



# Il Polinomio di Kauffman: un invariante di isotopia regolare

## Tesi di Laurea Triennale

Antonio De Lucreziis

Dipartimento di Matematica  
Università di Pisa

18 Luglio 2025



# Indice

**Teoria dei Nodi**

Polinomio di Kauffman

Laboratorio Computazionale



# Nodi e Diagrammi

**Nodo.**  $K \subset \mathbb{R}^3$  è un **nodo (tame)** se  $\exists f : S^1 \hookrightarrow \mathbb{R}^3$  *embedding loc. piatto* con  $K = f(S^1)$ .

**Link.**  $S^1 \rightarrow \mathbb{R}^3 \rightsquigarrow S^1 \sqcup \dots \sqcup S^1 \rightarrow \mathbb{R}^3$



# Nodi e Diagrammi

**Nodo.**  $K \subset \mathbb{R}^3$  è un **nodo (tame)** se  $\exists f : \mathbb{S}^1 \hookrightarrow \mathbb{R}^3$  *embedding loc. piatto* con  $K = f(\mathbb{S}^1)$ .

**Link.**  $\mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{R}^3 \rightsquigarrow \mathbb{S}^1 \sqcup \dots \sqcup \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{R}^3$

**Def.**  $K_0, K_1$  sono equivalenti se  $\exists H : \mathbb{R}^3 \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$  **isotopia ambiente**, ovvero tale che:

- $\forall t \in [0, 1], H(\cdot, t)$  è un omeomorfismo

e posta  $H_t(x) := H(x, t)$  si ha:

- $H_0 = \text{id}_{\mathbb{R}^3}$
- $H_1(K_0) = K_1$



# Nodi e Diagrammi

**Nodo.**  $K \subset \mathbb{R}^3$  è un **nodo (tame)** se  $\exists f : \mathbb{S}^1 \hookrightarrow \mathbb{R}^3$  *embedding loc. piatto* con  $K = f(\mathbb{S}^1)$ .

**Link.**  $\mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{R}^3 \rightsquigarrow \mathbb{S}^1 \sqcup \dots \sqcup \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{R}^3$

**Def.**  $K_0, K_1$  sono equivalenti se  $\exists H : \mathbb{R}^3 \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$  **isotopia ambiente**, ovvero tale che:

- $\forall t \in [0, 1], H(\cdot, t)$  è un omeomorfismo

e posta  $H_t(x) := H(x, t)$  si ha:

- $H_0 = \text{id}_{\mathbb{R}^3}$
- $H_1(K_0) = K_1$

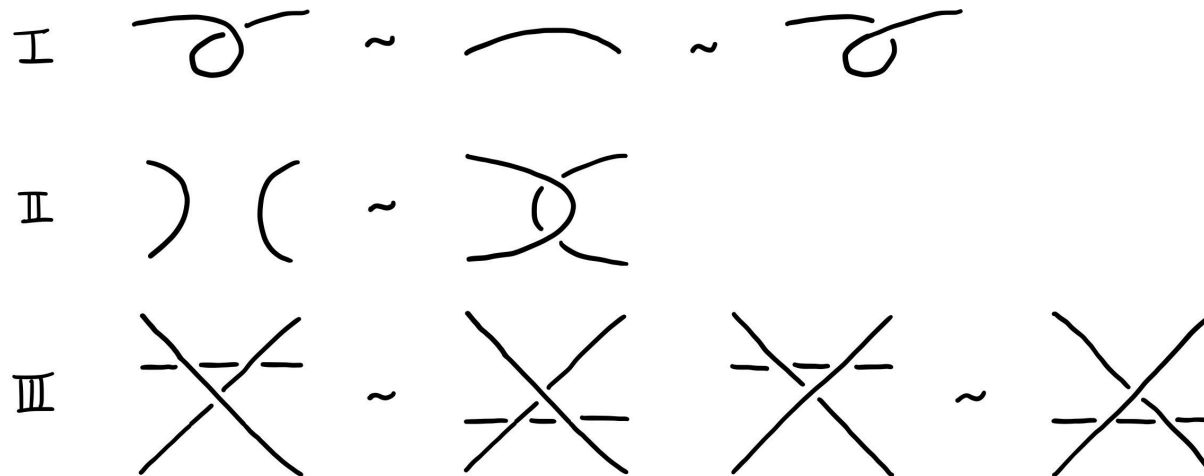
**Def.** Un **diagramma**  $D \subset \mathbb{R}^2$  proviene da un link  $L \subset \mathbb{R}^3$  attraverso una proiezione regolare. I punti doppi del diagramma sono detti **incroci**.



# Teorema di Reidemeister

**Mosse di Reidemeister.** Le mosse I, II, III in figura sono dette.

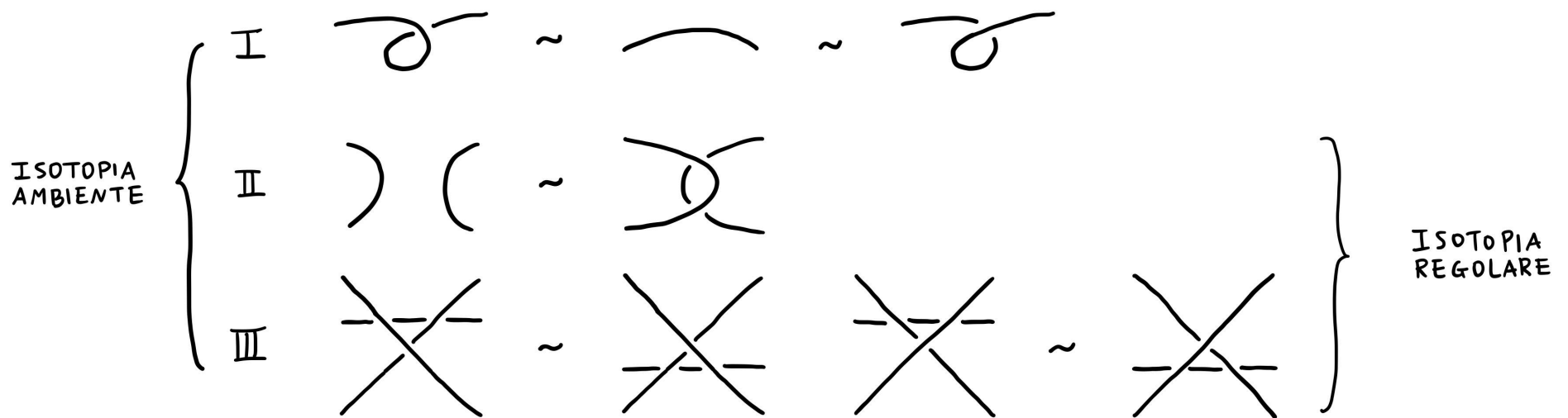
**Teorema (di Reidemeister).** Due diagrammi di link *equivalenti* sono collegati da una *successione finita di mosse di Reidemeister* e isotopie planari.





