



UNIVERSITÀ DI PISA

Dipartimento di Matematica
Corso di Laurea Triennale in Matematica

Tesi di Laurea

Il polinomio di Kauffman: un invariante di isotopia regolare

Relatore:
Prof. Paolo Lisca

Candidato:
Antonio De Lucreziis

Anno Accademico 2024/2025

Abstract

In questa tesi tratteremo del polinomio di Kauffman, un invariante di nodi e link di isotopia regolare. Introduciamo dei risultati di fondazione della teoria dei nodi per definire l'isotopia regolare. Infine vedremo la dimostrazione della buona definizione del polinomio di Kauffman a partire dalla forma assiomatica. Per il progetto di Laboratorio Computazionale abbiamo implementato in Python questo polinomio e verificato tutti i valori presenti nel database di KnotInfo e trovato un errore nel calcolo del nodo 10_{125} .

Indice

1. Introduzione	3
1.1. Introduzione alla Teoria dei Nodi	3
1.2. Proiezioni e Diagrammi	6
1.3. Operazioni su Diagrammi	8
2. Isotopia Regolare	9
2.1. Writhe	10
2.2. Da isotopia regolare ad ambiente	13
3. Il Polinomio di Kauffman	14
3.1. Definizione assiomatica	15
3.2. Alcune proprietà del polinomio di Kauffman	15
3.3. Strumenti Forma Induttiva	18
3.4. Forma Induttiva	19
3.5. Dimostrazione buona definizione	22
4. Bibliografia	26

Capitolo 1

Introduzione

1.1. Introduzione alla Teoria dei Nodi

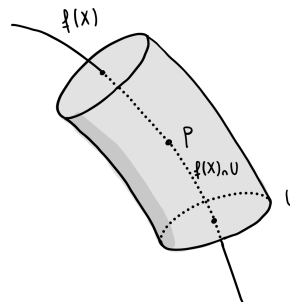
Ora introdurremo alcuni risultati fondamentali di teoria dei nodi. Vedremo le definizioni di nodo e link ed alcuni risultati di fondazione che ci serviranno per poter parlare ad esempio dei diagrammi planari e dell'isotopia regolare.

Definizione. Dati X, Y spazi topologici, $f : X \rightarrow Y$ continua si dice **embedding** se X è omeomorfo a $f(X) \subset Y$ con la topologia di sottospazio indotta da Y .

Fatto. Dati X, Y spazi topologici con X compatto, Y di Hausdorff e data un'applicazione continua $f : X \rightarrow Y$ allora f è un embedding $\Leftrightarrow$ è iniettiva.

Definizione. Dato un embedding $f : X \rightarrow Y$, un punto $p \in X$ allora f si dice **localmente piatto** in p se $\exists U \subset \mathbb{R}^3$ intorno di p , tale che

$$\begin{aligned} U &\approx \mathbb{D}^2 \times [0, 1] \\ U \cap f(X) &\Leftrightarrow \{0\} \times [0, 1] \end{aligned}$$



inoltre f si dice embedding **localmente piatto** se lo è in ogni punto di X .

Definizione. Un **nodo tame** è un sottoinsieme $K \subset \mathbb{R}^3$ per cui esiste un embedding $f : \mathbb{S}^1 \hookrightarrow \mathbb{R}^3$ localmente piatto con $K = f(\mathbb{S}^1)$. In questo caso f è anche detto **embedding tame**.

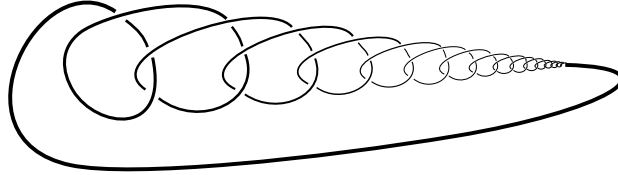


FIGURE 1. Un esempio di nodo non tame

Esistono anche nodi non tame come quello riportato nella figura precedente [1], ma d'ora in avanti considereremo solo nodi tame.

Definizione. Due nodi $K_0, K_1 \subset \mathbb{R}^3$ sono **equivalenti** se esiste un'**isotopia ambiente** H che porta uno nell'altro, ovvero esiste $H : \mathbb{R}^3 \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$ applicazione continua, tale che

- $\forall t \in [0, 1], H(\cdot, t)$ è un omeomorfismo

e ponendo $H_t(x) := H(x, t)$ si ha

- $H_0 = \text{id}_{\mathbb{R}^3}$
- $H_1(K_0) = K_1$

Inoltre se due nodi sono equivalenti allora vale che $\mathbb{R}^3 \setminus K_0 \approx \mathbb{R}^3 \setminus K_1$.

