text{Hopf}]) \\
 \Rightarrow L[\text{Hopf}] + \delta &= z(a + a^{-1}) \\
 \Rightarrow L[\text{Hopf}] &= -(a + a^{-1})z^{-1} + 1 + (a + a^{-1})z
 \end{aligned}$$

E ad esempio anche del nodo trifoglio:

$$\begin{aligned}
 L[\text{trifoglio}] + L[\text{trifoglio}] &= z(L[\text{trifoglio}] + L[\text{trifoglio}]) \\
 \Rightarrow L[\text{trifoglio}] + a &= z(L[\text{Hopf}] + a^{-2}) \\
 \Rightarrow L[\text{trifoglio}] &= -(2a + a^{-1}) + (1 + a^{-2})z + (a + a^{-1})z^2
 \end{aligned}$$

Definizione. Diremo che un diagramma è **split** se è l'unione disgiunta di due diagrammi separati, in questo caso scriviamo $K = K_1 \sqcup K_2$ dove K_1 e K_2 sono le due componenti disgiunte.

Definizione. Un diagramma K è una **somma connessa** se appare come due diagrammi disgiunti connessi da due archi paralleli (a meno di isotopie planari). Tagliando questi due archi e riunendo insieme le estremità dello stesso sotto-diagramma otteniamo un nuovo diagramma split della forma $\tilde{K} = K_1 \sqcup K_2$, in questo caso chiamiamo la somma connessa $K = K_1 \# K_2$.


 FIGURA 10. Esempio di diagrammi *split* ed in *somma connessa*

In particolare abbiamo le seguenti identità per i polinomi L_K e F_K in relazione ai diagrammi *split* e in *somma connessa*. La dimostrazione è omessa ma si fa procedendo per induzione sul numero di incroci.

Fatto. Valgono le seguenti relazioni di L ed F per diagrammi *split* o in somma connessa

$$\begin{aligned} L[K_1 \sqcup K_2] &= \delta L[K_1]L[K_2] & F[K_1 \sqcup K_2] &= \delta F[K_1]F[K_2] \\ L[K_1 \# K_2] &= L[K_1]L[K_2] & F[K_1 \# K_2] &= F[K_1]F[K_2] \end{aligned}$$

dove $\delta = (a + a^{-1})/z - 1$ ed è lo stesso coefficiente che abbiamo trovato nell'esempio precedente.

3.3. Considerazioni preliminari

Prima di descrivere la definizione induttiva diamo alcune definizioni per certe manipolazioni dei diagrammi di nodi e link.

Definizione. Sia K un diagramma di un nodo, $\mathcal{U}$ la sua ombra planare² e $p \in \mathcal{U}$ un punto di partenza direzionato in $\mathcal{U}$.

- Il suo **nodo banale standard** (o *in forma discendente*) associato a K detto $\hat{K}(\mathcal{U}, p)$ è definito come segue: si prende il punto di partenza direzionato e si inizia a percorrere l'ombra planare in quella direzione e si rende ogni incrocio un sopra-incrocio quando ci si passa sopra per la prima volta.

²Ovvero per $K \subset \mathbb{R}^3$ poniamo $\mathcal{U} := \pi(K) \subset \mathbb{R}^2$

Questa definizione si estende anche a diagrammi di link prendendo un insieme di punti base ordinati come mostrato in figura. In particolare questo induce un ordinamento dall'alto verso il basso delle componenti.

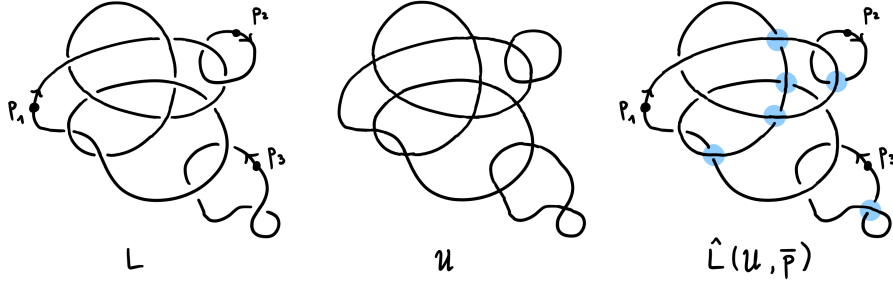


FIGURA 11. Un link con tre componenti e punti di partenza direzionati p_1, p_2, p_3 , con $\bar{p} = (p_1, p_2, p_3)$. In $\hat{L}(\mathcal{U}, \bar{p})$ sono evidenziati in **azzurro** gli incroci scambiati rispetto al link L .

- Definiamo ora le seguenti mosse su un diagramma K , diamo un'etichetta ad ogni incrocio e sia i l'etichetta di un incrocio del diagramma

$$\begin{array}{cccc} \begin{array}{c} \diagup \diagdown \\ \diagdown \diagup \end{array} & \begin{array}{c} \diagup \diagdown \\ \diagup \diagdown \end{array} & \begin{array}{c} \smile \\ \frown \end{array} & \begin{array}{c}) \\ (\end{array} \\ K & S_i K & E_i K & e_i K \end{array}$$

in questo caso $S_i K$ scambia l'informazione sopra/sotto dell'incrocio, mentre $E_i K$ e $e_i K$ applicano gli **splice** orizzontali e verticali a quell'incrocio.

Sia $\lambda = (\lambda_n, \dots, \lambda_0)$ una sequenza di etichette di incroci di K .

- Definiamo le seguenti notazioni compatte per una sequenza di scambi seguita da uno splice finale

$$A_i^\lambda := E_{\lambda_i} S_{\lambda_{i-1}} \cdots S_{\lambda_0} \quad B_i^\lambda := e_{\lambda_i} S_{\lambda_{i-1}} \cdots S_{\lambda_0}$$

notiamo che per $i = 0$ abbiamo $A_0^\lambda K = E_{\lambda_0} K$ e $B_0^\lambda K = e_{\lambda_0} K$ che è l'unico caso degenerare per questa definizione.

- Poniamo $\hat{K}(\lambda) = S_{\lambda_n} \cdots S_{\lambda_0} K$ e definiamo le notazioni compatte per le seguenti somme alternate

$$\sum_K(\lambda) := \sum_{i=0}^n (-1)^i (L[A_i^\lambda K] + L[B_i^\lambda K])$$

$$\Omega_K(\lambda) := (-1)^{|\lambda|+1} L[\hat{K}(\lambda)] + z \sum_K(\lambda)$$

dove $|\lambda| := n$.

Fatto 3.1. Un nodo banale standard è equivalente ad un nodo banale a meno di isotopia ambiente.

Osservazione. Se consideriamo un diagramma di link K , $\hat{K}(\mathcal{U}, p)$ ci induce una sequenza di scambi λ su K tale che $\hat{K}(\mathcal{U}, p) = S_{\lambda_n} \cdots S_{\lambda_0} K$.

Osservazione 3.3. Se abbiamo una sequenza di operazioni S_i, E_i, e_i su incroci diversi queste operazioni commutano tra loro. Questo segue dal fatto che queste operazioni fanno solo modifiche locali al diagramma.

