



Il Polinomio di Kauffman: un invariante di isotopia regolare

Tesi di Laurea Triennale

Antonio De Lucreziis

Dipartimento di Matematica

Università di Pisa

18 Luglio 2025



Indice

Teoria dei Nodi

Polinomio di Kauffman

Laboratorio Computazionale



Introduzione

Def. $K \subset \mathbb{R}^3$ è un **nodo (tame)** se esiste $f : \mathbb{S}^1 \hookrightarrow \mathbb{R}^3$ embedding loc. piatto con $K = f(\mathbb{S}^1)$.

Def. Possiamo generalizzare i nodi $\mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{R}^3$ a **link** sostituendo con $\mathbb{S}^1 \sqcup \dots \sqcup \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{R}^3$.



Introduzione

Def. $K \subset \mathbb{R}^3$ è un **nodo (tame)** se esiste $f : \mathbb{S}^1 \hookrightarrow \mathbb{R}^3$ embedding loc. piatto con $K = f(\mathbb{S}^1)$.

Def. Possiamo generalizzare i nodi $\mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{R}^3$ a **link** sostituendo con $\mathbb{S}^1 \sqcup \dots \sqcup \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{R}^3$.

Def. $K_0, K_1 \subset \mathbb{R}^3$ sono **equivalenti** se esiste un'**isotopia ambiente** che porta uno nell'altro, ovvero esiste $H : \mathbb{R}^3 \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$ continua, tale che:

- $\forall t \in [0, 1], H(\cdot, t)$ è un omeomorfismo

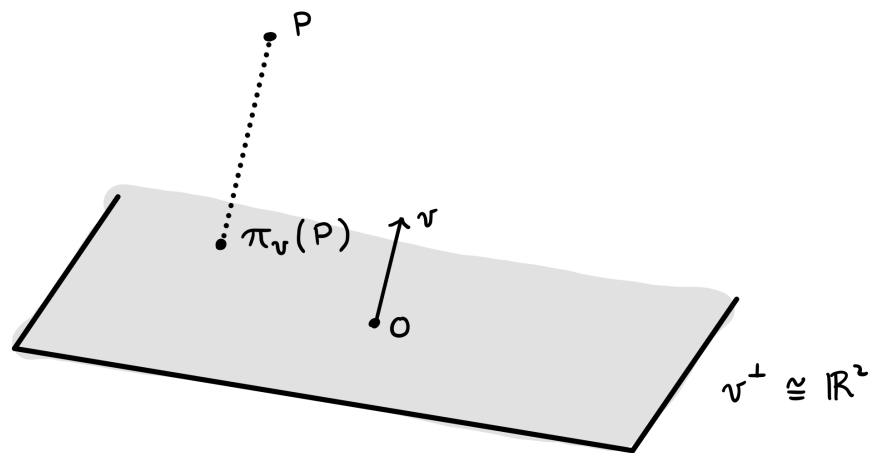
e posta $H_t(x) := H(x, t)$ si ha:

- $H_0 = \text{id}_{\mathbb{R}^3}$
- $H_1(K_0) = K_1$



Proiezioni e Diagrammi

Fatto. Sia $L \subset \mathbb{R}^3$ link poligonale, allora esiste un aperto denso $U \subset \mathbb{S}^2$ tale che $\forall v \in U$ e detta $\pi_v : \mathbb{R}^3 \rightarrow v^\perp$ la proiezione sul piano v^\perp come in figura, abbiamo che:



- i) L non ha segmenti paralleli a v .
 - ii) Se $x \in \pi_v(L)$ è tale che $|\pi^{-1}(x)| > 1$, ovvero è un punto **singolare**, allora:
 - $\pi_v^{-1}(x)$ non contiene vertici di L
 - $|\pi^{-1}(x)| = 2$ ovvero è un **punto doppio**, questi sono gli **incroci** della proiezione.
 - x è un punto di intersezione trasversa
- Gli altri punti sono detti **regolari**.

