



# Il Polinomio di Kauffman: Un Invariante di Isotopia Regolare

## Tesi di Laurea Triennale

Antonio De Lucreziis

Dipartimento di Matematica  
Università di Pisa

18 Luglio 2025



# Outline

**Introduzione e Motivazione**

Teoria e Costruzione

Risultati e Applicazioni



# Motivazione

Come distinguere matematicamente due nodi?



# Motivazione

Come distinguere matematicamente due nodi?

- I nodi possono apparire diversi ma essere topologicamente equivalenti
- Abbiamo bisogno di **invarianti**: proprietà che non cambiano sotto deformazioni ammesse
- Gli invarianti polinomiali sono strumenti potenti e computabili



# Motivazione

Come distinguere matematicamente due nodi?

- I nodi possono apparire diversi ma essere topologicamente equivalenti
- Abbiamo bisogno di **invarianti**: proprietà che non cambiano sotto deformazioni ammesse
- Gli invarianti polinomiali sono strumenti potenti e computabili

**Obiettivo: costruire un invariante polinomiale robusto**



# Nodi e Diagrammi

**Definizione:** Un **nodo tame** è un sottoinsieme  $K \subset \mathbb{R}^3$  per cui esiste un embedding  $f : \mathbb{S}^1 \hookrightarrow \mathbb{R}^3$  localmente piatto con  $K = f(\mathbb{S}^1)$ .



# Nodi e Diagrammi

**Definizione:** Un **nodo tame** è un sottoinsieme  $K \subset \mathbb{R}^3$  per cui esiste un embedding  $f : S^1 \hookrightarrow \mathbb{R}^3$  localmente piatto con  $K = f(S^1)$ .

**Problema:** Lavorare direttamente con embedding in  $\mathbb{R}^3$  è complesso



# Nodi e Diagrammi

**Definizione:** Un **nodo tame** è un sottoinsieme  $K \subset \mathbb{R}^3$  per cui esiste un embedding  $f : \mathbb{S}^1 \hookrightarrow \mathbb{R}^3$  localmente piatto con  $K = f(\mathbb{S}^1)$ .

**Problema:** Lavorare direttamente con embedding in  $\mathbb{R}^3$  è complesso

**Soluzione:** Proiezioni su un piano

- Proiettiamo il nodo su un piano
- Aggiungiamo informazione **sopra/sotto** ad ogni incrocio
- Otteniamo un **diagramma** del nodo



# Nodi e Diagrammi

**Definizione:** Un **nodo tame** è un sottoinsieme  $K \subset \mathbb{R}^3$  per cui esiste un embedding  $f : S^1 \hookrightarrow \mathbb{R}^3$  localmente piatto con  $K = f(S^1)$ .

**Problema:** Lavorare direttamente con embedding in  $\mathbb{R}^3$  è complesso

**Soluzione:** Proiezioni su un piano

- Proiettiamo il nodo su un piano
- Aggiungiamo informazione **sopra/sotto** ad ogni incrocio
- Otteniamo un **diagramma** del nodo

I diagrammi sono l'interfaccia computazionale per studiare i nodi



# Equivalenze tra Nodi

**Isotopia Ambiente:** Deformare un nodo senza tagliarlo o incollarlo

Due nodi  $K_0, K_1 \subset \mathbb{R}^3$  sono **equivalenti** se esiste un'isotopia ambiente  $H : \mathbb{R}^3 \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$



# Equivalenze tra Nodi

**Isotopia Ambiente:** Deformare un nodo senza tagliarlo o incollarlo

Due nodi  $K_0, K_1 \subset \mathbb{R}^3$  sono **equivalenti** se esiste un'isotopia ambiente  $H : \mathbb{R}^3 \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$

**Teorema di Reidemeister:** Due diagrammi rappresentano nodi equivalenti se e solo se sono collegati da mosse I, II, III



# Equivalenze tra Nodi

**Isotopia Ambiente:** Deformare un nodo senza tagliarlo o incollarlo

Due nodi  $K_0, K_1 \subset \mathbb{R}^3$  sono **equivalenti** se esiste un'isotopia ambiente  $H : \mathbb{R}^3 \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$