# Isotopia Regolare

L'**isotopia regolare** è la relazione di equivalenza su diagrammi di link generata solo dalle mosse II e III.

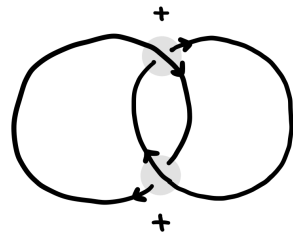




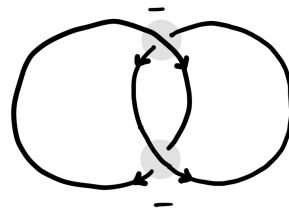
# Writhe

Il **segno** di un incrocio di un diagramma orientato è:  $\varepsilon\left(\begin{array}{c} \nearrow \\ \searrow \end{array}\right) = +1, \varepsilon\left(\begin{array}{c} \nwarrow \\ \swarrow \end{array}\right) = -1$

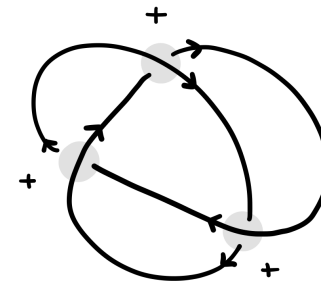
$D$  diagramma di un link orientato, il **writhe**  $w(D) := \sum_{c \text{ incrocio}} \varepsilon(c)$ .



$$w = +2$$



$$w = -2$$



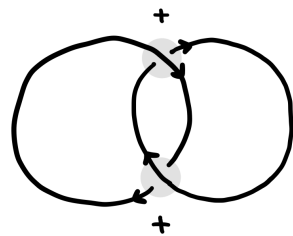
$$w = 3$$



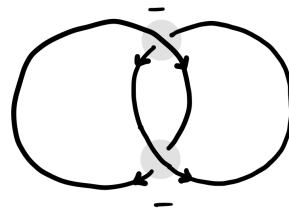
# Writhe

Il **segno** di un incrocio di un diagramma orientato è:  $\varepsilon\left(\begin{array}{c} \nearrow \\ \searrow \end{array}\right) = +1, \varepsilon\left(\begin{array}{c} \nwarrow \\ \swarrow \end{array}\right) = -1$

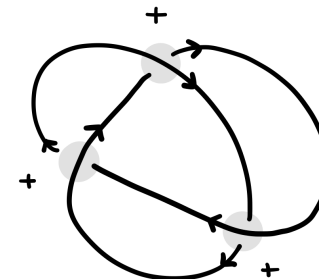
$D$  diagramma di un link orientato, il **writhe**  $w(D) := \sum_{c \text{ incrocio}} \varepsilon(c)$ .



$$w = +2$$



$$w = -2$$



$$w = 3$$

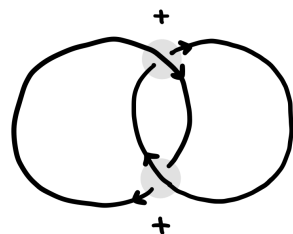
**Prop.** Se  $D$  è il diagramma di un nodo, il **writhe non dipende dall'orientazione**.



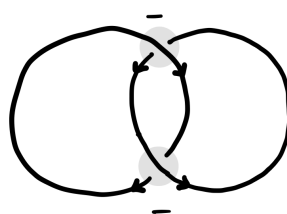
# Writhe

Il **segno** di un incrocio di un diagramma orientato è:  $\varepsilon\left(\begin{array}{c} \nearrow \\ \searrow \end{array}\right) = +1, \varepsilon\left(\begin{array}{c} \nwarrow \\ \swarrow \end{array}\right) = -1$

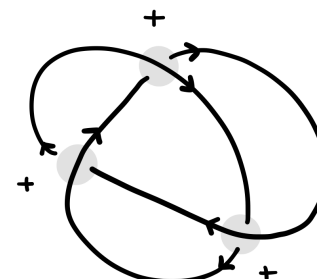
$D$  diagramma di un link orientato, il **writhe**  $w(D) := \sum_{c \text{ incrocio}} \varepsilon(c)$ .



$$w = +2$$



$$w = -2$$



$$w = 3$$

**Prop.** Se  $D$  è il diagramma di un nodo, il **writhe non dipende dall'orientazione**.

**Prop.** Il writhe è un **invariante di isotopia regolare**, ovvero  $D_1 \sim D_2 \Rightarrow w(D_1) = w(D_2)$ .



# Indice

Teoria dei Nodi

**Polinomio di Kauffman**

Laboratorio Computazionale



# Assiomi

Dimostreremo che per ogni diagramma di link *non orientato* esiste un polinomio  $L_D$  per ogni diagramma di link *non orientato*  $D$ , il polinomio  $L_D \in \mathbb{Z}[a, a^{-1}, z, z^{-1}]$  verifica i seguenti assiomi:

i)  $D \sim D' \Rightarrow L_D = L_{D'}$ .

ii) Valgono le seguenti relazioni:

a)  $L[\text{crossing}] + L[\text{crossing}] = z(L[\text{cup}] + L[\text{cap}])$  ( )

b)  $L[\text{circle}] = 1$

c)  $L[\text{curl}] = aL[\text{arc}]$

d)  $L[\text{curl}] = a^{-1}L[\text{arc}]$



# Normalizzazione a invariante di isotopia ambiente

**Definizione.**  $F_D(a, z) := a^{-w(D)} \cdot L_D(a, z)$



# Normalizzazione a invariante di isotopia ambiente

**Definizione.**  $F_D(a, z) := a^{-w(D)} \cdot L_D(a, z)$

**Prop.**  $F_K$  invariante di isotopia ambiente.

*Dimostrazione.*

- $w(D)$  invariante di *isotopia regolare*  $\Rightarrow a^{-w(D)}$  invariante di *isotopia regolare*.