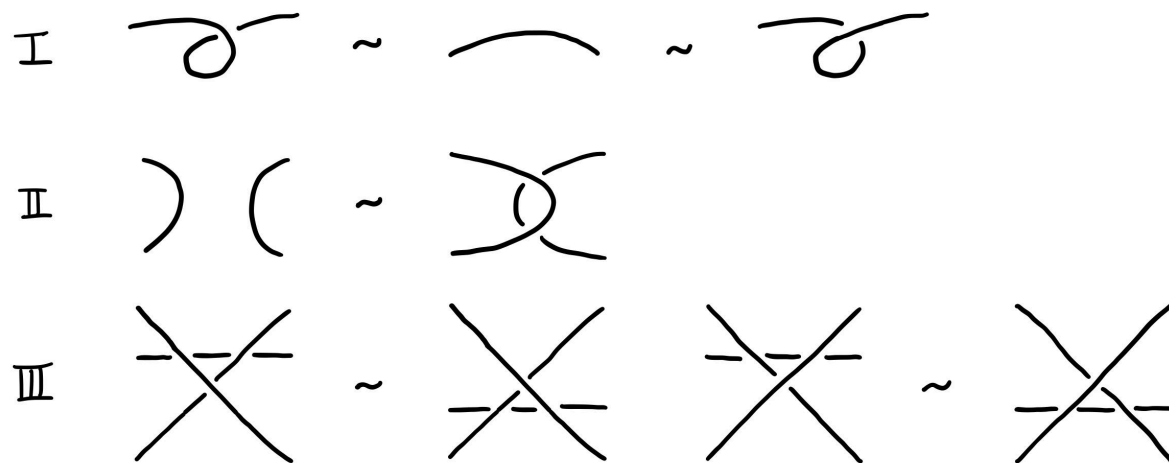


Proiezioni e Diagrammi

Def. Un **diagramma** $D \subset \mathbb{R}^2$ di un link $L \subset \mathbb{R}^3$ è l'immagine di L attraverso una proiezione regolare decorata con l'informazione sopra/sotto ad ogni incrocio.

Def. Le mosse I, II, III in figura sono dette **mosse di Reidemeister**.

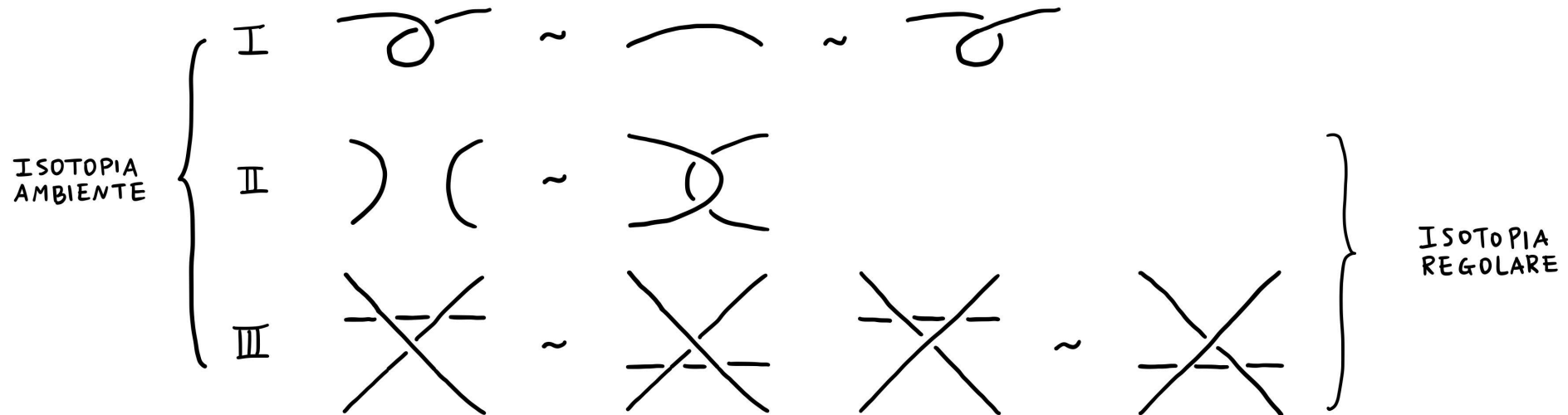
Teorema (di Reidemeister). Due diagrammi di link *equivalenti* sono collegati da una *successione finita mosse di Reidemeister* e isotopie planari.





Isotopia Regolare

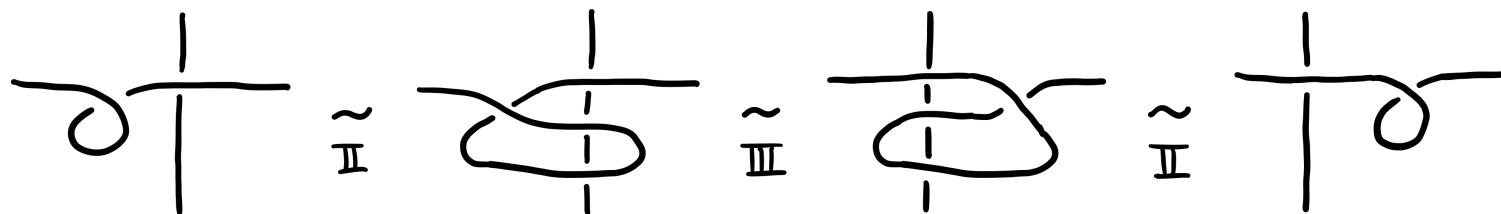
Def. D_1, D_2 diagrammi di link si dicono equivalenti a meno di **isotopia regolare** se e solo se sono equivalenti a meno di isotopie planari e mosse II e III di Reidemeister.