**Teorema di Reidemeister:** Due diagrammi rappresentano nodi equivalenti se e solo se sono collegati da mosse I, II, III

**Isotopia Regolare:** Equivalenza generata solo da mosse II e III (ignoriamo la mossa I)



# Equivalenze tra Nodi

**Isotopia Ambiente:** Deformare un nodo senza tagliarlo o incollarlo

Due nodi  $K_0, K_1 \subset \mathbb{R}^3$  sono **equivalenti** se esiste un'isotopia ambiente  $H : \mathbb{R}^3 \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$

**Teorema di Reidemeister:** Due diagrammi rappresentano nodi equivalenti se e solo se sono collegati da mosse I, II, III

**Isotopia Regolare:** Equivalenza generata solo da mosse II e III (ignoriamo la mossa I)

L'isotopia regolare "vede" i riccioli (curls)



# Outline

Introduzione e Motivazione

**Teoria e Costruzione**

Risultati e Applicazioni



# Il Writhe: Un Primo Invariante

Definizione del segno di un incrocio:  $\varepsilon(+)=+1$      $\varepsilon(-)=-1$



# Il Writhe: Un Primo Invariante

Definizione del segno di un incrocio:  $\varepsilon(+)=+1$      $\varepsilon(-)=-1$

Il writhe:  $w(K) := \sum_{\text{incroci } c} \varepsilon(c)$



# Il Writhe: Un Primo Invariante

Definizione del segno di un incrocio:  $\varepsilon(+)=+1$      $\varepsilon(-)=-1$

Il writhe:  $w(K) := \sum_{\text{incroci } c} \varepsilon(c)$

Proprietà:

- Invariante per mosse II e III ✓
- NON invariante per mosse I ✗



# Il Writhe: Un Primo Invariante

Definizione del segno di un incrocio:  $\varepsilon(+)=+1$       $\varepsilon(-)=-1$

Il writhe:  $w(K) := \sum_{\text{incroci } c} \varepsilon(c)$

Proprietà:

- Invariante per mosse II e III ✓
- NON invariante per mossa I ✗

Formula di correzione: Se  $L_K$  è invariante per isotopia regolare con  $L(\text{sopra-ricciolo}) = aL(\text{filo})$ ,  
 $L(\text{sotto-ricciolo}) = a^{-1}L(\text{filo})$

Allora:  $F_K := a^{-w(K)} L_K$  è invariante per isotopia ambiente!



# Il Polinomio di Kauffman: Definizione

Il protagonista:  $L_K(a, z) \in \mathbb{Z}[a, a^{-1}, z, z^{-1}]$

Assiomi:

1. Se  $K, K'$  sono equivalenti a meno di isotopia regolare, allora  $L_K = L_{K'}$



# Il Polinomio di Kauffman: Definizione

Il protagonista:  $L_K(a, z) \in \mathbb{Z}[a, a^{-1}, z, z^{-1}]$

Assiomi:

1. Se  $K, K'$  sono equivalenti a meno di isotopia regolare, allora  $L_K = L_{K'}$
2. Relazioni skein:
  - $L(\text{sopra}) + L(\text{sotto}) = z(L(\text{h-splice}) + L(\text{v-splice}))$
  - $L(\text{nodo banale}) = 1$
  - $L(\text{sopra-ricciolo}) = aL(\text{filo}), L(\text{sotto-ricciolo}) = a^{-1}L(\text{filo})$



# Il Polinomio di Kauffman: Definizione

Il protagonista:  $L_K(a, z) \in \mathbb{Z}[a, a^{-1}, z, z^{-1}]$

Assiomi:

1. Se  $K, K'$  sono equivalenti a meno di isotopia regolare, allora  $L_K = L_{K'}$
2. Relazioni skein:
  - $L(\text{sopra}) + L(\text{sotto}) = z(L(\text{h-splice}) + L(\text{v-splice}))$
  - $L(\text{nodo banale}) = 1$
  - $L(\text{sopra-ricciolo}) = aL(\text{filo}), L(\text{sotto-ricciolo}) = a^{-1}L(\text{filo})$