# Normalizzazione a invariante di isotopia ambiente

**Definizione.**  $F_D(a, z) := a^{-w(D)} \cdot L_D(a, z)$

**Prop.**  $F_K$  invariante di isotopia ambiente.

*Dimostrazione.*

- $w(D)$  invariante di *isotopia regolare*  $\Rightarrow a^{-w(D)}$  invariante di *isotopia regolare*.
- $F[\text{loop}] =$



# Normalizzazione a invariante di isotopia ambiente

**Definizione.**  $F_D(a, z) := a^{-w(D)} \cdot L_D(a, z)$

**Prop.**  $F_K$  invariante di isotopia ambiente.

*Dimostrazione.*

- $w(D)$  invariante di *isotopia regolare*  $\Rightarrow a^{-w(D)}$  invariante di *isotopia regolare*.
- $F[\overline{\mathcal{D}}] = a^{-w(\overline{\mathcal{D}})} \cdot L[\overline{\mathcal{D}}]$



# Normalizzazione a invariante di isotopia ambiente

**Definizione.**  $F_D(a, z) := a^{-w(D)} \cdot L_D(a, z)$

**Prop.**  $F_K$  invariante di isotopia ambiente.

*Dimostrazione.*

- $w(D)$  invariante di *isotopia regolare*  $\Rightarrow a^{-w(D)}$  invariante di *isotopia regolare*.
- $F[\overline{\mathcal{D}}] = a^{-w(\overline{\mathcal{D}})} \cdot L[\overline{\mathcal{D}}]$   $L[\overline{\mathcal{D}}] = aL[\mathcal{D}], \quad w(\overline{\mathcal{D}}) = w(\mathcal{D}) + 1$



# Normalizzazione a invariante di isotopia ambiente

**Definizione.**  $F_D(a, z) := a^{-w(D)} \cdot L_D(a, z)$

**Prop.**  $F_K$  invariante di isotopia ambiente.

*Dimostrazione.*

- $w(D)$  invariante di *isotopia regolare*  $\Rightarrow a^{-w(D)}$  invariante di *isotopia regolare*.
- $F[\overline{\vartheta}] = a^{-w(\overline{\vartheta})} \cdot L[\overline{\vartheta}]$   $L[\overline{\vartheta}] = aL[\vartheta], \quad w(\overline{\vartheta}) = w(\vartheta) + 1$   
 $= a^{-w(\vartheta)-1} \cdot aL[\vartheta]$



# Normalizzazione a invariante di isotopia ambiente

**Definizione.**  $F_D(a, z) := a^{-w(D)} \cdot L_D(a, z)$

**Prop.**  $F_K$  invariante di isotopia ambiente.

*Dimostrazione.*

- $w(D)$  invariante di isotopia regolare  $\Rightarrow a^{-w(D)}$  invariante di isotopia regolare.

$$\begin{aligned}
 \bullet \quad F[\overline{\vartheta}] &= a^{-w(\overline{\vartheta})} \cdot L[\overline{\vartheta}] & L[\overline{\vartheta}] &= aL[\vartheta], \quad w(\overline{\vartheta}) = w(\vartheta) + 1 \\
 &= a^{-w(\vartheta)-1} \cdot aL[\vartheta] \\
 &= a^{-w(\vartheta)} \cancel{a^{-1}} \cdot \cancel{a}L[\vartheta]
 \end{aligned}$$



# Normalizzazione a invariante di isotopia ambiente

**Definizione.**  $F_D(a, z) := a^{-w(D)} \cdot L_D(a, z)$

**Prop.**  $F_K$  invariante di isotopia ambiente.

*Dimostrazione.*

- $w(D)$  invariante di isotopia regolare  $\Rightarrow a^{-w(D)}$  invariante di isotopia regolare.

$$\begin{aligned}
 \bullet \quad F[\overline{\varnothing}] &= a^{-w(\overline{\varnothing})} \cdot L[\overline{\varnothing}] & L[\overline{\varnothing}] &= aL[\overline{\quad}], \quad w(\overline{\varnothing}) = w(\overline{\quad}) + 1 \\
 &= a^{-w(\overline{\quad})-1} \cdot aL[\overline{\quad}] \\
 &= a^{-w(\overline{\quad})} \cdot aL[\overline{\quad}] \\
 &= a^{-w(\overline{\quad})} \cdot L[\overline{\quad}]
 \end{aligned}$$



# Normalizzazione a invariante di isotopia ambiente

**Definizione.**  $F_D(a, z) := a^{-w(D)} \cdot L_D(a, z)$

**Prop.**  $F_K$  invariante di isotopia ambiente.

*Dimostrazione.*

- $w(D)$  invariante di isotopia regolare  $\Rightarrow a^{-w(D)}$  invariante di isotopia regolare.

$$\begin{aligned}
 \bullet \quad F[\overline{\varnothing}] &= a^{-w(\overline{\varnothing})} \cdot L[\overline{\varnothing}] & L[\overline{\varnothing}] &= aL[\varnothing], \quad w(\overline{\varnothing}) = w(\varnothing) + 1 \\
 &= a^{-w(\varnothing)-1} \cdot aL[\varnothing] \\
 &= a^{-w(\varnothing)} \cancel{a^{-1}} \cdot \cancel{a}L[\varnothing] \\
 &= a^{-w(\varnothing)} \cdot L[\varnothing] \\
 &= F[\varnothing]
 \end{aligned}$$



# Calcoli impliciti

Link  $L[\bigcirc \bigcirc]$



# Calcoli impliciti

$$\text{Link } L[\bigcirc \bigcirc]$$
$$(\text{figure-eight}, \text{figure-eight}, \text{figure-eight}, \text{figure-eight})$$



# Calcoli impliciti

Link  $L[\bigcirc \bigcirc]$

$$L[\text{figure-eight}] + L[\text{figure-eight}] = z \left( L[\text{two-circles}] + L[\text{figure-eight}] \right)$$