Comportamento Isotopia Regolare

Osservazione. Tutte le mosse di tipo I, quelle che introducono quelli che chiameremo **riccioli**, possono passare sopra o sotto altri fili senza problemi applicando le seguenti mosse





Comportamento Isotopia Regolare

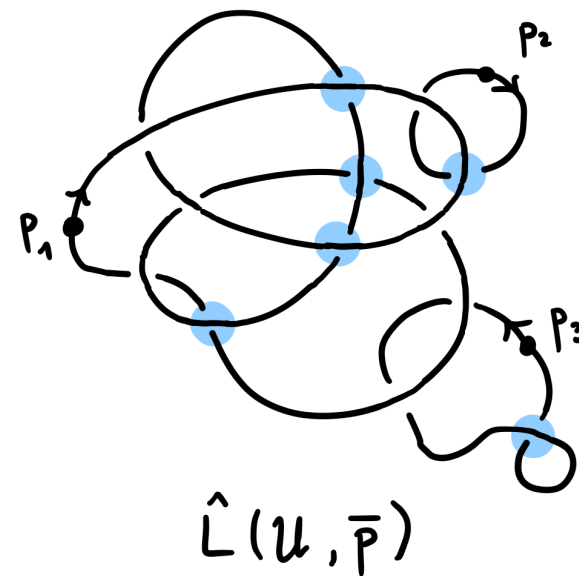
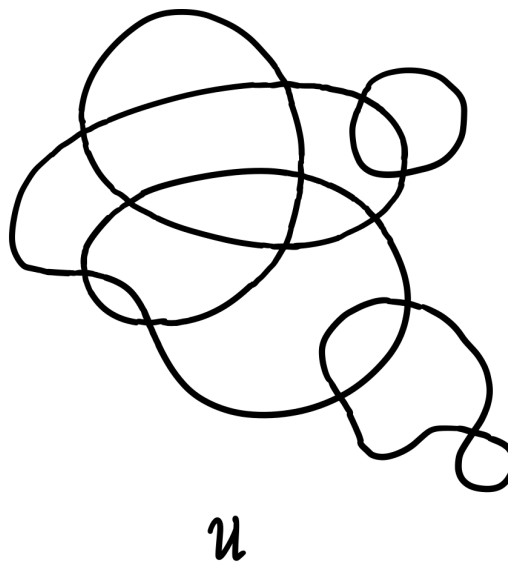
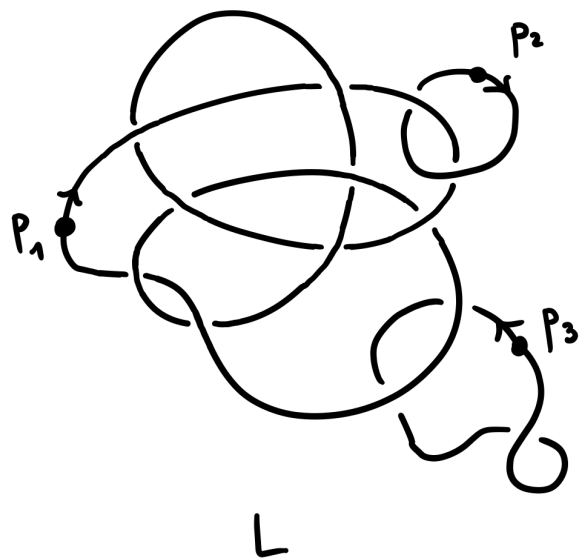
Osservazione. Quando abbiamo una coppia di riccioli con segni opposti abbiamo la seguente proprietà di cancellazione detto *trucco di Whitney*.





Diagrammi in forma discendente

Dato K il **nodo banale standard** (o in *forma discendente*) associato è $\hat{K}(\mathcal{U}, p)$:





Comportamento Isotopia Regolare

Lemma. Sia K un diagramma di un nodo in *forma discendente*, allora o è composto interamente da riccioli o ammette una sequenza di mosse di tipo II e III che portano al diagramma di un nodo formato solo da riccioli.

Ovvero un nodo in forma discendente è *equivalente* ad uno composto solo da riccioli.



Comportamento Isotopia Regolare

Lemma. Sia K un diagramma di un nodo in *forma discendente*, allora o è composto interamente da riccioli o ammette una sequenza di mosse di tipo II e III che portano al diagramma di un nodo formato solo da riccioli.