**Domanda:** Gli assiomi definiscono univocamente  $L_K$ ?



## Esempio: Link di Hopf

Applichiamo la relazione skein:

$$L[\text{Hopf}] + L[\text{versione scambiata}] = z(L[\text{due cerchi}] + L[\text{due fili}])$$



## Esempio: Link di Hopf

Applichiamo la relazione skein:

$$L[\text{Hopf}] + L[\text{versione scambiata}] = z(L[\text{due cerchi}] + L[\text{due fili}])$$

Sapendo che:

- $L[\text{due cerchi}] = \delta = \frac{a+a^{-1}}{z} - 1$
- $L[\text{due fili}] = a + a^{-1}$



## Esempio: Link di Hopf

Applichiamo la relazione skein:

$$L[\text{Hopf}] + L[\text{versione scambiata}] = z(L[\text{due cerchi}] + L[\text{due fili}])$$

Sapendo che:

- $L[\text{due cerchi}] = \delta = \frac{a+a^{-1}}{z} - 1$
- $L[\text{due fili}] = a + a^{-1}$

$$\text{Otteniamo: } L[\text{Hopf}] = -(a + a^{-1})z^{-1} + 1 + (a + a^{-1})z$$



## Esempio: Link di Hopf

Applichiamo la relazione skein:

$$L[\text{Hopf}] + L[\text{versione scambiata}] = z(L[\text{due cerchi}] + L[\text{due fili}])$$

Sapendo che:

- $L[\text{due cerchi}] = \delta = \frac{a+a^{-1}}{z} - 1$
- $L[\text{due fili}] = a + a^{-1}$

$$\text{Otteniamo: } L[\text{Hopf}] = -(a + a^{-1})z^{-1} + 1 + (a + a^{-1})z$$

Questi calcoli suggeriscono che  $L_K$  esiste, ma serve una dimostrazione rigorosa!



# La Sfida della Buona Definizione

Problema centrale: Gli assiomi definiscono  $L_K$  in modo unico?



# La Sfida della Buona Definizione

Problema centrale: Gli assiomi definiscono  $L_K$  in modo unico?

Sfide:

1. Gli assiomi sono **impliciti** (relazioni, non formule)
2. Come garantire che esista una soluzione?
3. Come garantire l'unicità?
4. Come verificare l'indipendenza dalle scelte computazionali?



# La Sfida della Buona Definizione

Problema centrale: Gli assiomi definiscono  $L_K$  in modo unico?

Sfide:

1. Gli assiomi sono **impliciti** (relazioni, non formule)
2. Come garantire che esista una soluzione?
3. Come garantire l'unicità?
4. Come verificare l'indipendenza dalle scelte computazionali?

Scelte che potrebbero influenzare il risultato:

- Scelta del punto base  $p$  su ogni componente
- Direzione del punto base (orario vs antiorario)
- Ordine delle operazioni nelle sequenze



# La Sfida della Buona Definizione

Problema centrale: Gli assiomi definiscono  $L_K$  in modo unico?

Sfide:

1. Gli assiomi sono **impliciti** (relazioni, non formule)
2. Come garantire che esista una soluzione?
3. Come garantire l'unicità?
4. Come verificare l'indipendenza dalle scelte computazionali?

Scelte che potrebbero influenzare il risultato:

- Scelta del punto base  $p$  su ogni componente
- Direzione del punto base (orario vs antiorario)
- Ordine delle operazioni nelle sequenze

Senza questa dimostrazione,  $L_K$  non sarebbe ben definito!