Definizione. Dati K_1, K_2 diagrammi di link, diciamo che K_1 **sovrasta** K_2 se ogni incrocio in $K_1 \cap K_2$ è un sopra-incrocio.

Enunciamo ora un lemma che utilizzeremo più volte in seguito.

Lemma 3.7. Sia K un diagramma di un nodo in forma discendente, allora o è composto interamente da riccioli o ammette una sequenza di mosse di tipo II e III che portano al diagramma di un nodo formato solo da riccioli.

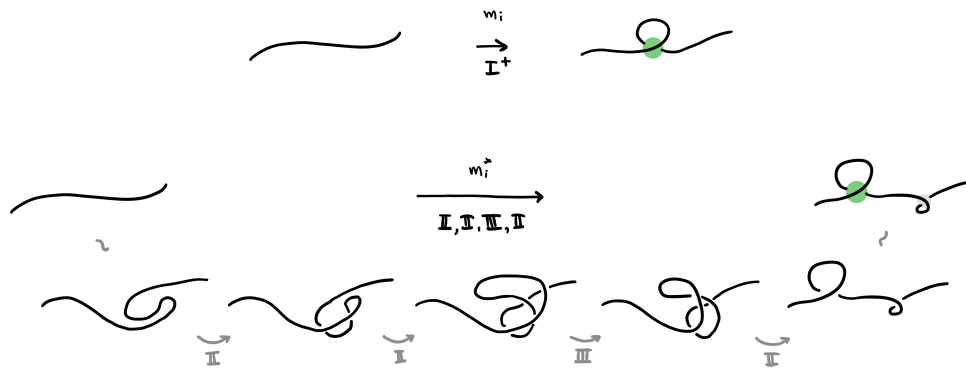
Dimostrazione. Per il Fatto 3.1, un nodo banale standard è equivalente ad un nodo banale a meno di isotopia ambiente. Quindi possiamo applicare il teorema di Reidemeister ed ottenere una successione di mosse e diagrammi tale che

$$K = D_0 \xrightarrow{m_1} \cdots \xrightarrow{m_n} D_n = \bigcirc$$

con m_i mosse di tipo I, II, III. Ora l'idea è modificare questa successione di mosse in modo da ottenere una nuova successione composta solo da mosse II e III che termina con un diagramma composto solo da riccioli.

Applichiamo induttivamente le seguenti modifiche ad ogni mossa m_i nella sequenza, tenendo traccia di cosa succede man mano agli incroci:

- Se abbiamo una mossa di tipo I che rimuove un ricciolo, allora scartiamo la mossa in modo da conservare il ricciolo. In particolare, in tutte le mosse successive della sequenza originale, sicuramente non compare questo incrocio poiché questa mossa lo cancellava. Quindi questo sarà uno di quei riccioli che rimarrà nel nuovo diagramma finale.
- Se abbiamo una mossa di tipo I che aggiunge un ricciolo, allora possiamo introdurlo sfruttando l'Osservazione 2.2 ovvero il trucco di Whitney. Possiamo creare due riccioli utilizzando solo mosse II e III in modo tale che uno dei due sia orientato allo stesso modo di quello introdotto dal ricciolo della sequenza originale, l'altro sarà in più ma possiamo ignorarlo come nel caso precedente.



Abbiamo aggiunto così due incroci uno dei quali corrisponde ad uno della vecchia sequenza che verrà cancellato dalle mosse originali mentre l'altro è uno di quei riccioli che rimarranno nel diagramma finale.

- Se abbiamo una mossa di tipo II o III, allora questa mossa interesserà una certa regione del diagramma. Per prima cosa utilizziamo l'Osservazione 2.1 per spostare tutti quei riccioli che si trovano nella regione in questione al di fuori di essa e poi applichiamo la mossa originale.

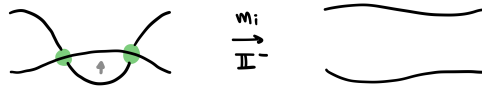




FIGURA 15. Esempio per la mossa II che rimuove un incrocio

In questo caso abbiamo solo spostato dei riccioli ed applicato la stessa mossa della sequenza originale quindi non abbiamo introdotto incroci in più rispetto alla sequenza originale.

Otteniamo così una nuova successione di diagrammi D'_i e di mosse m_i^* solo di tipo II o III:

$$K = D'_0 \xrightarrow{m_1^*} \cdots \xrightarrow{m_n^*} D'_n$$

Vorremo ora vedere che il diagramma D'_n è composto solo da riccioli. Questo segue dal fatto che nella successione originale tutti gli incroci si cancellavano, ciò accade anche nella nuova successione tranne per gli incroci che abbiamo aggiunto modificando le mosse di tipo I, ma tutti questi sono dei riccioli quindi D'_n sarà composto solo da riccioli. $\square$

Corollario. Un'altro modo di vedere il lemma precedente è che il diagramma di un nodo in forma discendente è equivalente a meno di isotopia regolare ad uno composto solo da riccioli.

Vediamo ora l'idea che ci permette di trovare una formula chiusa per il polinomio L_K che utilizzeremo nella dimostrazione della buona definizione. Per prima cosa analizziamo quello che sarà il caso base della nostra definizione induttiva, ovvero quando abbiamo un nodo banale standard.

Utilizzando il lemma precedente, possiamo calcolare esplicitamente $L_{\hat{K}(\mathcal{U}, p)}$ usando solo gli assiomi ii.b), ii.c), ii.d) ovvero quelli per $\overline{\cup}$, $\overline{\cap}$ e $\bigcirc$. Segue facilmente per induzione che $L_{\hat{K}}(a, z) = a^{w(K)}$.

Dato un diagramma di un nodo K , l'idea per la costruzione della definizione ricorsiva è di considerare il suo nodo o link discendente standard $\hat{K}(\mathcal{U}, p)$ rispetto ad un punto base p .

Questo induce una sequenza di indici λ che indichiamo con $\lambda = (0, \dots, n)$. Se applichiamo incrementalmente gli scambi a K , ovvero consideriamo $S_i \cdots S_0 K$ al variare di i , ed applichiamo la relazione skein ii.a) a questi diagrammi, otteniamo le seguenti relazioni:

$$\begin{aligned} L[K] + L[S_0 K] &= z(L[E_0 K] + L[e_0 K]) \\ L[S_0 K] + L[S_1 S_0 K] &= z(L[E_1 S_0 K] + L[e_1 S_0 K]) \\ &\vdots \\ L[S_{n-1} \cdots S_0 K] + L[\underbrace{S_n \cdots S_0 K}_{\hat{K}}] &= z(L[E_n S_{n-1} \cdots S_0 K] + L[e_n S_{n-1} \cdots S_0 K]) \end{aligned}$$