# Calcoli impliciti

Link  $L[\bigcirc \bigcirc]$

$$L[\text{figure 8}] + L[\text{figure 8}] = z \left( L[\text{figure 8}] + L[\text{figure 8}] \right)$$

$$\Rightarrow aL[\bigcirc] + a^{-1}L[\bigcirc] = z(\delta + L[\bigcirc])$$



# Calcoli impliciti

Link  $L[\bigcirc \bigcirc]$

$$L[\text{figure 8}] + L[\text{figure 8}] = z \left( L[\text{figure 8}] + L[\text{figure 8}] \right)$$

$$\Rightarrow aL[\bigcirc] + a^{-1}L[\bigcirc] = z(\delta + L[\bigcirc])$$

$$\Rightarrow a + a^{-1} = z(\delta + 1)$$



# Calcoli impliciti

Link  $L[\bigcirc \bigcirc]$

$$L[\text{link}] + L[\text{link}] = z(L[\text{link}] + L[\text{link}])$$

$$\Rightarrow aL[\bigcirc] + a^{-1}L[\bigcirc] = z(\delta + L[\bigcirc])$$

$$\Rightarrow a + a^{-1} = z(\delta + 1)$$

$$\Rightarrow \delta = \frac{a + 1/a}{z} - 1$$



# Calcoli impliciti

Link  $L[\bigcirc \bigcirc]$

$$L[\text{figure 1}] + L[\text{figure 2}] = z(L[\text{figure 3}] + L[\text{figure 4}])$$

$$\Rightarrow aL[\bigcirc] + a^{-1}L[\bigcirc] = z(\delta + L[\bigcirc])$$

$$\Rightarrow a + a^{-1} = z(\delta + 1)$$

$$\Rightarrow \delta = \frac{a + 1/a}{z} - 1$$

$$\leadsto L[K_1 \sqcup K_2] = \delta L[K_1]L[K_2]$$



# Calcoli impliciti

Link  $L[\bigcirc \bigcirc]$

$$L[\text{link}] + L[\text{link}] = z(L[\text{link}] + L[\text{link}])$$

$$\Rightarrow aL[\bigcirc] + a^{-1}L[\bigcirc] = z(\delta + L[\bigcirc])$$

$$\Rightarrow a + a^{-1} = z(\delta + 1)$$

$$\Rightarrow \delta = \frac{a + 1/a}{z} - 1$$

$$\rightsquigarrow L[K_1 \sqcup K_2] = \delta L[K_1]L[K_2]$$

Link di Hopf

$$L[\text{Hopf}] + L[\text{Hopf}] = z(L[\text{Hopf}] + L[\text{Hopf}])$$

$$\Rightarrow L[\text{Hopf}] + \delta = z(a + a^{-1})$$

$$\Rightarrow L[\text{Hopf}] = -(a + a^{-1})z^{-1} + 1 + (a + a^{-1})z$$

Nodo trifoglio

$$L[\text{trifoglio}] + L[\text{trifoglio}] = z(L[\text{trifoglio}] + L[\text{trifoglio}])$$

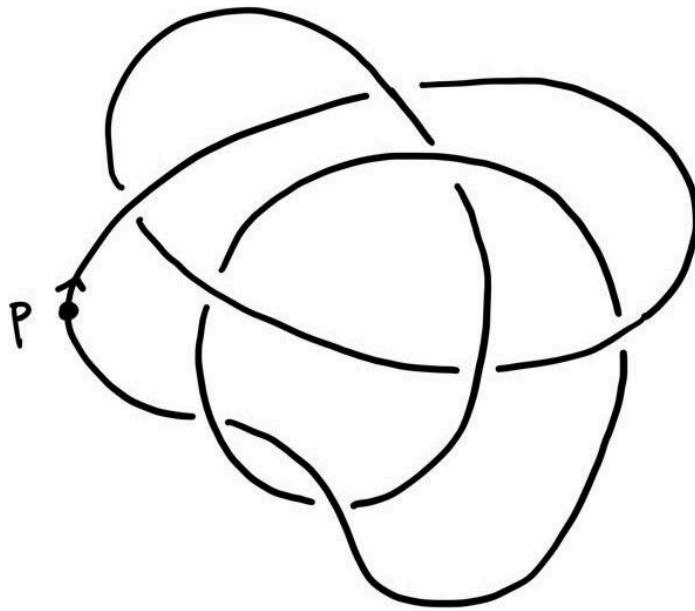
$$\Rightarrow L[\text{trifoglio}] + a = z(L[\text{Hopf}] + a^{-2})$$

$$\Rightarrow L[\text{trifoglio}] = -(2a + a^{-1}) + (1 + a^{-2})z + (a + a^{-1})z^2$$

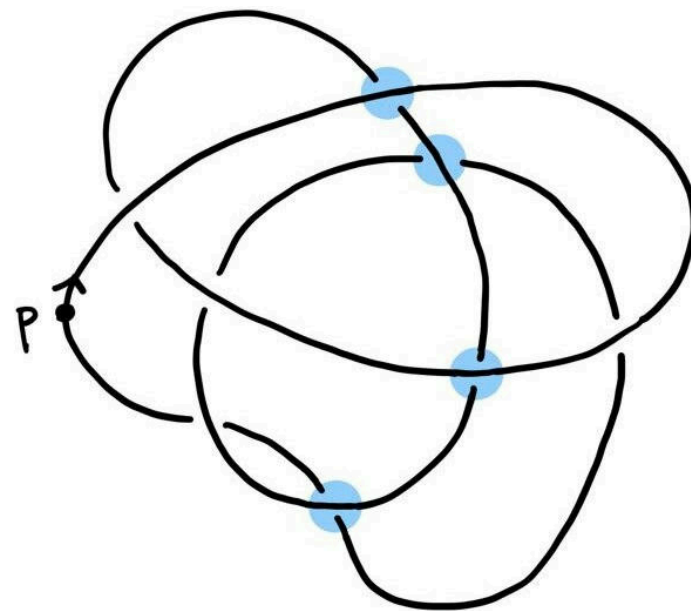


# Considerazioni preliminari

Il **nodo banale standard** (o in *forma discendente*) associato  $D$  è  $\hat{D}(\mathcal{U}, p)$ :