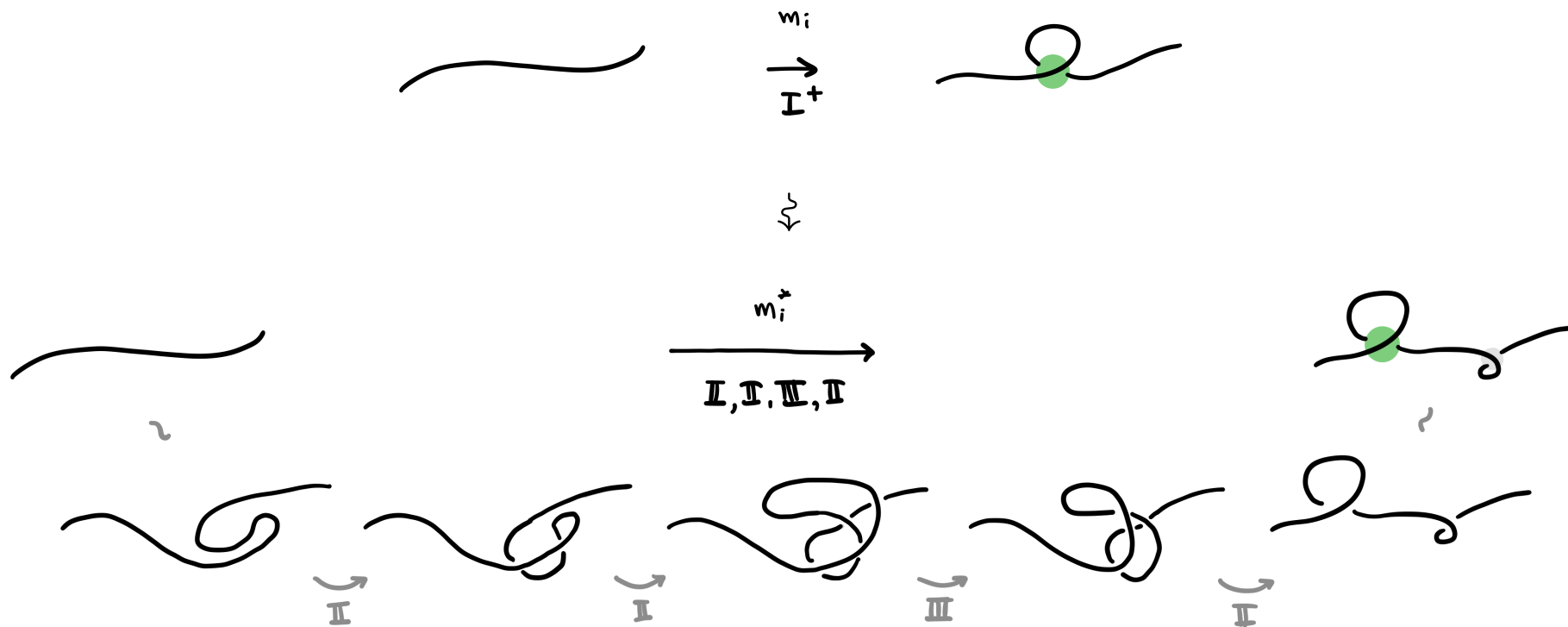
Ovvero un nodo in forma discendente è *equivalente* ad uno composto solo da riccioli.

Dim. Consideriamo una successione di mosse $K = D_0 \rightarrow \dots \rightarrow D_n = \bigcirc$. Modifichiamo le mosse nei seguenti casi:

- Mosse di tipo I che rimuovono un ricciolo
- Mosse di tipo I che aggiungono un ricciolo
- Mosse di tipo II, III