# Ingredienti per la Costruzione

Concetti chiave necessari:

1. Nodo banale standard:  $\hat{K}(\mathcal{U}, p)$ 
  - Percorrere l'ombra planare da un punto base  $p$
  - Primo passaggio su ogni incrocio = sopra-incrocio



# Ingredienti per la Costruzione

Concetti chiave necessari:

1. Nodo banale standard:  $\hat{K}(\mathcal{U}, p)$

- Percorrere l'ombra planare da un punto base  $p$
- Primo passaggio su ogni incrocio = sopra-incrocio

2. Operazioni sui diagrammi:

- $S_i K$ : scambia l'incrocio  $i$
- $E_i K, e_i K$ : splice orizzontale e verticale



# Ingredienti per la Costruzione

Concetti chiave necessari:

1. **Nodo banale standard:**  $\hat{K}(\mathcal{U}, p)$ 
  - Percorrere l'ombra planare da un punto base  $p$
  - Primo passaggio su ogni incrocio = sopra-incrocio
2. **Operazioni sui diagrammi:**
  - $S_i K$ : scambia l'incrocio  $i$
  - $E_i K, e_i K$ : splice orizzontale e verticale
3. **Sequenze di scambi:**  $\lambda = (\lambda_n, \dots, \lambda_0)$ 
  - Trasformano  $K$  in  $\hat{K}(\lambda)$



# Ingredienti per la Costruzione

Concetti chiave necessari:

1. **Nodo banale standard:**  $\hat{K}(\mathcal{U}, p)$ 
  - Percorrere l'ombra planare da un punto base  $p$
  - Primo passaggio su ogni incrocio = sopra-incrocio
2. **Operazioni sui diagrammi:**
  - $S_i K$ : scambia l'incrocio  $i$
  - $E_i K, e_i K$ : splice orizzontale e verticale
3. **Sequenze di scambi:**  $\lambda = (\lambda_n, \dots, \lambda_0)$ 
  - Trasformano  $K$  in  $\hat{K}(\lambda)$

Proprietà fondamentale:  $L[\hat{K}] = a^{w(\hat{K})}$



# La Formula Ricorsiva

Idea: Esprimere  $L_K$  in termini di diagrammi “più semplici”

Applicando le relazioni skein incrementalmente:

$$L[K] + L[S_0K] = z(L[E_0K] + L[e_0K])$$

$$L[S_0K] + L[S_1S_0K] = z(L[E_1S_0K] + L[e_1S_0K])$$

$$\vdots$$

$$L[S_{n-1}\dots S_0K] + L[\hat{K}] = z(L[E_nS_{n-1}\dots S_0K] + L[e_nS_{n-1}\dots S_0K])$$



# La Formula Ricorsiva

Idea: Esprimere  $L_K$  in termini di diagrammi “più semplici”

Applicando le relazioni skein incrementalmente:

$$L[K] + L[S_0K] = z(L[E_0K] + L[e_0K])$$

$$L[S_0K] + L[S_1S_0K] = z(L[E_1S_0K] + L[e_1S_0K])$$

$$\vdots$$

$$L[S_{n-1}\dots S_0K] + L[\hat{K}] = z(L[E_nS_{n-1}\dots S_0K] + L[e_nS_{n-1}\dots S_0K])$$

Sommando e sottraendo membro a membro, i termini intermedi si cancellano!



# La Formula Ricorsiva

**Idea:** Esprimere  $L_K$  in termini di diagrammi “più semplici”

Applicando le relazioni skein incrementalmente:

$$L[K] + L[S_0K] = z(L[E_0K] + L[e_0K])$$

$$L[S_0K] + L[S_1S_0K] = z(L[E_1S_0K] + L[e_1S_0K])$$

$$\vdots$$

$$L[S_{n-1}\dots S_0K] + L[\hat{K}] = z(L[E_nS_{n-1}\dots S_0K] + L[e_nS_{n-1}\dots S_0K])$$

Sommando e sottraendo membro a membro, i termini intermedi si cancellano!