Ora, sommando e sottraendo membro a membro queste equazioni otteniamo la seguente identità

$$\begin{aligned} & \begin{array}{ccc} L[K] + L[S_0 K] & & z(L[E_0 K] + L[e_0 K]) \\ -(L[S_0 K] + L[S_1 S_0 K]) & & -z(L[E_1 S_0 K] + L[e_1 S_0 K]) \\ & \vdots & \vdots \\ & \vdots & \vdots \end{array} \\ +(-1)^n (L[S_{n-1} \cdots S_0 K] + L[\hat{K}]) &= +(-1)^n (z(L[E_n S_{n-1} \cdots S_0 K] + L[e_n S_{n-1} \cdots S_0 K])) \end{aligned}$$

notiamo che possiamo cancellare tutti i termini del membro di sinistra che compaiono due volte con segno opposto

$$\begin{aligned} & \begin{array}{ccc} L[K] + \cancel{L[S_0 K]} & & z(L[E_0 K] + L[e_0 K]) \\ -(\cancel{L[S_0 K]} + \cancel{L[S_1 S_0 K]}) & & -z(L[E_1 S_0 K] + L[e_1 S_0 K]) \\ & \vdots & \vdots \\ & \vdots & \vdots \end{array} \\ +(-1)^n (\cancel{L[S_{n-1} \cdots S_0 K]} + L[\hat{K}]) &= +(-1)^n (z(L[E_n S_{n-1} \cdots S_0 K] + L[e_n S_{n-1} \cdots S_0 K])) \end{aligned}$$

Da cui otteniamo un'espressione ricorsiva per L_K :

$$\begin{aligned} \Rightarrow L_K &= (-1)^{n+1} L_{\hat{K}} + z \sum_{i=0}^n (-1)^i (L[E_i S_{i-1} \cdots S_0 K] + L[e_i S_{i-1} \cdots S_0 K]) \\ &= (-1)^{n+1} L_{\hat{K}} + z \sum_{i=0}^n (-1)^i (L[A_i^\lambda K] + L[B_i^\lambda K]) \end{aligned} \tag{1}$$

Questo ci dà un'idea su come sia possibile calcolare induttivamente L_K in termini di $L_{\hat{K}}$ e di altri diagrammi con meno incroci del diagramma di partenza o più "vicini" a $\hat{K}$.

Affinché l'induzione possa sempre raggiungere il caso base di un nodo in forma discendente serve anche aggiungere la relazione

$$L_{K_1 \sqcup K_2} = \delta L_{K_1} L_{K_2} \quad (2)$$

per $K = K_1 \sqcup K_2$ con K_1 sovrastante³ K_2 .

sempre con $\delta = (a + a^{-1})/z - 1$.

3.4. La definizione induttiva

Definizione 3.2 – Formula chiusa per L_K . Il polinomio $L_K(a, z)$ è definito induttivamente come segue, abbiamo i seguenti casi:

- i) Se $K = \hat{K}(\mathcal{U}, p)$ è un *nodo banale standard* per un qualche p allora

$$L_K(a, z) := a^{w(K)}$$

- ii) Se $K = K_1 \cup K_2$ con K_1 diagramma di un nodo e K_2 diagramma di link e K_1 *sovrasta* K_2 , allora poniamo

$$L(K_1 \cup K_2) := \delta L(K_1) L(K_2)$$

con $\delta := (a + a^{-1})/z - 1$.

- iii) Sia $K = K_1 \cup \dots \cup K_n$ con K_i diagrammi di nodi e tale che nessun K_i sovrasta tutti gli altri allora:

- a) Se $n > 1$ allora siano $p_1, \dots, p_n$ dei punti di partenza direzionati su $K_1, \dots, K_n$ e $\bar{p}_i$ lo stesso punto di partenza p_i con la direzione opposta su K_i . Sia $\lambda(p_i)$ la sequenza di scambi di incroci tra K_i e $K - K_i$ tale che $\hat{K}(\lambda(p_i)) = K_i \sqcup (K - K_i)$, con K_i *sovrastante* al resto delle componenti (chiameremo questa *sequenza di rialzo*). A questo punto possiamo definire L_K come

$$L_K(a, z) := \frac{1}{2n} \left[\sum_{i=1}^n \sum_{q=p_i, \bar{p}_i} \left((-1)^{|\lambda(q)|+1} \delta L_{K_i} L_{K-K_i} + z \sum_K (\lambda(q)) \right) \right]$$

³Questo include anche il caso di componenti disgiunte in quanto sono sovrastanti a vuoto a vicenda.

- b) Se $n = 1$ allora sia p un punto di partenza direzionato su K e $\bar{p}$ quello con direzione opposta. Sia $\lambda(p)$ la sequenza di scambi di incroci che lo porta al nodo banale standard $\hat{K}$ e definiamo

$$L_K(a, z) := \frac{1}{2} \left[\sum_{q=p, \bar{p}} \left((-1)^{|\lambda(q)|+1} L_{\hat{K}(q)} + z \sum_K (\lambda(q)) \right) \right]$$

3.5. Dimostrazione buona definizione

Per prima cosa osserviamo che in ogni termine della definizione induttiva per L_K , quando questa dipende dalla scelta di un punto base, compaiono i termini per entrambe le direzioni. Dunque ci basta dimostrare induttivamente che le definizioni non dipendono dalla scelta di punto base.

Nel corso della dimostrazione tutti gli argomenti per induzione si baseranno sul numero di incroci dei diagrammi di link. Ometteremo i casi base, ovvero i controlli per diagrammi con pochi vertici che fanno partire l'induzione in quanto sono tutte semplici verifiche.

Definizione 3.3 – L'ipotesi induttiva. L'ipotesi induttiva che useremo nel corso della dimostrazione è la seguente:

Per ogni diagramma di link K con $< N$ incroci e per diagrammi contenenti $\overline{\bigcirc}$ con meno di N incroci:

- a) L_K è ben definito (non dipende dalla scelta di punto base).
- b) L_K verifica gli assiomi:
 - $L[K] + L[S_i K] = z(L[e_i K] + L[E_i K])$
 - $L[\overline{\bigcirc}] = aL[\frown]$
 - $L[\bigcirc] = a^{-1}L[\frown]$
- c) L_K è invariante per mosse di tipo II e III che non aumentano il numero di incroci.