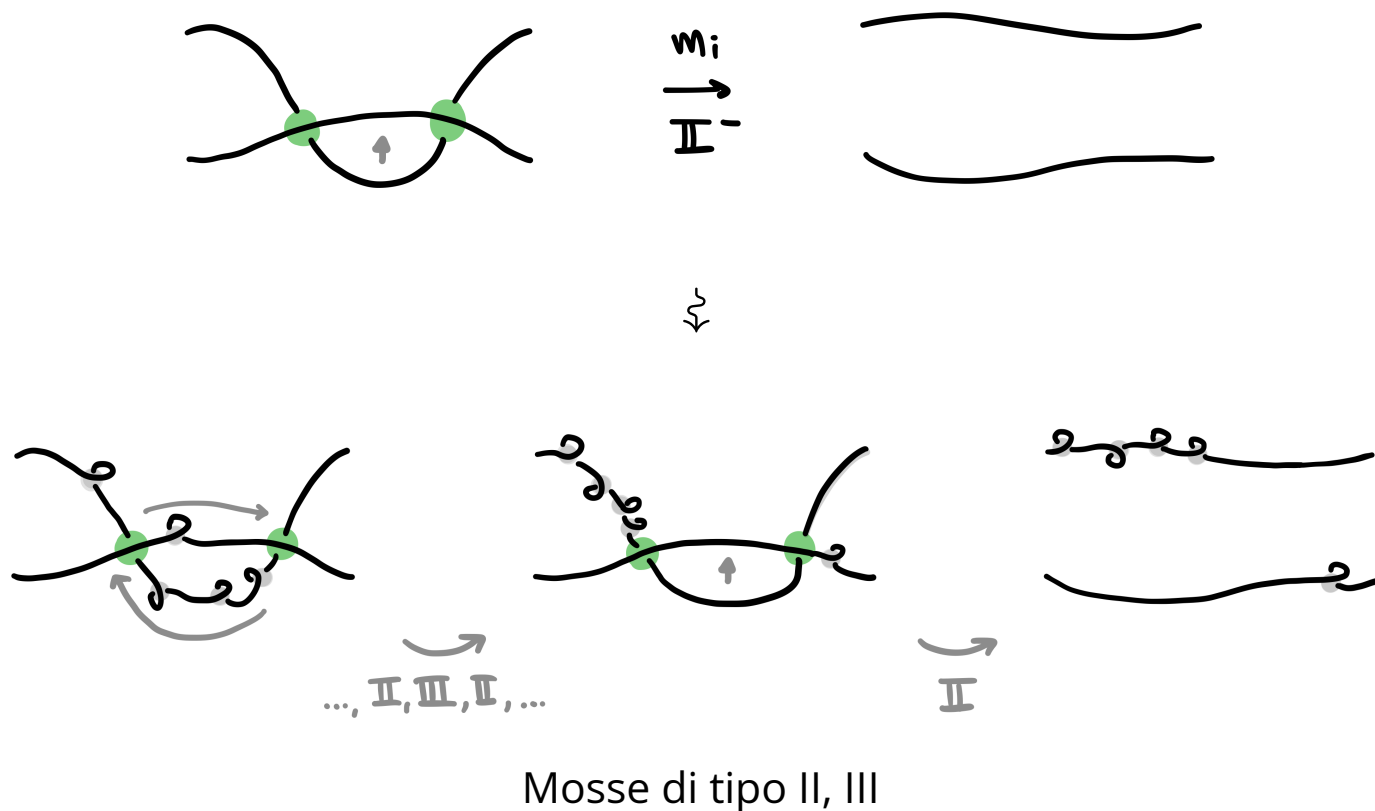
Comportamento Isotopia Regolare



Mosse di tipo I che aggiungono un ricciolo



Comportamento Isotopia Regolare





Writhe

Def. Definiamo **il segno** di un incrocio di un diagramma come segue:

$$\varepsilon\left(\begin{array}{c} \nearrow \\ \searrow \\ \swarrow \\ \nwarrow \end{array}\right) = +1 \quad \varepsilon\left(\begin{array}{c} \nwarrow \\ \swarrow \\ \searrow \\ \nearrow \end{array}\right) = -1$$

Def. K link orientato, definiamo il **writhe** $w(K) := \sum_{c \text{ incrocio}} \varepsilon(c)$.



Writhe

Def. Definiamo **il segno** di un incrocio di un diagramma come segue:

$$\varepsilon\left(\begin{array}{c} \nearrow \\ \searrow \\ \nwarrow \\ \nearrow \end{array}\right) = +1 \quad \varepsilon\left(\begin{array}{c} \nwarrow \\ \nearrow \\ \swarrow \\ \nwarrow \end{array}\right) = -1$$

Def. K link orientato, definiamo il **writhe** $w(K) := \sum_{c \text{ incrocio}} \varepsilon(c)$.

Prop. Se K è il diagramma di un nodo, il *writhe* non dipende dall'orientazione.



Writhe

Def. Definiamo **il segno** di un incrocio di un diagramma come segue:

$$\varepsilon\left(\begin{array}{c} \nearrow \\ \searrow \\ \swarrow \\ \nwarrow \end{array}\right) = +1 \quad \varepsilon\left(\begin{array}{c} \nwarrow \\ \swarrow \\ \searrow \\ \nearrow \end{array}\right) = -1$$

Def. K link orientato, definiamo il **writhe** $w(K) := \sum_{c \text{ incrocio}} \varepsilon(c)$.

Prop. Se K è il diagramma di un nodo, il *writhe* non dipende dall'orientazione.

Prop. Il writhe è un invariante di isotopia regolare, ovvero $K_1 \sim K_2 \Rightarrow w(K_1) = w(K_2)$.



Indice

Teoria dei Nodi

Polinomio di Kauffman

Laboratorio Computazionale



Assiomi

Def. Sia K un diagramma di un link *non orientato*, $L_K \in \mathbb{Z}[a, a^{-1}, z, z^{-1}]$ e verifica:

i) $K \sim K' \Rightarrow L_K = L_{K'}$.

ii) Valgono le seguenti relazioni:

a) $L[\text{crossing}] + L[\text{crossing}] = z(L[\text{cup}] + L[\text{cap}])$

b) $L[\text{circle}] = 1$

c) $L[\text{curl}] = aL[\text{arc}]$

d) $L[\text{curl}] = a^{-1}L[\text{arc}]$



Assiomi

Def. Sia K un diagramma di un link *non orientato*, $L_K \in \mathbb{Z}[a, a^{-1}, z, z^{-1}]$ e verifica:

i) $K \sim K' \Rightarrow L_K = L_{K'}$.

ii) Valgono le seguenti relazioni:

a) $L[\text{crossing}] + L[\text{crossing}] = z(L[\text{cup}] + L[\text{cap}])$

b) $L[\text{circle}] = 1$

c) $L[\text{curl}] = aL[\text{arc}]$

d) $L[\text{curl}] = a^{-1}L[\text{arc}]$

Osservazione. A questo punto non sappiamo se L_K sia ben definito.