$D$

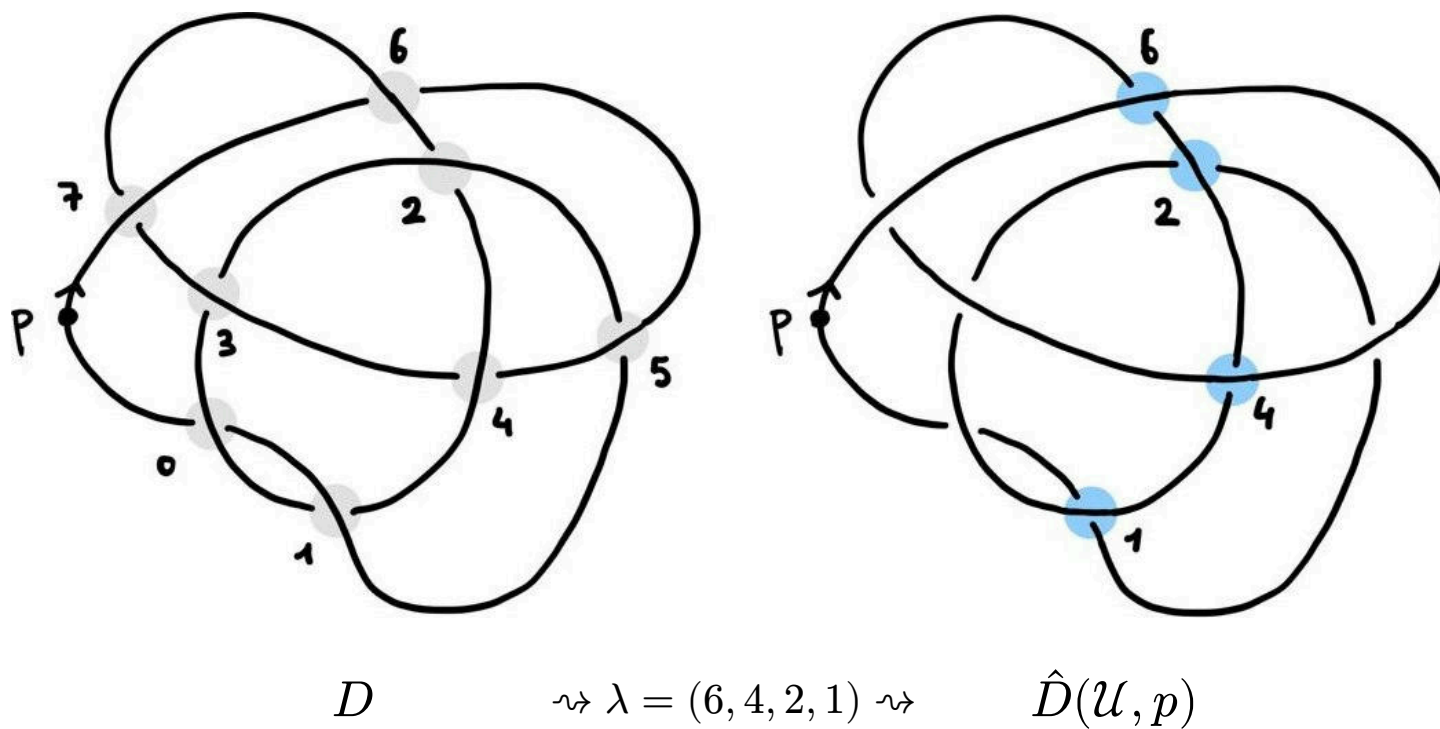


$\hat{D}(\mathcal{U}, p)$



# Considerazioni preliminari

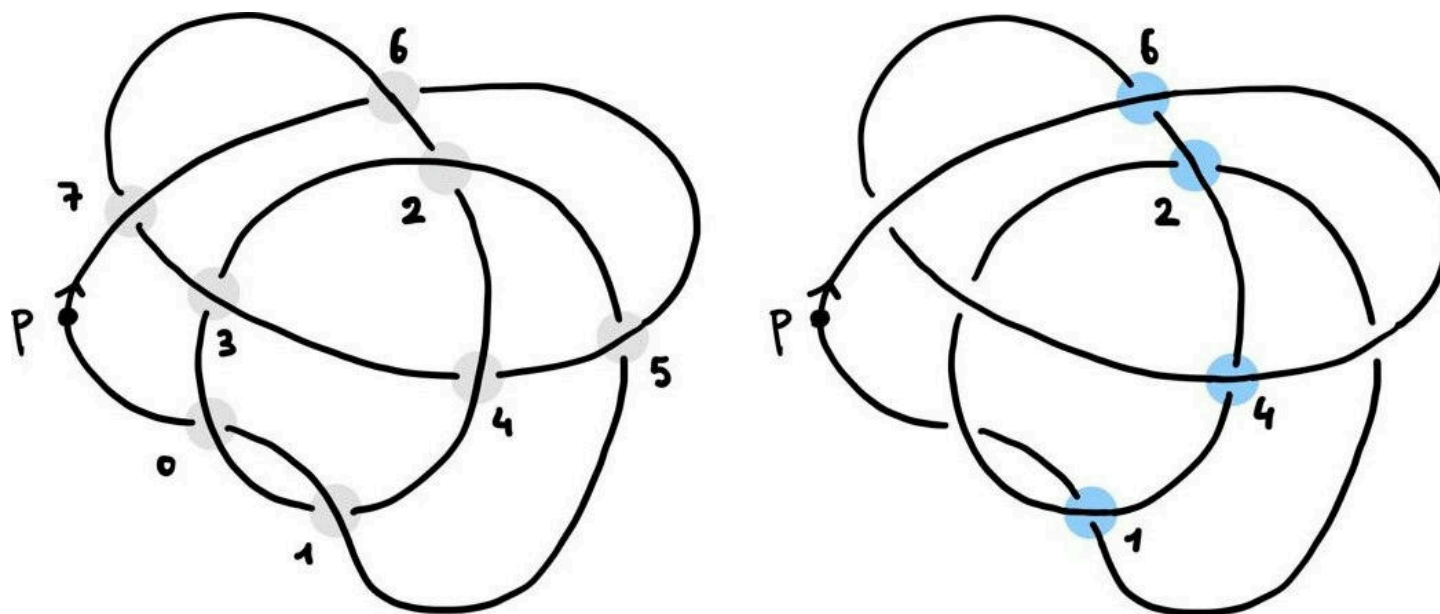
Il **nodo banale standard** (o in *forma discendente*) associato  $D$  è  $\hat{D}(\mathcal{U}, p)$ :





# Considerazioni preliminari

Il **nodo banale standard** (o in *forma discendente*) associato  $D$  è  $\hat{D}(\mathcal{U}, p)$ :



$$D \quad \rightsquigarrow \lambda = (6, 4, 2, 1) \rightsquigarrow \hat{D}(\mathcal{U}, p)$$

$$\hat{D}(p) = S_6 S_4 S_2 S_1 D$$



# Considerazioni preliminari

$D$  un diagramma di un nodo,  $i$  etichetta di uno degli incroci

$$\begin{array}{cccc}
 \begin{array}{c} i \\ \diagdown \diagup \\ \diagup \diagdown \end{array} & \begin{array}{c} i \\ \diagdown \diagup \\ \diagup \diagdown \end{array} & \begin{array}{c} i \\ \frown \\ \smile \end{array} & \begin{array}{c} i \\ \big) \big( \end{array} \\
 K & S_i K & E_i K & e_i K
 \end{array}$$