**Formula finale:**  $L_K = (-1)^{n+1}L_{\hat{K}} + z \sum_{i=0}^n (-1)^i (L[A_i^\lambda K] + L[B_i^\lambda K])$



# Definizione Induttiva Completa

Caso 1:  $K = \hat{K}$  (nodo banale standard)  $L_K = a^{w(K)}$



# Definizione Induttiva Completa

Caso 1:  $K = \hat{K}$  (nodo banale standard)  $L_K = a^{w(K)}$

Caso 2:  $K = K_1 \cup K_2$  con  $K_1$  sovrastante  $K_2$   $L_K = \delta L_{K_1} L_{K_2}$  dove  $\delta = \frac{a+a^{-1}}{z} - 1$



# Definizione Induttiva Completa

Caso 1:  $K = \hat{K}$  (nodo banale standard)  $L_K = a^{w(K)}$

Caso 2:  $K = K_1 \cup K_2$  con  $K_1$  sovrastante  $K_2$   $L_K = \delta L_{K_1} L_{K_2}$  dove  $\delta = \frac{a+a^{-1}}{z} - 1$

Caso 3: Uso della formula ricorsiva:  $L_K = \frac{1}{2} \left[ \sum_{q=p, \bar{p}} \left( (-1)^{|\lambda(q)|+1} L_{\hat{K}(q)} + z \sum_K (\lambda(q)) \right) \right]$



# Definizione Induttiva Completa

Caso 1:  $K = \hat{K}$  (nodo banale standard)  $L_K = a^{w(K)}$

Caso 2:  $K = K_1 \cup K_2$  con  $K_1$  sovrastante  $K_2$   $L_K = \delta L_{K_1} L_{K_2}$  dove  $\delta = \frac{a+a^{-1}}{z} - 1$

Caso 3: Uso della formula ricorsiva:  $L_K = \frac{1}{2} \left[ \sum_{q=p, \bar{p}} \left( (-1)^{|\lambda(q)|+1} L_{\hat{K}(q)} + z \sum_K (\lambda(q)) \right) \right]$

Proprietà cruciale: Ogni termine a destra ha meno incroci o è "più vicino" al caso base



# Strategia della Dimostrazione

Ipotesi induttiva (per diagrammi con  $< N$  incroci):

1.  $L_K$  è ben definito (indipendente dalle scelte)
2.  $L_K$  verifica tutte le relazioni skein
3.  $L_K$  è invariante per mosse II e III che non aumentano gli incroci



# Strategia della Dimostrazione

Ipotesi induttiva (per diagrammi con  $< N$  incroci):

1.  $L_K$  è ben definito (indipendente dalle scelte)
2.  $L_K$  verifica tutte le relazioni skein
3.  $L_K$  è invariante per mosse II e III che non aumentano gli incroci

Lemmi tecnici fondamentali:

- Lemma delle Rotazioni: L'ordine ciclico degli scambi non influenza il risultato
- Invarianza del punto base: La definizione non dipende dal punto base scelto
- Identità per nodi banali:  $L[\hat{K}(p)] + L[\hat{K}(q)] = z(L[E_i\hat{K}] + L[e_i\hat{K}])$



# Strategia della Dimostrazione

Ipotesi induttiva (per diagrammi con  $< N$  incroci):

1.  $L_K$  è ben definito (indipendente dalle scelte)
2.  $L_K$  verifica tutte le relazioni skein
3.  $L_K$  è invariante per mosse II e III che non aumentano gli incroci

Lemmi tecnici fondamentali:

- Lemma delle Rotazioni: L'ordine ciclico degli scambi non influenza il risultato
- Invarianza del punto base: La definizione non dipende dal punto base scelto
- Identità per nodi banali:  $L[\hat{K}(p)] + L[\hat{K}(q)] = z(L[E_i \hat{K}] + L[e_i \hat{K}])$

Metodo: Spostando il punto base di un incrocio per volta, si dimostra l'invarianza completa



# Verifica degli Assiomi e Invarianza

**Teorema:** La definizione induttiva soddisfa tutti gli assiomi di Kauffman



# Verifica degli Assiomi e Invarianza

**Teorema:** La definizione induttiva soddisfa tutti gli assiomi di Kauffman

**Dimostrazione per le relazioni skein:**

1. Scegli il punto base in modo che l'incrocio sia il primo nella sequenza
2. La relazione skein emerge naturalmente dalla formula ricorsiva
3. Gli altri termini si cancellano per simmetria