Calcoli impliciti

Link $L[\bigcirc \bigcirc]$



Calcoli impliciti

$$\text{Link } L[\bigcirc \bigcirc]$$
$$(\text{figure-eight}, \text{figure-eight}, \text{two circles}, \text{figure-eight})$$



Calcoli impliciti

Link $L[\bigcirc \bigcirc]$

$$L[\text{figure 8}] + L[\text{figure 8}] = z \left(L[\text{figure 8}] + L[\text{figure 8}] \right)$$



Calcoli impliciti

Link $L[\bigcirc \bigcirc]$

$$L[\text{crossing}] + L[\text{crossing}] = z \left(L[\text{two circles}] + L[\text{two circles}] \right)$$

$$\Rightarrow aL[\bigcirc] + a^{-1}L[\bigcirc] = z(\delta + L[\bigcirc])$$

$$\Rightarrow a + a^{-1} = z(\delta + 1)$$

$$\Rightarrow \delta = \frac{a + 1/a}{z} - 1$$



Calcoli impliciti

Link $L[\bigcirc \bigcirc]$

$$L[\text{figure 1}] + L[\text{figure 2}] = z(L[\text{figure 3}] + L[\text{figure 4}])$$

$$\Rightarrow aL[\bigcirc] + a^{-1}L[\bigcirc] = z(\delta + L[\bigcirc])$$

$$\Rightarrow a + a^{-1} = z(\delta + 1)$$

$$\Rightarrow \delta = \frac{a + 1/a}{z} - 1$$

$$\rightsquigarrow L[K_1 \sqcup K_2] = \delta L[K_1]L[K_2]$$



Calcoli impliciti

Link di Hopf

$$L[\text{link}] + L[\text{link}] = z(L[\text{link}] + L[\text{link}])$$

$$\Rightarrow L[\text{link}] + \delta = z(a + a^{-1})$$

$$\Rightarrow L[\text{link}] = -(a + a^{-1})z^{-1} + 1 + (a + a^{-1})z$$

Nodo trifoglio

$$L[\text{trifoglio}] + L[\text{trifoglio}] = z(L[\text{trifoglio}] + L[\text{trifoglio}])$$

$$\Rightarrow L[\text{trifoglio}] + a = z(L[\text{link}] + a^{-2})$$

$$\Rightarrow L[\text{trifoglio}] = -(2a + a^{-1}) + (1 + a^{-2})z + (a + a^{-1})z^2$$



Considerazioni preliminari

Def. Sia K un diagramma di un nodo, $p \in K$ un punto di partenza direzionato e sia $\lambda = (\lambda_n, \dots, \lambda_0)$ una sequenza di etichette di incroci di K :

$$\begin{array}{cccc}
 \begin{array}{c} i \\ \times \end{array} & \begin{array}{c} i \\ \times \end{array} & \begin{array}{c} i \\ \smile \\ \smile \end{array} & \begin{array}{c} i \\ \smile \\ \smile \end{array} \\
 K & S_i K & E_i K & e_i K
 \end{array}$$



Considerazioni preliminari

Def. Sia K un diagramma di un nodo, $p \in K$ un punto di partenza direzionato e sia $\lambda = (\lambda_n, \dots, \lambda_0)$ una sequenza di etichette di incroci di K :

$$\begin{array}{cccc}
 \begin{array}{c} i \\ \times \end{array} & \begin{array}{c} i \\ \times \end{array} & \begin{array}{c} i \\ \smile \\ \smile \end{array} & \begin{array}{c} i \\) (\end{array} \\
 K & S_i K & E_i K & e_i K
 \end{array}$$

$$A_i^\lambda := E_{\lambda_i} S_{\lambda_{i-1}} \cdots S_{\lambda_0} \quad B_i^\lambda := e_{\lambda_i} S_{\lambda_{i-1}} \cdots S_{\lambda_0}$$