Lemma 3.8. Sia $\lambda = (\lambda_n, \dots, \lambda_1, \lambda_0)$ una scelta di etichette per un sottoinsieme di incroci di un diagramma di link K . Sia $\mu = (\lambda_0, \lambda_n, \dots, \lambda_1)$ la stessa successione ma ruotata di 1 in avanti. Allora

$$\sum_K(\lambda) = \sum_K(\mu)$$

Dimostrazione. Per prima cosa rinominiamo le etichette $\lambda_n, \dots, \lambda_0$ come $n, \dots, 0$ per semplificare la notazione, dunque

$$\lambda = (n, n-1, \dots, 1, 0) \quad \mu = (0, n, n-1, \dots, 1)$$

ricordiamo ora le definizioni

$$\begin{aligned} \sum_K(\lambda) &= \sum_{i=0}^n (-1)(L[A_i^\lambda K] + L[B_i^\lambda K]) \\ &= (L[E_0 K] + L[e_0 K]) + \\ &\quad -(L[E_1 S_0 K] + L[e_1 S_0 K]) + \\ &\quad \vdots \\ &\quad +(-1)^n (L[E_n S_{n-1} \cdots S_0 K] + L[e_n S_{n-1} \cdots S_0 K]) \\ \sum_K(\mu) &= \sum_{i=0}^n (-1)(L[A_i^\mu K] + L[B_i^\mu K]) \\ &= (L[E_1 K] + L[e_1 K]) + \\ &\quad -(L[E_2 S_1 K] + L[e_2 S_1 K]) + \\ &\quad \vdots \\ &\quad +(-1)^n (L[E_0 S_n \cdots S_1 K] + L[e_0 S_n \cdots S_1 K]) \end{aligned}$$

Calcoliamo ora $\sum_K(\lambda) - \sum_K(\mu)$, l'idea è di fattorizzare per “righe” i termini:

$$\begin{aligned} &(L[E_0 K] + L[e_0 K]) + \\ &\quad -(L[E_1 S_0 K] + L[e_1 S_0 K]) + \quad (L[E_1 K] + L[e_1 K]) + \\ &\quad +(L[E_2 S_1 S_0 K] + L[e_2 S_1 S_0 K]) + \quad -(L[E_2 S_1 K] + L[e_2 S_1 K]) + \\ &\quad \vdots \quad \quad \quad +(L[E_3 S_2 S_1 K] + L[e_3 S_2 S_1 K]) + \\ &\quad +(-1)^n (L[E_n S_{n-1} \cdots S_0 K] + L[e_n S_{n-1} \cdots S_0 K]) \quad \vdots \\ &\quad \quad \quad +(-1)^n (L[E_0 S_n \cdots S_1 K] + L[e_0 S_n \cdots S_1 K]) \end{aligned}$$

A questo punto per come sono allineate le somme alternate possiamo raggruppare ed otteniamo quanto segue:

$$\begin{aligned}
 \sum_K (\lambda) - \sum_K (\mu) = & +(L[E_0K] + L[e_0K]) + \\
 & -(L[E_1S_0K] + L[e_1S_0K] + L[E_1K] + L[e_1K]) + \\
 & \vdots \\
 & +(-1)^n(L[E_nS_{n-1} \cdots S_1S_0K] + L[e_nS_{n-1} \cdots S_1S_0K] + \\
 & \quad +L[E_nS_{n-1} \cdots S_1K] + L[e_nS_{n-1} \cdots S_1K]) + \\
 & +(-1)^{n+1}(L[E_0S_n \cdots S_1K] + L[e_0S_n \cdots S_1K])
 \end{aligned}$$

Permutando i termini di tutte le righe centrali possiamo ottenere una somma di termini della forma $L[\boxed{\cdots}K] + L[\boxed{\cdots}S_0K]$:

$$\begin{aligned}
 \sum_K (\lambda) - \sum_K (\mu) = & +(L[E_0K] + L[e_0K]) + \\
 & -(L[E_1K] + L[E_1S_0K] + L[e_1K] + L[e_1S_0K]) + \\
 & \vdots \\
 & (-1)^n(L[E_nS_{n-1} \cdots S_1K] + L[E_nS_{n-1} \cdots S_1S_0K] + \\
 & \quad +L[e_nS_{n-1} \cdots S_1K] + L[e_nS_{n-1} \cdots S_1S_0K]) \\
 & +(-1)^{n+1}(L[E_0S_n \cdots S_1K] + L[e_0S_n \cdots S_1K])
 \end{aligned}$$

Ora ricordiamo l'Osservazione 3.3, per cui operazioni su indici diversi commutano tra loro, quindi possiamo spostare l'operazione S_0 in modo che sia applicata per ultima ed otteniamo:

$$\begin{aligned}
 \sum_K (\lambda) - \sum_K (\mu) = & +(L[E_0K] + L[e_0K]) + \\
 & -(L[E_1K] + L[S_0E_1K] + L[e_1K] + L[S_0e_1K]) + \\
 & \vdots \\
 & (-1)^n(L[E_nS_{n-1} \cdots S_1K] + L[S_0E_nS_{n-1} \cdots S_1K] + \\
 & \quad +L[e_nS_{n-1} \cdots S_1K] + L[S_0e_nS_{n-1} \cdots S_1K]) \\
 & +(-1)^{n+1}(L[E_0S_n \cdots S_1K] + L[e_0S_n \cdots S_1K])
 \end{aligned}$$

A questo punto notiamo che tutti i diagrammi $E_iS_{i-1} \cdots S_1K \in e_iS_{i-1} \cdots S_1K$ per $i = 1, \dots, n$ hanno applicato uno splice, quindi hanno strettamente meno

incroci di K . Possiamo dunque applicare l'ipotesi induttiva e sostituire tutti i termini nella forma:

$$\begin{aligned}
 L[\boxed{\dots}] + L[S_0 \boxed{\dots}] &= z(L[E_0 \boxed{\dots}] + L[e_0 \boxed{\dots}]) \\
 \Rightarrow \sum_K (\lambda) - \sum_K (\mu) &= +(L[E_0 K] + L[e_0 K]) + \\
 &\quad -z(L[E_0 E_1 K] + L[e_0 E_1 K] + L[E_0 e_1 K] + L[e_0 e_1 K]) + \\
 &\quad \vdots \\
 &\quad (-1)^n z(L[E_0 E_n S_{n-1} \dots S_1 K] + L[e_0 E_n S_{n-1} \dots S_1 K] + \\
 &\quad \quad + L[E_0 e_n S_{n-1} \dots S_1 K] + L[e_0 e_n S_{n-1} \dots S_1 K]) \\
 &\quad + (-1)^{n+1} (L[E_0 S_n \dots S_1 K] + L[e_0 S_n \dots S_1 K])
 \end{aligned}$$

Riordiniamo ora le operazioni in modo da avere E_0 e e_0 applicate per prime nelle sequenze di operazioni:

$$\begin{aligned}
 &= +(L[E_0 K] + L[e_0 K]) + \\
 &\quad -z(L[E_1 E_0 K] + L[E_1 e_0 K] + L[e_1 E_0 K] + L[e_1 e_0 K]) + \\
 &\quad \vdots \\
 &\quad (-1)^n z(L[E_n S_{n-1} \dots S_1 E_0 K] + L[E_n S_{n-1} \dots S_1 e_0 K] + \\
 &\quad \quad + L[e_n S_{n-1} \dots S_1 E_0 K] + L[e_n S_{n-1} \dots S_1 e_0 K]) \\
 &\quad + (-1)^{n+1} (L[S_n \dots S_1 E_0 K] + L[S_n \dots S_1 e_0 K])
 \end{aligned}$$