## Considerazioni preliminari

$p$  punto base direzionato,  $\lambda$  una sequenza di scambi che porta  $K$  a  $\hat{K}(p)$ :

$$L[K] + L[S_0 K] = z(L[E_0 K] + L[e_0 K])$$



## Considerazioni preliminari

$p$  punto base direzionato,  $\lambda$  una sequenza di scambi che porta  $K$  a  $\hat{K}(p)$ :

$$L[K] + L[S_0K] = z(L[E_0K] + L[e_0K])$$

$$L[S_0K] + L[S_1S_0K] = z(L[E_1S_0K] + L[e_1S_0K])$$



## Considerazioni preliminari

$p$  punto base direzionato,  $\lambda$  una sequenza di scambi che porta  $K$  a  $\hat{K}(p)$ :

$$L[K] + L[S_0K] = z(L[E_0K] + L[e_0K])$$

$$L[S_0K] + L[S_1S_0K] = z(L[E_1S_0K] + L[e_1S_0K])$$

$$L[S_1S_0K] + L[S_2S_1S_0K] = z(L[E_1S_1S_0K] + L[e_1S_1S_0K])$$

⋮



## Considerazioni preliminari

$p$  punto base direzionato,  $\lambda$  una sequenza di scambi che porta  $K$  a  $\hat{K}(p)$ :

$$L[K] + L[S_0 K] = z(L[E_0 K] + L[e_0 K])$$

$$L[S_0 K] + L[S_1 S_0 K] = z(L[E_1 S_0 K] + L[e_1 S_0 K])$$

$$L[S_1 S_0 K] + L[S_2 S_1 S_0 K] = z(L[E_1 S_1 S_0 K] + L[e_1 S_1 S_0 K])$$

⋮

$$L[S_{n-1} \cdots S_0 K] + L[\hat{K}(p)] = z(L[E_n S_{n-1} \cdots S_0 K] + L[e_n S_{n-1} \cdots S_0 K])$$



## Considerazioni preliminari

$p$  punto base direzionato,  $\lambda$  una sequenza di scambi che porta  $K$  a  $\hat{K}(p)$ :

$$L[K] + L[S_0 K] = z(L[E_0 K] + L[e_0 K])$$

$$-(L[S_0 K] + L[S_1 S_0 K]) = -z(L[E_1 S_0 K] + L[e_1 S_0 K])$$

$$L[S_1 S_0 K] + L[S_2 S_1 S_0 K] = z(L[E_1 S_1 S_0 K] + L[e_1 S_1 S_0 K])$$

$$\vdots$$

$$(-1)^n (L[S_{n-1} \cdots S_0 K] + L[\hat{K}(p)]) = (-1)^n z(L[E_n S_{n-1} \cdots S_0 K] + L[e_n S_{n-1} \cdots S_0 K])$$



## Considerazioni preliminari

$p$  punto base direzionato,  $\lambda$  una sequenza di scambi che porta  $K$  a  $\hat{K}(p)$ :

$$\begin{aligned}
 L[K] + \cancel{L[S_0 K]} &= z(L[E_0 K] + L[e_0 K]) \\
 -(\cancel{L[S_0 K]} + \cancel{L[S_1 S_0 K]}) &= -z(L[E_1 S_0 K] + L[e_1 S_0 K]) \\
 \cancel{L[S_1 S_0 K]} + \cancel{L[S_2 S_1 S_0 K]} &= z(L[E_1 S_1 S_0 K] + L[e_1 S_1 S_0 K]) \\
 &\vdots \\
 (-1)^n (\cancel{L[S_{n-1} \cdots S_0 K]} + L[\hat{K}(p)]) &= (-1)^n z(L[E_n S_{n-1} \cdots S_0 K] + L[e_n S_{n-1} \cdots S_0 K]) \\
 \Rightarrow L[K] + (-1)^n L[\hat{K}(p)] &= z \sum_{i=0}^n (-1)^i (L[E_i S_{i-1} \cdots S_0 K] + L[e_i S_{i-1} \cdots S_0 K])
 \end{aligned}$$



## Considerazioni preliminari

$p$  punto base direzionato,  $\lambda$  una sequenza di scambi che porta  $K$  a  $\hat{K}(p)$ :

$$\begin{aligned}
 L[K] + \cancel{L[S_0 K]} &= z(L[E_0 K] + L[e_0 K]) \\
 -(\cancel{L[S_0 K]} + \cancel{L[S_1 S_0 K]}) &= -z(L[E_1 S_0 K] + L[e_1 S_0 K]) \\
 \cancel{L[S_1 S_0 K]} + \cancel{L[S_2 S_1 S_0 K]} &= z(L[E_1 S_1 S_0 K] + L[e_1 S_1 S_0 K]) \\
 &\vdots \\
 (-1)^n (\cancel{L[S_{n-1} \cdots S_0 K]} + L[\hat{K}(p)]) &= (-1)^n z(L[E_n S_{n-1} \cdots S_0 K] + L[e_n S_{n-1} \cdots S_0 K]) \\
 \\
 \Rightarrow L[K] + (-1)^n L[\hat{K}(p)] &= z \underbrace{\sum_{i=0}^n (-1)^i (L[E_i S_{i-1} \cdots S_0 K] + L[e_i S_{i-1} \cdots S_0 K])}_{\text{Notazione: } \sum_D (\lambda(p))}
 \end{aligned}$$



## Considerazioni preliminari

$p$  punto base direzionato,  $\lambda$  una sequenza di scambi che porta  $K$  a  $\hat{K}(p)$ :

$$\begin{aligned}
 L[K] + \cancel{L[S_0 K]} &= z(L[E_0 K] + L[e_0 K]) \\
 -(\cancel{L[S_0 K]} + \cancel{L[S_1 S_0 K]}) &= -z(L[E_1 S_0 K] + L[e_1 S_0 K]) \\
 \cancel{L[S_1 S_0 K]} + \cancel{L[S_2 S_1 S_0 K]} &= z(L[E_1 S_1 S_0 K] + L[e_1 S_1 S_0 K]) \\
 &\vdots \\
 (-1)^n (\cancel{L[S_{n-1} \cdots S_0 K]} + L[\hat{K}(p)]) &= (-1)^n z(L[E_n S_{n-1} \cdots S_0 K] + L[e_n S_{n-1} \cdots S_0 K]) \\
 \Rightarrow L[K] + (-1)^n L[\hat{K}(p)] &= z \sum_D (\lambda)
 \end{aligned}$$