# Verifica degli Assiomi e Invarianza

**Teorema:** La definizione induttiva soddisfa tutti gli assiomi di Kauffman

**Dimostrazione per le relazioni skein:**

1. Scegli il punto base in modo che l'incrocio sia il primo nella sequenza
2. La relazione skein emerge naturalmente dalla formula ricorsiva
3. Gli altri termini si cancellano per simmetria

**Invarianza per isotopia regolare:**

- **Mossa II:** scegli punti base che evitano gli incroci coinvolti
- **Mossa III:** usa equivalenze locali e induzione



# Verifica degli Assiomi e Invarianza

**Teorema:** La definizione induttiva soddisfa tutti gli assiomi di Kauffman

**Dimostrazione per le relazioni skein:**

1. Scegli il punto base in modo che l'incrocio sia il primo nella sequenza
2. La relazione skein emerge naturalmente dalla formula ricorsiva
3. Gli altri termini si cancellano per simmetria

**Invarianza per isotopia regolare:**

- **Mossa II:** scegli punti base che evitano gli incroci coinvolti
- **Mossa III:** usa equivalenze locali e induzione

La costruzione induttiva “conosce automaticamente” tutte le proprietà necessarie!



# Outline

Introduzione e Motivazione

Teoria e Costruzione

**Risultati e Applicazioni**



## Il Risultato Principale

**Teorema:** Esiste ed è unico un invariante  $L_K(a, z)$  che soddisfa gli assiomi di Kauffman.



## Il Risultato Principale

**Teorema:** Esiste ed è unico un invariante  $L_K(a, z)$  che soddisfa gli assiomi di Kauffman.

**Dimostrazione completa:**

1. **Esistenza:** La costruzione induttiva fornisce una definizione esplicita
2. **Buona definizione:** Indipendenza dalle scelte arbitrarie
3. **Verifica assiomi:** La definizione soddisfa tutte le relazioni richieste
4. **Unicità:** Gli assiomi determinano univocamente i valori



# Il Risultato Principale

**Teorema:** Esiste ed è unico un invariante  $L_K(a, z)$  che soddisfa gli assiomi di Kauffman.

**Dimostrazione completa:**

1. **Esistenza:** La costruzione induttiva fornisce una definizione esplicita
2. **Buona definizione:** Indipendenza dalle scelte arbitrarie
3. **Verifica assiomi:** La definizione soddisfa tutte le relazioni richieste
4. **Unicità:** Gli assiomi determinano univocamente i valori

**Conseguenza:** Il polinomio di Kauffman è un invariante completo e computabile per l'isotopia regolare



# Il Risultato Principale

**Teorema:** Esiste ed è unico un invariante  $L_K(a, z)$  che soddisfa gli assiomi di Kauffman.

**Dimostrazione completa:**

1. **Esistenza:** La costruzione induttiva fornisce una definizione esplicita
2. **Buona definizione:** Indipendenza dalle scelte arbitrarie
3. **Verifica assiomi:** La definizione soddisfa tutte le relazioni richieste
4. **Unicità:** Gli assiomi determinano univocamente i valori

**Conseguenza:** Il polinomio di Kauffman è un invariante completo e computabile per l'isotopia regolare

La teoria è ora su basi solide!



# Dal Regolare all'Ambiente: Il Polinomio $F_K$

Usando la formula di correzione:  $F_K = a^{-w(K)} L_K$



## Dal Regolare all'Ambiente: Il Polinomio $F_K$

Usando la formula di correzione:  $F_K = a^{-w(K)} L_K$

**Teorema:**  $F_K(a, z)$  è un invariante di isotopia ambiente.



# Dal Regolare all'Ambiente: Il Polinomio $F_K$

Usando la formula di correzione:  $F_K = a^{-w(K)} L_K$

**Teorema:**  $F_K(a, z)$  è un invariante di isotopia ambiente.

**Significato:**

- Partendo da un invariante regolare ( $L_K$ )
- Aggiungiamo la correzione del writhe
- Otteniamo un vero invariante di nodi!