Ora distribuiamo e riorganizziamo tutti i termini in modo da avere prima quelli che riguardano $E_0 K$ e poi tutti quelli per $e_0 K$ ed otteniamo quanto segue:

$$\begin{aligned}
 &= L[E_0 K] + (-1)^{n+1} L[S_n \cdots S_1 E_0 K] + \\
 &\quad -z \left((L[E_1 E_0 K] + L[e_1 E_0 K]) + \right. \\
 &\quad \left. - (L[E_2 S_1 E_0 K] + L[e_2 S_1 E_0 K]) + \right. \\
 &\quad \vdots \\
 &\quad \left. + (-1)^n (L[E_n S_{n-1} \cdots S_1 E_0 K] + L[e_n S_{n-1} \cdots S_1 E_0 K]) \right) \\
 &+ L[e_0 K] + (-1)^{n+1} L[S_n \cdots S_1 e_0 K] + \\
 &\quad -z \left((L[E_1 e_0 K] + L[e_1 e_0 K]) + \right. \\
 &\quad \left. - (L[E_2 S_1 e_0 K] + L[e_2 S_1 e_0 K]) + \right. \\
 &\quad \vdots \\
 &\quad \left. + (-1)^n (L[E_n S_{n-1} \cdots S_1 e_0 K] + L[e_n S_{n-1} \cdots S_1 e_0 K]) \right)
 \end{aligned}$$

Infine osserviamo che i termini dentro le parentesi in $z(\boxed{\cdots})$ sono proprio somme della forma $\sum_{E_0 K}(\gamma)$ e $\sum_{e_0 K}(\gamma)$ per $\gamma = (n, \dots, 1)$, dunque possiamo riscrivere l'espressione precedente come

$$\begin{aligned}
 &= L[E_0 K] + (-1)^{n+1} L[S_n \cdots S_1 E_0 K] - z \sum_{E_0 K}(\gamma) \\
 &\quad + L[e_0 K] + (-1)^{n+1} L[S_n \cdots S_1 e_0 K] - z \sum_{e_0 K}(\gamma)
 \end{aligned}$$

Ora possiamo applicare l'ipotesi induttiva in quanto tutti i diagrammi hanno strettamente meno di N incroci. Applicando l'ipotesi induttiva per γ e osservando che con la convenzione di Kauffman $|\gamma| + 1 = (n - 1) + 1 = n$, otteniamo che

$$\begin{aligned}
 \Omega_{K(\gamma)} &= (-1)^{|\gamma|+1} L_{\widehat{K}(\gamma)} + z \sum_K(\gamma) \\
 &= (-1)^n L_{\widehat{K}(\gamma)} + z \sum_K(\gamma) \\
 \Rightarrow -\Omega_{K(\gamma)} &= (-1)^{n+1} L_{\widehat{K}(\gamma)} - z \sum_K(\gamma)
 \end{aligned}$$

infine sostituendo

$$= L[E_0 K] - \Omega_{E_0 K}(\gamma) + L[e_0 K] - \Omega_{e_0 K}(\gamma) = 0 + 0 = 0$$

E questo conclude la dimostrazione. $\square$

Corollario. Nella definizione della forma chiusa di L_K , il caso iii.a) non dipende dalla scelta del punto base.

Dimostrazione. Rivediamo l'espressione in questione, siano p_i dei punti base direzionati sulle componenti di K

$$L_K(a, z) := \frac{1}{2n} \left[\sum_{i=1}^n \sum_{q=p_i, \bar{p}_i} \left((-1)^{|\lambda(q)|+1} \delta L_{K_i} L_{K-K_i} + z \sum_K (\lambda(q)) \right) \right]$$

le espressioni che dipendono dai punti base sono $(-1)^{|\lambda(q)|+1}$ e $\sum_K (\lambda(q))$. Se applichiamo una 1-rotazione alle sequenze di rialzo $\lambda(q)$ le lunghezze non cambiano ed usando il Lemma 3.8 anche le somme $\sum_K (\lambda(q))$ sono invarianti per 1-rotazioni.

Chiaramente l'invarianza si estende a tutte le permutazioni cicliche e questo dimostra che il caso iii.a) per più componenti della Definizione 3.2 non dipende dalla scelta del punto base. $\square$

Ora rimane da verificare l'invarianza per scelta di punto base per il caso iii.b) ovvero quando K è formato da una sola componente, ricordiamo l'espressione:

$$L_K(a, z) := \frac{1}{2} \left[\sum_{q=p, \bar{p}} \left((-1)^{|\lambda(q)|+1} L[\hat{K}(\lambda(q))] + z \sum_K (\lambda(q)) \right) \right]$$

La dimostrazione procede sempre mostrando l'indipendenza dalla scelta di punto base. Vediamo prima alcune proprietà dei nodi banali standard:

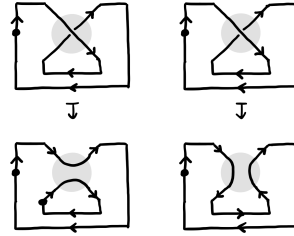
Lemma 3.9. Consideriamo i due modi di fare uno splice di un nodo banale standard al primo incrocio subito dopo un punto base direzionato. Allora valgono le seguenti proprietà:

- i) Ci sono due casi, in uno otteniamo *due nodi banali in forma standard*, nell'altro *un solo nodo banale* (non necessariamente in forma discendente).
- ii) La proprietà del Lemma 3.7, ovvero che i nodi banali standard sono equivalenti a meno di isotopia regolare a diagrammi di nodi formati solo da riccioli, si estende al diagramma del caso dello splice con una sola componente.

Dimostrazione. Per la definizione di nodo banale standard, la prima occorrenza di i è un sopra-incrocio e osserviamo che la parte di diagramma percorsa tra le due occorrenze di i sarà sicuramente sopra il resto del diagramma (la parte che rimane è quella dopo la seconda occorrenza di i).

Dunque abbiamo due casi, in una abbiamo due componenti una sopra l'altra, ognuna delle quali sarà ancora in forma discendente in quanto eredita la proprietà secondo cui la prima volta che si passa su un incrocio questo è un sopra-incrocio.

Se assumiamo che il diagramma del caso precedente sia della forma $E_i \hat{K} = \hat{K}_1 \cup \hat{K}_2$ con $\hat{K}_1, \hat{K}_2$ i due nodi banali standard con $\hat{K}_1$ sovrastante $\hat{K}_2$, allora l'altro caso sarà $e_i \hat{K} = \hat{K}_1 \# \hat{K}_2^*$ dove $\hat{K}_2^*$ è ottenuto percorrendo $\hat{K}_2$ in direzione opposta.



Usiamo ora il Lemma 3.7 per cui un nodo banale standard è equivalente a meno di isotopia regolare al diagramma di un nodo formato solo da riccioli.