Considerazioni preliminari

Def. Sia K un diagramma di un nodo, $p \in K$ un punto di partenza direzionato e sia $\lambda = (\lambda_n, \dots, \lambda_0)$ una sequenza di etichette di incroci di K :

$$\begin{array}{cccc}
 \begin{array}{c} i \\ \times \end{array} & \begin{array}{c} i \\ \times \end{array} & \begin{array}{c} i \\ \smile \\ \smile \end{array} & \begin{array}{c} i \\) \\ (\end{array} \\
 K & S_i K & E_i K & e_i K
 \end{array}$$

$$A_i^\lambda := E_{\lambda_i} S_{\lambda_{i-1}} \cdots S_{\lambda_0} \quad B_i^\lambda := e_{\lambda_i} S_{\lambda_{i-1}} \cdots S_{\lambda_0}$$

$$\sum_K(\lambda) := \sum_{i=0}^n (-1)^i (L[A_i^\lambda K] + L[B_i^\lambda K])$$



Considerazioni preliminari

Sia λ una sequenza di scambi che porta K a \hat{K} :

$$L[K] + L[S_0 K] = z(L[E_0 K] + L[e_0 K])$$



Considerazioni preliminari

Sia λ una sequenza di scambi che porta K a \hat{K} :

$$L[K] + L[S_0 K] = z(L[E_0 K] + L[e_0 K])$$

$$L[S_0 K] + L[S_1 S_0 K] = z(L[E_1 S_0 K] + L[e_1 S_0 K])$$

⋮



Considerazioni preliminari

Sia λ una sequenza di scambi che porta K a \hat{K} :

$$L[K] + L[S_0 K] = z(L[E_0 K] + L[e_0 K])$$

$$L[S_0 K] + L[S_1 S_0 K] = z(L[E_1 S_0 K] + L[e_1 S_0 K])$$

⋮

$$L[S_{n-1} \cdots S_0 K] + L[\hat{K}] = z(L[E_n S_{n-1} \cdots S_0 K] + L[e_n S_{n-1} \cdots S_0 K])$$



Considerazioni preliminari

Sia λ una sequenza di scambi che porta K a \hat{K} :

$$L[K] + L[S_0 K] = z(L[E_0 K] + L[e_0 K])$$

$$-(L[S_0 K] + L[S_1 S_0 K]) = -z(L[E_1 S_0 K] + L[e_1 S_0 K])$$

⋮

$$(-1)^n (L[S_{n-1} \cdots S_0 K] + L[\hat{K}]) = (-1)^n z(L[E_n S_{n-1} \cdots S_0 K] + L[e_n S_{n-1} \cdots S_0 K])$$



Considerazioni preliminari

Sia λ una sequenza di scambi che porta K a \hat{K} :

$$L[K] + \cancel{L[S_0 K]} = z(L[E_0 K] + L[e_0 K])$$

$$-\cancel{(L[S_0 K] + L[S_1 S_0 K])} = -z(L[E_1 S_0 K] + L[e_1 S_0 K])$$

⋮

$$(-1)^n \left(\cancel{L[S_{n-1} \cdots S_0 K]} + L[\hat{K}] \right) = (-1)^n z(L[E_n S_{n-1} \cdots S_0 K] + L[e_n S_{n-1} \cdots S_0 K])$$



Considerazioni preliminari

Sia λ una sequenza di scambi che porta K a \hat{K} :

$$L[K] + \cancel{L[S_0 K]} = z(L[E_0 K] + L[e_0 K])$$

$$-\cancel{(L[S_0 K] + L[S_1 S_0 K])} = -z(L[E_1 S_0 K] + L[e_1 S_0 K])$$

⋮

$$(-1)^n \left(\cancel{L[S_{n-1} \cdots S_0 K]} + L[\hat{K}] \right) = (-1)^n z(L[E_n S_{n-1} \cdots S_0 K] + L[e_n S_{n-1} \cdots S_0 K])$$

$$\Rightarrow L[K] + (-1)^n L[\hat{K}] = z \sum_{i=0}^n (-1)^i (L[E_i S_{i-1} \cdots S_0 K] + L[e_i S_{i-1} \cdots S_0 K])$$



Considerazioni preliminari

Sia λ una sequenza di scambi che porta K a \hat{K} :

$$L[K] + \cancel{L[S_0 K]} = z(L[E_0 K] + L[e_0 K])$$

$$-\cancel{(L[S_0 K] + L[S_1 S_0 K])} = -z(L[E_1 S_0 K] + L[e_1 S_0 K])$$

⋮

$$(-1)^n \left(\cancel{L[S_{n-1} \cdots S_0 K]} + L[\hat{K}] \right) = (-1)^n z(L[E_n S_{n-1} \cdots S_0 K] + L[e_n S_{n-1} \cdots S_0 K])$$

$$\Rightarrow L[K] + (-1)^n L[\hat{K}] = z \sum_{i=0}^n (-1)^i (L[A_i^\lambda K] + L[B_i^\lambda K])$$



Considerazioni preliminari

Sia λ una sequenza di scambi che porta K a \hat{K} :

$$L[K] + \cancel{L[S_0 K]} = z(L[E_0 K] + L[e_0 K])$$

$$-\cancel{(L[S_0 K] + L[S_1 S_0 K])} = -z(L[E_1 S_0 K] + L[e_1 S_0 K])$$

⋮

$$(-1)^n \left(\cancel{L[S_{n-1} \cdots S_0 K]} + L[\hat{K}] \right) = (-1)^n z(L[E_n S_{n-1} \cdots S_0 K] + L[e_n S_{n-1} \cdots S_0 K])$$

$$\Rightarrow L[K] = (-1)^{n+1} L[\hat{K}] + z \sum_{i=0}^n (-1)^i (L[A_i^\lambda K] + L[B_i^\lambda K])$$