## Considerazioni preliminari

$p$  punto base direzionato,  $\lambda$  una sequenza di scambi che porta  $K$  a  $\hat{K}(p)$ :

$$L[K] + \cancel{L[S_0 K]} = z(L[E_0 K] + L[e_0 K])$$

$$-\cancel{(L[S_0 K] + L[S_1 S_0 K])} = -z(L[E_1 S_0 K] + L[e_1 S_0 K])$$

$$\cancel{L[S_1 S_0 K]} + \cancel{L[S_2 S_1 S_0 K]} = z(L[E_1 S_1 S_0 K] + L[e_1 S_1 S_0 K])$$

⋮

$$(-1)^n (\cancel{L[S_{n-1} \cdots S_0 K]} + L[\hat{K}(p)]) = (-1)^n z(L[E_n S_{n-1} \cdots S_0 K] + L[e_n S_{n-1} \cdots S_0 K])$$

$$\Rightarrow L[K] = (-1)^{n+1} L[\hat{K}(p)] + z \sum_D (\lambda)$$



## Considerazioni preliminari

$p$  punto base direzionato,  $\lambda$  una sequenza di scambi che porta  $K$  a  $\hat{K}(p)$ :

$$\begin{aligned}
 L[K] + \cancel{L[S_0 K]} &= z(L[E_0 K] + L[e_0 K]) \\
 -(\cancel{L[S_0 K]} + \cancel{L[S_1 S_0 K]}) &= -z(L[E_1 S_0 K] + L[e_1 S_0 K]) \\
 \cancel{L[S_1 S_0 K]} + \cancel{L[S_2 S_1 S_0 K]} &= z(L[E_1 S_1 S_0 K] + L[e_1 S_1 S_0 K]) \\
 &\vdots \\
 (-1)^n (\cancel{L[S_{n-1} \cdots S_0 K]} + L[\hat{K}(p)]) &= (-1)^n z(L[E_n S_{n-1} \cdots S_0 K] + L[e_n S_{n-1} \cdots S_0 K]) \\
 \Rightarrow L[K] &= (-1)^{|\lambda(p)|+1} L[\hat{K}(p)] + z \sum_D (\lambda)
 \end{aligned}$$



## Considerazioni preliminari

$p$  punto base direzionato,  $\lambda$  una sequenza di scambi che porta  $K$  a  $\hat{K}(p)$ :

$$L[K] + \cancel{L[S_0 K]} = z(L[E_0 K] + L[e_0 K])$$

$$-\cancel{(L[S_0 K] + L[S_1 S_0 K])} = -z(L[E_1 S_0 K] + L[e_1 S_0 K])$$

$$\cancel{L[S_1 S_0 K]} + \cancel{L[S_2 S_1 S_0 K]} = z(L[E_1 S_1 S_0 K] + L[e_1 S_1 S_0 K])$$

⋮

$$(-1)^n (\cancel{L[S_{n-1} \cdots S_0 K]} + L[\hat{K}(p)]) = (-1)^n z(L[E_n S_{n-1} \cdots S_0 K] + L[e_n S_{n-1} \cdots S_0 K])$$

$$\Rightarrow L[K] = (-1)^{|\lambda(p)|+1} L[\hat{K}(p)] + z \sum_D (\lambda)$$



## Definizione induttiva

Definiamo ora il polinomio  $L_K(a, z)$  induttivamente come segue:

- i) Se  $K$  è in forma discendente:  $L_K(a, z) := a^{w(K)}$
- ii) Se  $K = K_1 \cup K_2$ :  $L(K_1 \cup K_2) := \delta L(K_1)L(K_2)$  (con  $\delta := \frac{a+1/a}{z} - 1$ )
- iii) Altrimenti  $K = K_1 \cup \dots \cup K_n$ :

$$\text{a) Se } n > 1: L_K(a, z) := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left( (-1)^{|\lambda(p_i)|+1} \delta L_{K_i} L_{K-K_i} + z \sum_K (\lambda(p_i)) \right)$$

$$\text{b) Se } n = 1: L_K(a, z) := (-1)^{|\lambda(p)|+1} L[\hat{K}(p)] + z \sum_K (\lambda(p))$$



## Definizione induttiva

Definiamo ora il polinomio  $L_K(a, z)$  induttivamente come segue:

- i) Se  $K$  è in forma discendente:  $L_K(a, z) := a^{w(K)}$
- ii) Se  $K = K_1 \cup K_2$ :  $L(K_1 \cup K_2) := \delta L(K_1)L(K_2)$  (con  $\delta := \frac{a+1/a}{z} - 1$ )
- iii) Altrimenti  $K = K_1 \cup \dots \cup K_n$ :

$$\text{a) Se } n > 1: L_K(a, z) := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left( (-1)^{|\lambda(p_i)|+1} \delta L_{K_i} L_{K-K_i} + z \sum_K (\lambda(p_i)) \right)$$

$$\text{b) Se } n = 1: L_K(a, z) := (-1)^{|\lambda(p)|+1} L[\hat{K}(p)] + z \sum_D (\lambda(p))$$



## Definizione induttiva

Definiamo ora il polinomio  $L_K(a, z)$  induttivamente come segue:


- i) Se  $K$  è in forma discendente:  $L_K(a, z) := a^{w(K)}$
- ii) Se  $K = K_1 \cup K_2$ :  $L(K_1 \cup K_2) := \delta L(K_1)L(K_2)$  (con  $\delta := \frac{a+1/a}{z} - 1$ )
- iii) Altrimenti  $K = K_1 \cup \dots \cup K_n$ :

$$\text{a) Se } n > 1: L_K(a, z) := \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^n \sum_{q=p_i, \bar{p}_i} \left( (-1)^{|\lambda(q)|+1} \delta L_{K_i} L_{K-K_i} + z \sum_K (\lambda(q)) \right)$$

$$\text{b) Se } n = 1: L_K(a, z) := \frac{1}{2} \sum_{q=p, \bar{p}} \left( (-1)^{|\lambda(q)|+1} L_{\widehat{K}(q)} + z \sum_K (\lambda(q)) \right)$$



# Ipotesi induttiva

**Ipotesi induttiva.** Dimostreremo induttivamente le seguenti proprietà: per ogni diagramma di link  $K$  con  $< N$  incroci e per diagrammi contenenti  con  $< N$  incroci:

- a)  $L_K$  è ben definito (non dipende dalla scelta di punto base).
- b)  $L_K$  verifica gli assiomi:
  - $L[K] + L[S_i K] = z(L[e_i K] + L[E_i K])$
  - $L[\text{crossing}] = aL[\text{smooth}]$ ,  $L[\text{crossing}] = a^{-1}L[\text{smooth}]$
- c)  $L_K$  è invariante per mosse di tipo II e III che non aumentano il numero di incroci.
- d) Per certi diagrammi vale  $L_K = a^{w(K)}$



# Dimostrazione buona definizione

*Dimostrazione.*

- a)  $L_K$  è ben definito (non dipende dalla scelta di punto base)
  - Invarianza  $\sum_K(\lambda)$  per rotazioni
  - Caso più componenti
  - Caso una sola componente
    - Splice di un nodo in forma discendente
    - Assiomi di  $L_K$  per nodi in forma discendente
- b)  $L_K$  verifica gli assiomi
- c)  $L_K$  è invariante per mosse di tipo II e III che non aumentano il numero di incroci
- d) Per certi diagrammi vale  $L_K = a^{w(K)}$



# Indice

Teoria dei Nodi

Polinomio di Kauffman

**Laboratorio Computazionale**



# Implementazione in Python

Implementazioni esistenti:

- **KnotScape**: scritto in C, degli anni ~1990.
- **KnotTheory**: ultimo aggiornamento ~2010, per Mathematica.



# Implementazione in Python

Implementazioni esistenti:

- **KnotScape**: scritto in C, degli anni ~1990.
- **KnotTheory**: ultimo aggiornamento ~2010, per Mathematica.

Per il progetto di Lab. Comp. abbiamo scritto una **nuova implementazione** in *Python* open source:

- Rappresentazione di nodi attraverso **codici PD** e **SG**.
- Algoritmo per il calcolo di  $L_K$  e  $F_K$ .



# Implementazione in Python

Implementazioni esistenti:

- **KnotScape**: scritto in C, degli anni ~1990.
- **KnotTheory**: ultimo aggiornamento ~2010, per Mathematica.

Per il progetto di Lab. Comp. abbiamo scritto una **nuova implementazione** in *Python* open source:

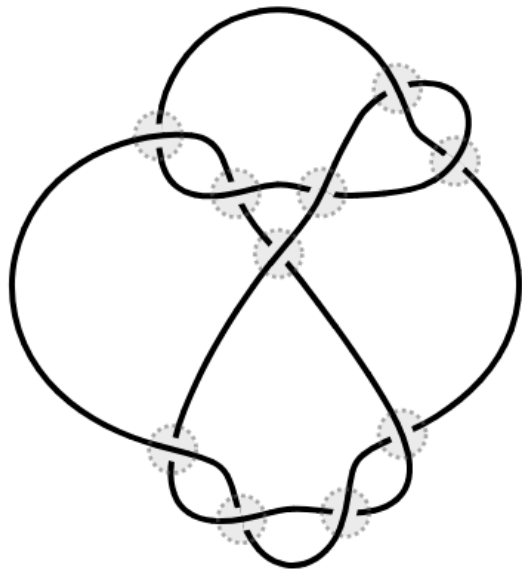
- Rappresentazione di nodi attraverso **codici PD** e **SG**.
- Algoritmo per il calcolo di  $L_K$  e  $F_K$ .
- Verifica di tutti i polinomi contenuti nel **database di KnotInfo**.
- *Trovato un errore nel nodo  $10_{125}$ : è presente  $F[m(10_{125})]$  invece di  $F[10_{125}]$  ovvero  $F[10_{125}](1/a, z)$ .*



# Implementazione in Python

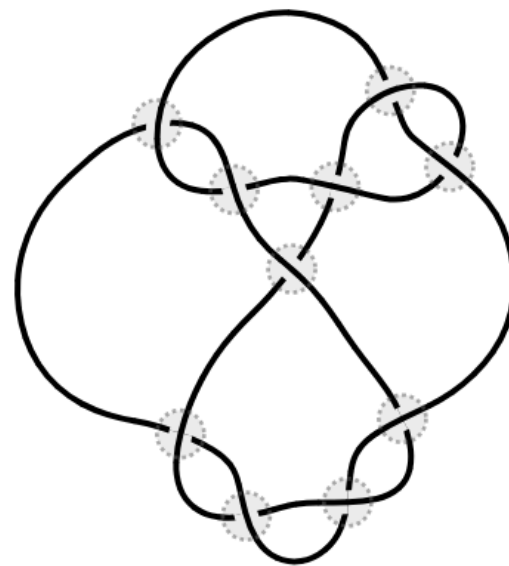
## Polinomio corretto

$$\begin{aligned}
 F[10_{125}] = & z^8 \left( \frac{1}{a^2} + 1 \right) + z^7 \left( a + \frac{2}{a} + \frac{1}{a^3} \right) + z^6 \left( -6 - \frac{6}{a^2} \right) \\
 & + z^5 \left( -5a - \frac{11}{a} - \frac{6}{a^3} \right) + z^4 \left( 2a^2 + 13 + \frac{11}{a^2} \right) \\
 & + z^3 \left( a^3 + 8a + \frac{17}{a} + \frac{10}{a^3} \right) + z^2 \left( a^4 - 6a^2 - 15 - \frac{8}{a^2} \right) \\
 & + z \left( a^5 - a^3 - 6a - \frac{8}{a} - \frac{4}{a^3} \right) + 3a^2 + 7 + \frac{3}{a^2}
 \end{aligned}$$



## Polinomio in KnotInfo

$$\begin{aligned}
 F[m(10_{125})] = & z^8(a^2 + 1) + z^7 \left( a^3 + 2a + \frac{1}{a} \right) + z^6(-6a^2 - 6) \\
 & + z^5 \left( -6a^3 - 11a - \frac{5}{a} \right) + z^4 \left( 11a^2 + 13 + \frac{2}{a^2} \right) \\
 & + z^3 \left( 10a^3 + 17a + \frac{8}{a} + \frac{1}{a^3} \right) + z^2 \left( -8a^2 - 15 - \frac{6}{a^2} + \frac{1}{a^4} \right) \\
 & + z \left( -4a^3 - 8a - \frac{6}{a} - \frac{1}{a^3} + \frac{1}{a^5} \right) + 3a^2 + 7 + \frac{3}{a^2}
 \end{aligned}$$





Fine

**Grazie per l'attenzione**