Siano $\hat{K}'_1$ e $\hat{K}'_2$ i diagrammi a cui sono equivalenti rispettivamente $\hat{K}_1$ e $\hat{K}_2$. Ora possiamo applicare le mosse che semplificano $\hat{K}_1$ indipendentemente dalle mosse che semplificano $\hat{K}_2$, in quanto uno sovrasta l'altro e possiamo spostare un diagramma sopra un altro utilizzando solo mosse di tipo II o III. A questo punto avremo ridotto i diagrammi ad uno della forma $\hat{K}'_1 \# \hat{K}'_2$ che sarà equivalente a $\hat{K}_1 \# \hat{K}_2^*$ e composto solo da riccioli. $\square$

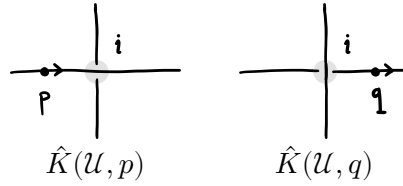
Corollario. Poiché $e_i \hat{K}$ è equivalente a meno di isotopia regolare ad un diagramma formato solo da riccioli, possiamo usare il caso c) dell'ipotesi induttiva su L_K che ci dà l'invarianza per isotopia regolare di L_K . Unito al fatto che il writhe è un invariante di isotopia regolare otteniamo che $L[e_i \hat{K}] = a^{w(e_i \hat{K})}$.

Lemma 3.10. Sia p un punto di partenza direzionato e $\hat{K} := \hat{K}(\mathcal{U}, p)$ un nodo banale standard. Sia i il primo incrocio in $\hat{K}$ subito dopo il punto di partenza p . Sia q un altro punto base direzionato posto nell'arco subito dopo l'incrocio i con la sua stessa direzione e poniamo $\hat{K}' := \hat{K}(\mathcal{U}, q)$. Allora valgono le seguenti proprietà:

- i) $S_i \hat{K} = \hat{K}'$
- ii) $L[\hat{K}] + L[\hat{K}'] = z(L[E_i \hat{K}] + L[e_i \hat{K}])$

Dimostrazione.

- i) In $\hat{K}(\mathcal{U}, p)$, l'incrocio i è il primo visitato quindi sarà sicuramente un sopra-incrocio. Al contrario, in $\hat{K}(\mathcal{U}, q)$ l'incrocio i è l'ultimo visitato quindi è certamente la seconda occorrenza di i e sarà un sotto-incrocio. Tutti gli altri incroci compaiono nello stesso ordine quindi restano invariati. Dunque $S_i \hat{K} = \hat{K}'$.



- ii) Per questo secondo punto usiamo che $L_{\hat{K}} = a^{w(\hat{K})}$, assumiamo ora che $E_i \hat{K}$ sia il caso con due componenti di due nodi banali standard e $e_i \hat{K}$ quello con una sola componente di diagramma di nodo banale.

Supponiamo che $w(e_i \hat{K}) = w$, allora poiché abbiamo rimosso un incrocio vale necessariamente

$$\{w(\hat{K}), w(S_i \hat{K})\} = \{w - 1, w + 1\}$$

ovvero i writhe di $\hat{K}$ e $S_i \hat{K}$ differiscono di 2, assumiamo di essere nel caso $w(\hat{K}) = w + 1$.

Nel caso con due componenti avremo $E_i \hat{K} = K_1 \cup K_2$, e per come sono definite le mosse E_i e e_i abbiamo anche che $e_i \hat{K} = K_1 \# K_2$.

Siano ora w_1 e w_2 i writhe rispettivamente di K_1 e K_2 . Per il teorema della curva di Jordan, la somma dei segni degli incroci tra componenti diverse ha

somma zero poiché una delle due *sovrasta* l'altra. Segue che $w_1 + w_2 = w$.
Ricapitoliamo ora tutti i termini:

$$\begin{aligned} L[\hat{K}] &= a^{w+1} \\ L[S_i \hat{K}] &= a^{w-1} \\ L[e_i \hat{K}] &= a^w \\ L[E_i \hat{K}] &= \delta a^{w_1} a^{w_2} = \delta a^{w_1+w_2} = \delta a^w = (a^{w+1} + a^{w-1})/z - a^w \end{aligned}$$

che verifica l'identità infatti:

$$\begin{aligned} a^{w+1} + a^{w-1} &= z \left(\frac{a^{w+1} + a^{w-1}}{z} - a^w + a^w \right) \\ \Rightarrow L[\hat{K}] + L[\hat{K}'] &= z \left(L[E_i \hat{K}] + L[e_i \hat{K}] \right) \end{aligned}$$

E questo conclude la dimostrazione delle due proprietà. □

Possiamo ora mostrare l'invarianza per scelta di punto base di $\Omega_K(p)$.

Lemma 3.11. Sia K un diagramma di un nodo. Allora iii.b) non dipende dalla scelta di punto base. Inoltre se p è un punto base direzionato su K e $\lambda(p)$ la sequenza di scambi determinata da p che lo porta a $\hat{K}(p) := \hat{K}(\mathcal{U}, p)$, allora

$$\Omega_K(p) = (-1)^{|\lambda(p)|+1} L_{\hat{K}(p)} + z \sum_K (\lambda(p))$$

non dipende dalla scelta di punto base.

Dimostrazione. Possiamo assumere che la sequenza di scambi determinata da p sia etichettata come $\lambda = (n, \dots, 0)$, in questo modo

$$\Omega_K(p) = (-1)^{n+1} L_{\hat{K}(p)} + z \sum_K (\lambda(p))$$

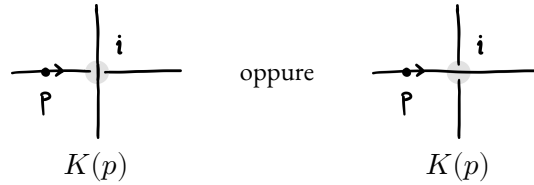
Ricordiamo come era definito L_K nel caso iii.b) e notiamo quanto segue

$$\begin{aligned}
 L_K(a, z) &:= \frac{1}{2} \left[\sum_{q=p, \bar{p}} \left((-1)^{|\lambda(q)|+1} L_{\hat{K}(q)} + z \sum_K (\lambda(q)) \right) \right] \\
 &= \frac{1}{2} (\Omega_K(p) + \Omega_K(\bar{p}))
 \end{aligned}$$

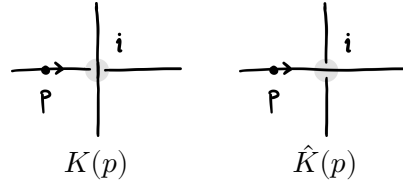
Dunque ci basta mostrare che $\Omega_K(p)$ non dipenda dalla scelta di punto base.

Come in precedenza possiamo mostrarlo facendo scorrere p nell'arco successivo al primo incrocio dopo p , questo ci induce l'invarianza per permutazioni cicliche e ci permette di concludere.