Considerazioni preliminari

Sia λ una sequenza di scambi che porta K a \hat{K} :

$$L[K] + \cancel{L[S_0 K]} = z(L[E_0 K] + L[e_0 K])$$

$$-\cancel{(L[S_0 K] + L[S_1 S_0 K])} = -z(L[E_1 S_0 K] + L[e_1 S_0 K])$$

⋮

$$(-1)^n \left(\cancel{L[S_{n-1} \cdots S_0 K]} + L[\hat{K}] \right) = (-1)^n z(L[E_n S_{n-1} \cdots S_0 K] + L[e_n S_{n-1} \cdots S_0 K])$$

$$\Rightarrow L[K] = (-1)^{n+1} L[\hat{K}] + z \sum_K(\lambda)$$



Definizione induttiva

Def (induttiva di L_K). Il polinomio $L_K(a, z)$ è definito induttivamente come segue:

- i) Se K è in forma discendente: $L_K(a, z) := a^{w(K)}$
- ii) Se $K = K_1 \cup K_2$: $L(K_1 \cup K_2) := \delta L(K_1)L(K_2)$ (con $\delta := \frac{a+1/a}{z} - 1$)
- iii) Altrimenti $K = K_1 \cup \dots \cup K_n$:


$$a) \text{ Se } n > 1: L_K(a, z) := \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^n \sum_{q=p_i, \bar{p}_i} \left((-1)^{|\lambda(q)|+1} \delta L_{K_i} L_{K-K_i} + z \sum_K (\lambda(q)) \right)$$

$$b) \text{ Se } n = 1: L_K(a, z) := \frac{1}{2} \sum_{q=p, \bar{p}} \left((-1)^{|\lambda(q)|+1} L_{\widehat{K}(q)} + z \sum_K (\lambda(q)) \right)$$



Ipotesi induttiva

L'ipotesi induttiva che useremo nel corso della dimostrazione è la seguente:

Per ogni diagramma di link K con $< N$ incroci e per diagrammi contenenti  con $< N$ incroci:

- a) L_K è ben definito (non dipende dalla scelta di punto base).
- b) L_K verifica gli assiomi:
 - $L[K] + L[S_i K] = z(L[e_i K] + L[E_i K])$
 - $L[\text{crossing with loop}] = aL[\text{crossing}], L[\text{crossing with loop}] = a^{-1}L[\text{crossing}]$
- c) L_K è invariante per mosse di tipo II e III che non aumentano il numero di incroci.
- d) Se K ammette una *funzione di slacciamento* allora $L_K = a^{w(K)}$



Dimostrazione buona definizione

Dimostrazione.

- a) L_K è ben definito (non dipende dalla scelta di punto base)
 - Invarianza $\sum_K(\lambda)$ per 1-rotazioni
 - Caso più componenti
 - Caso una sola componente
 - Splice di un nodo in forma discendente
 - Assiomi di L_K per nodi in forma discendente
- b) L_K verifica gli assiomi
- c) L_K è invariante per mosse di tipo II e III che non aumentano il numero di incroci
- d) Se K ammette una *funzione di slacciamento* allora $L_K = a^{w(K)}$



Indice

Teoria dei Nodi

Polinomio di Kauffman

Laboratorio Computazionale



Implementazione in Python

Implementazioni esistenti:

- **KnotScape**: scritto in C, degli anni '90.
- **KnotTheory**: ultimo aggiornamento ~2011, per Mathematica.



Implementazione in Python

Implementazioni esistenti:

- **KnotScape**: scritto in C, degli anni '90.
- **KnotTheory**: ultimo aggiornamento ~2011, per Mathematica.

Per il progetto di Lab. Comp. abbiamo scritto una **nuova implementazione** in *Python* open source:

- Rappresentazione di nodi attraverso codici **PD** e **SG**.
- Algoritmo per il calcolo di L_K e F_K .



Implementazione in Python

Implementazioni esistenti:

- **KnotScape**: scritto in C, degli anni '90.
- **KnotTheory**: ultimo aggiornamento ~2011, per Mathematica.

Per il progetto di Lab. Comp. abbiamo scritto una **nuova implementazione** in *Python* open source:

- Rappresentazione di nodi attraverso codici **PD** e **SG**.
- Algoritmo per il calcolo di L_K e F_K .
- Verifica di tutti i polinomi contenuti nel **database di KnotInfo**.
- *Trovato un errore nel nodo 10_{125} , c'è $L_{m(K)}$ invece di L_K .*



Fine