# Dal Regolare all'Ambiente: Il Polinomio $F_K$

Usando la formula di correzione:  $F_K = a^{-w(K)} L_K$

**Teorema:**  $F_K(a, z)$  è un invariante di isotopia ambiente.

**Significato:**

- Partendo da un invariante regolare ( $L_K$ )
- Aggiungiamo la correzione del writhe
- Otteniamo un vero invariante di nodi!

**Proprietà:**

- $F_{m(K)}(a, z) = F_{K(\frac{1}{a}, z)}$  (comportamento rispetto al mirror)
- $F[K_1 \# K_2] = F[K_1]F[K_2]$  (moltiplicatività per somma connessa)
- $F_K$  distingue nodi che  $L_K$  non può distinguere



# Implementazione e Verifica

## Progetto Computazionale:

- Implementazione in Python: Algoritmo basato sulle relazioni skein
- Calcolo automatico di  $L_K$  e  $F_K$  per diagrammi di nodi
- Interfaccia user-friendly per l'inserimento di diagrammi



# Implementazione e Verifica

## Progetto Computazionale:

- Implementazione in Python: Algoritmo basato sulle relazioni skein
- Calcolo automatico di  $L_K$  e  $F_K$  per diagrammi di nodi
- Interfaccia user-friendly per l'inserimento di diagrammi

## Verifica sperimentale:

- Confronto con il database [KnotInfo](#)
- Verifica su centinaia di nodi noti
- Test di coerenza con valori pubblicati



# Implementazione e Verifica

## Progetto Computazionale:

- Implementazione in Python: Algoritmo basato sulle relazioni skein
- Calcolo automatico di  $L_K$  e  $F_K$  per diagrammi di nodi
- Interfaccia user-friendly per l'inserimento di diagrammi

## Verifica sperimentale:

- Confronto con il database [KnotInfo](#)
- Verifica su centinaia di nodi noti
- Test di coerenza con valori pubblicati

Scoperta interessante: Trovato un errore nel valore pubblicato per il nodo  $10_{125}$ !



# Implementazione e Verifica

## Progetto Computazionale:

- Implementazione in Python: Algoritmo basato sulle relazioni skein
- Calcolo automatico di  $L_K$  e  $F_K$  per diagrammi di nodi
- Interfaccia user-friendly per l'inserimento di diagrammi

## Verifica sperimentale:

- Confronto con il database [KnotInfo](#)
- Verifica su centinaia di nodi noti
- Test di coerenza con valori pubblicati

Scoperta interessante: Trovato un errore nel valore pubblicato per il nodo  $10_{125}$ !

La teoria e l'implementazione si confermano a vicenda



# Conclusioni

Percorso compiuto:

1. Dal concetto geometrico di nodo alla formalizzazione tramite diagrammi
2. Definizione dell'isotopia regolare e degli invarianti
3. Costruzione rigorosa del polinomio di Kauffman
4. Dimostrazione della buona definizione
5. Estensione agli invarianti di isotopia ambiente



# Conclusioni

## Percorso compiuto:

1. Dal concetto geometrico di nodo alla formalizzazione tramite diagrammi
2. Definizione dell'isotopia regolare e degli invarianti
3. Costruzione rigorosa del polinomio di Kauffman
4. Dimostrazione della buona definizione
5. Estensione agli invarianti di isotopia ambiente

## Risultati principali:

- Dimostrazione della buona definizione di  $L_K$
- Costruzione di  $F_K$  come invariante ambiente
- Verifica computazionale e scoperta di errori nella letteratura



# Conclusioni

Percorso compiuto:

1. Dal concetto geometrico di nodo alla formalizzazione tramite diagrammi
2. Definizione dell'isotopia regolare e degli invarianti
3. Costruzione rigorosa del polinomio di Kauffman
4. Dimostrazione della buona definizione
5. Estensione agli invarianti di isotopia ambiente

Risultati principali:

- Dimostrazione della buona definizione di  $L_K$
- Costruzione di  $F_K$  come invariante ambiente
- Verifica computazionale e scoperta di errori nella letteratura

**Grazie per l'attenzione!**

Domande?