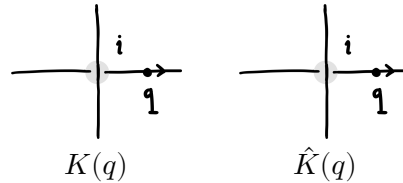
Sia i l'etichetta del primo incrocio dopo p . In $\hat{K}(p)$ l'incrocio i è il primo visitato dopo p dunque sarà sicuramente un sopra-incrocio. Invece in $K(p)$ può essere sia un sopra-incrocio che un sotto-incrocio, abbiamo quindi due casi:



- Se i è un sotto-incrocio in $K(p)$, allora i sarà il primo incrocio nella sequenza di scambi ed avremo $i = n$. La situazione sarà quindi la seguente:



Consideriamo ora la situazione di $K(q)$:



come già detto prima, l'ultimo incrocio è un sotto-incrocio dunque $K(q)$ è già in forma di nodo banale standard. Segue che i non appartiene alla sequenza di scambi che sarà $(n-1, \dots, 0)$ e quindi $\hat{K}(q) = S_{n-1} \cdots S_0 K$. Vorremo vedere che $\Omega_K(p) = \Omega_K(q)$, ovvero che queste due espressioni coincidano:

$$\begin{aligned}\Omega_K(p) &= (-1)^{n+1} L[\hat{K}(p)] + z \sum_K (\lambda(p)) \\ \Omega_K(q) &= (-1)^{(n-1)+1} L[\hat{K}(q)] + z \sum_K (\lambda(q))\end{aligned}$$

Come in precedenza possiamo studiare la differenza:

$$\begin{aligned}\Omega_K(p) - \Omega_K(q) &= (-1)^{n+1} L[\hat{K}(p)] + z \sum_K (\lambda(p)) \\ &\quad + \underbrace{(-1)^{n+1} L[\hat{K}(q)]}_{= -(-1)^n} - z \sum_K (\lambda(q)) \\ &= (-1)^{n+1} (L[\hat{K}(p)] + L[\hat{K}(q)]) \\ &\quad + z(-1)^n (L[A_n^\lambda K] + L[B_n^\lambda K])\end{aligned}$$

qui abbiamo usato il fatto che tutti i termini in $\sum_K (\lambda(p)) - \sum_K (\lambda(q))$ si cancellano tra loro tranne l'ultimo di $\sum_K (\lambda(p))$.

Ora notiamo che

$$\begin{aligned}A_n^\lambda K &= E_n S_{n-1} \cdots S_0 K = E_n \hat{K}(p) \\ B_n^\lambda K &= e_n S_{n-1} \cdots S_0 K = e_n \hat{K}(p) \\ \hat{K}(p) &= S_n \hat{K}(p)\end{aligned}$$

inoltre per il Lemma 3.10 abbiamo anche che

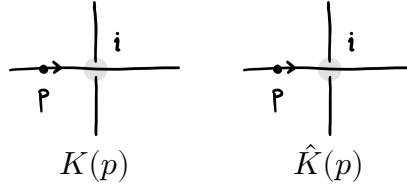
$$L[\hat{K}(p)] + L[\hat{K}(q)] = z(L[E_n \hat{K}(p)] + L[e_n \hat{K}(p)])$$

Per concludere basta sostituire queste ultime identità

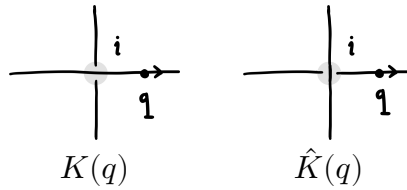
$$\begin{aligned}\Omega_K(p) - \Omega_K(q) &= (-1)^{n+1} (L[\hat{K}(p)] + L[\hat{K}(q)]) \\ &\quad + z(-1)^n (L[A_n^\lambda K] + L[B_n^\lambda K]) \\ &= \cancel{z(-1)^{n+1} (L[E_n \hat{K}(p)] + L[e_n \hat{K}(p)])} \\ &\quad + \cancel{z(-1)^n (L[E_n \hat{K}(p)] + L[e_n \hat{K}(p)])} \\ &= 0\end{aligned}$$

Segue quindi che $\Omega_K(p) = \Omega_K(q)$.

- Se i è un sopra-incrocio in $K(p)$ siamo nella seguente situazione:



In questo caso, i non fa parte della sequenza di scambi per $K(p)$. Però dopo aver spostato il punto base avremo la seguente situazione:



Questa volta i fa parte della sequenza di scambi per $K(q)$ poiché i compare come ultimo incrocio nella visita e quindi in $\hat{K}(q)$ sarà un sotto-incrocio. La situazione è più complessa di prima, i comparirà come sopra-incrocio in mezzo alla sequenza di scambi. Avremo quindi le seguenti sequenze per p e per q :

$$\lambda(p) = (n, n-1, \dots, i+1, i-1, \dots, 1, 0)$$

$$\lambda(q) = (n, n-1, \dots, i+1, i, i-1, \dots, 1, 0)$$

Se ora consideriamo gli scambi da applicare che ci portano a $\hat{K}(p)$ e $\hat{K}(q)$ abbiamo che

$$\hat{K}(p) = S_n S_{n-1} \cdots S_{i+1} S_{i-1} \cdots S_0 K$$

$$\hat{K}(q) = S_n S_{n-1} \cdots S_{i+1} S_i S_{i-1} \cdots S_0 K$$

Dunque riordinando gli scambi ed applicando S_i per ultimo, possiamo notare che $S_i \hat{K}(q) = \hat{K}(p)$.

Con un argomento simile al Lemma 3.10, possiamo applicare l'enunciato alla coppia $\hat{K}(p), \hat{K}(q)$ per l'indice i anche se in questo caso l'indice i è il primo *subito prima* di q . Inoltre per il Lemma 3.8 abbiamo che $\sum_K(p), \sum_K(q)$ sono invarianti a meno di permutazioni cicliche. Possiamo quindi sostituire $\lambda(p)$ e $\lambda(q)$ con le seguenti sequenze di scambi applicando le giuste rotazioni all'indietro.

$$\begin{aligned}\lambda'(p) &= (i-1, \dots, 1, 0, n, n-1, \dots, i+1) \\ \lambda'(q) &= (i, i-1, \dots, 1, 0, n, n-1, \dots, i+1)\end{aligned}$$

A questo punto possiamo applicare lo stesso argomento del punto precedente.

E questo completa la dimostrazione dell'indipendenza di $\Omega_K(p)$ dalla scelta di punto base. $\square$

A questo punto possiamo vedere che L_K verifica gli assiomi della Definizione 3.1.

Lemma 3.12. Sia i un incrocio di un diagramma di link K . Allora L_K verifica le identità:

- i) $L[K] + L[S_i K] = z(L[E_i K] + L[e_i K])$
- ii) $L[\text{cap}] = aL[\text{cup}], L[\text{cup}] = a^{-1}L[\text{cap}]$

Dimostrazione. Mostriamo per induzione sul numero di incroci nel diagramma.

i) Consideriamo i seguenti casi:

- Se K ha una sola componente ed un incrocio i : consideriamo $S_i K$, $E_i K$ e $e_i K$; scegliendo bene p possiamo fare in modo che i sia il primo incrocio nella sequenza di scambi. Ora consideriamo l'espressione del caso iii.b), con una singola componente:

$$\begin{aligned}L_K(a, z) &:= \frac{1}{2} \left[\sum_{q=p, \bar{p}} \left((-1)^{|\lambda(q)|+1} L[\hat{K}(\lambda(q))] + z \sum_K (\lambda(q)) \right) \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[\sum_{q=p, \bar{p}} \left((-1)^{n+1} L[\hat{K}(q)] + z \sum_K (\lambda(q)) \right) \right]\end{aligned}$$

La tesi segue considerando la differenza nelle espansioni di $\Omega_K(p)$ e $\Omega_{S_i K}(p)$, in particolare tutti i termini si cancellano tranne il primo:

$$\Rightarrow \Omega_K(p) + \Omega_{S_i K}(p) = z(L[E_i K] + L[e_i K])$$

- Se K ha più di una componente e i è un incrocio di una componente con se stessa: in questo caso i non compare in nessuna sequenza di rialzo in quanto le sequenze di rialzo scambiano solo incroci tra componenti

diverse. Dunque possiamo applicare il caso iii.a) dell'induzione senza problemi.

- Se K ha più di una componente e i è un incrocio tra due componenti diverse: possiamo considerare la iii.a) e mostrare che ogni addendo verifica l'identità, ricordiamo l'espressione in questione:

$$L_K(a, z) := \frac{1}{2n} \left[\sum_{i=1}^n \sum_{q=P_i, \bar{P}_i} \left((-1)^{|\lambda(q)|+1} \delta L_{K_i} L_{K-K_i} + z \sum_K (\lambda(q)) \right) \right]$$

Per quanto riguarda gli addendi che non intersecano nessuna delle due componenti interessate dall'incrocio scelto, non ci sono problemi e possiamo applicare l'induzione. Per le componenti che le intersecano ci basta scegliere come prima un punto base appropriato in modo che l'identità sia verificata e procedere come prima.

- ii) La dimostrazione è analoga, basta osservare che possiamo sempre scegliere un punto base che non faccia comparire l'incrocio del ricciolo nella sequenza di scambi.

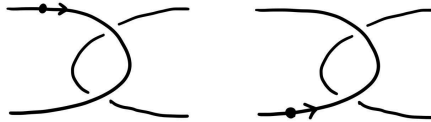
E questo conclude la dimostrazione del lemma. $\square$

Come ultimo risultato vediamo che L_K è un invariante di isotopia regolare.

Lemma 3.13. Siano K, K' diagrammi di link equivalenti a meno di isotopia regolare, allora $L_K(a, z) = L_{K'}(a, z)$.

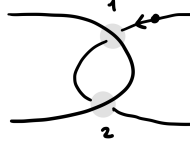
Dimostrazione. Procediamo sempre per induzione sul numero di incroci e mostriamo l'invarianza per mosse che non ne aumentano il numero:

- i) Mossa II: Ci sono vari casi in base a se la mossa II riguarda una o più componenti:
- Se la mossa è su una sola componente, allora ci basta scegliere il punto base come segue



in questo modo i due incroci non compariranno nella sequenza di scambi. Per l'ipotesi induttiva, tutti i termini di iii.b) sono invarianti per mosse di tipo II e dunque lo sarà anche L_K .

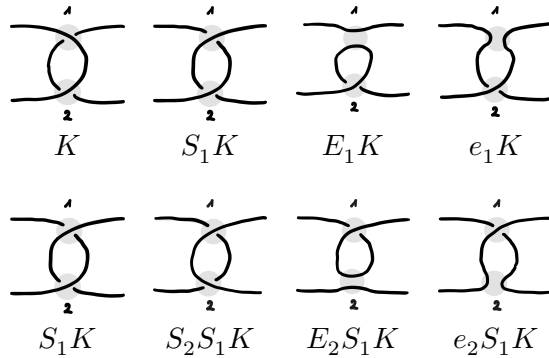
- Se la mossa riguarda più componenti, allora il caso peggiore è il seguente



Vorremo vedere che vale $L[K] = L[S_2 S_1 K]$. Consideriamo le seguenti relazioni:

$$\begin{aligned} L[K] + L[S_1 K] &= z(L[E_1 K] + L[e_1 K]) \\ L[S_1 K] + L[S_2 S_1 K] &= z(L[E_2 S_1 K] + L[e_2 S_1 K]) \end{aligned} \quad (3)$$

i diagrammi associati a queste relazioni sono riportati qui sotto, in particolare possiamo notare che ci sono alcune relazioni tra questi:



$$\begin{aligned} L[e_1 K] &= L[e_2 S_1 K] & L[E_1 K] &= a^{-1} L[\text{diagram}] = L[E_2 S_1 K] \end{aligned}$$

Dunque i due membri di destra di (3) coincidono ed abbiamo quanto cercato:

$$\begin{aligned} L[K] + L[S_1 K] &= z(L[E_1 K] + L[e_1 K]) = L[S_1 K] + L[S_2 S_1 K] \\ \Rightarrow L[K] + \cancel{L[S_1 K]} &= \cancel{L[S_1 K]} + L[S_2 S_1 K] \\ \Rightarrow L[K] &= L[S_2 S_1 K] \end{aligned}$$

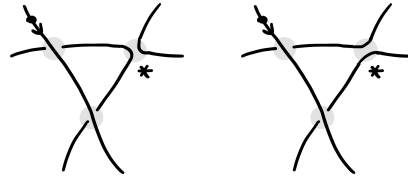
A questo punto nel diagramma S_2S_1K , gli incroci della mossa II non compariranno nella sequenza di rialzo dunque l'invarianza segue per induzione come prima.

ii) Mossa III:

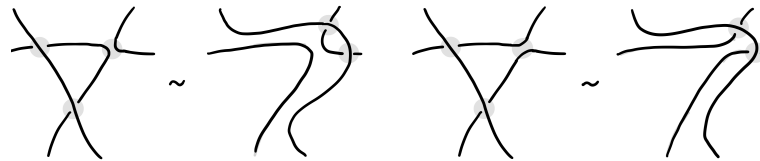
- Se la mossa è su fili di una sola componente, allora possiamo scegliere il punto base in modo che sia sul filo che passa sopra gli altri due, e saremo nella situazione seguente:



In questo modo due dei tre incroci non compariranno nella sequenza di scambi, per quanto riguarda l'incrocio rimanente * o già non compariva nella sequenza di scambi o possiamo procedere per induzione. Nel caso di splice abbiamo i seguenti casi



Ma possiamo risolverli utilizzando equivalenze di diagrammi come le seguenti, in cui usiamo solo mosse di tipo II:



- Nel caso in cui la mossa riguardi fili appartenenti a più componenti possiamo utilizzare l'identità della mossa precedente $L[K] = L[S_2S_1K]$ per semplificare la situazione in modo che non ci siano due incroci consecutivi che appartengano ad una sequenza di rialzo, e procedere nuovamente per induzione.

Abbiamo così mostrato che per ogni diagramma di nodi e link, il polinomio L_K è invariante per mosse di tipo III e mosse di tipo II che riducono il numero di incroci. Dunque è anche invariante per mosse di tipo II in entrambe le direzioni e questo completa la dimostrazione. $\square$

Bibliografia

- [1] Jkasd, “Wild_knot.svg.” [Online]. Available: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Wild_knot.svg
- [2] R. Crowell and R. Fox, *Introduction to Knot Theory*. in Graduate Text in Mathematics. Springer New York, 1977.
- [3] L. H. Kauffman, “An invariant of regular isotopy,” *Trans. Am. Math. Soc.*, vol. 318, no. 2, pp. 417–471, 1990.