Spesso serve fare manipolazioni direttamente sui nodi o sui diagrammi e lavorare con gli embedding $\mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{R}^3$ non è molto comodo da un punto di vista formale e pratico, per questo motivo introduciamo i *nodi poligonali* che ci permettono di dare una formalizzazione alternativa dei nodi tame più operativa.

Definizione. Un **nodo poligonale** è un nodo equivalente ad un'unione finita di segmenti lineari.

Fatto – Crowell [2]. Dato un nodo $K \subset \mathbb{R}^3$, K è tame $\Leftrightarrow K$ è poligonale.

Definizione. Il **nodo banale** è la classe di equivalenza del bordo di un triangolo equilatero.

Passiamo ora al caso in cui abbiamo un nodo con più di una componente

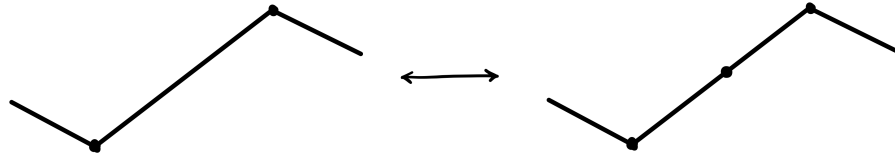
Definizione. $L \subset \mathbb{R}^3$ è detto **link** se $\exists$ embedding $f : \mathbb{S}^1 \cup \dots \cup \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{R}^3$ local-mente piatto con immagine L .

Possiamo generalizzare tutte le definizioni che diamo per i nodi ai link, sostituendo $\mathbb{S}^1$ con $\mathbb{S}^1 \cup \dots \cup \mathbb{S}^1$ e apportando le giuste modifiche.

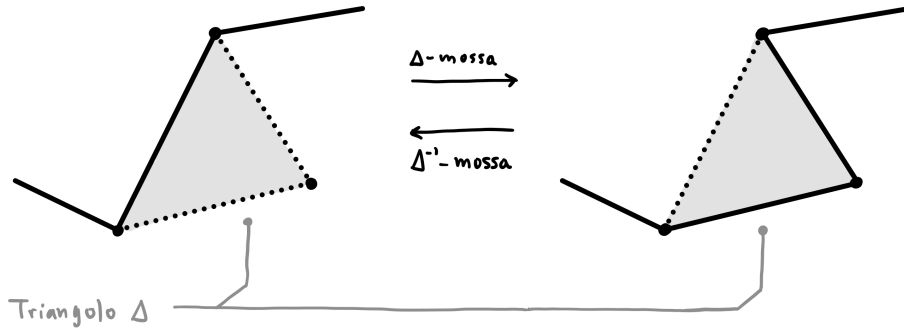
Introduciamo ora il concetto di equivalenza combinatoria di link poligonal in $\mathbb{R}^3$; questo è il primo passo che ci permetterà di descrivere l'equivalenza per isotopia ambiente tra nodi attraverso una sequenza finita di mosse.

Definizione. Due link L_1, L_2 sono **combinatorialmente equivalenti** se si ottengono uno dall'altro tramite un numero finito delle seguenti mosse:

- i) Aggiunta/rimozione di vertici



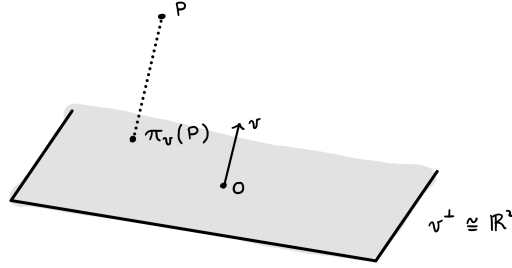
- ii) Dato un triangolo piano $\Delta \subset \mathbb{R}^3$ tale che $\Delta \cap L$ sia un lato di Δ ed un segmento di L allora una Δ -mossa è la seguente



Fatto. Due link poligonal $L_1, L_2 \subset \mathbb{R}^3$ sono equivalenti $\Leftrightarrow$ sono combinatorialmente equivalenti.

1.2. Proiezioni e Diagrammi

Data una direzione $v \in \mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$, possiamo definire $\pi_v : \mathbb{R}^3 \rightarrow v^\perp$ proiezione sul piano ortogonale a v come nella seguente figura:



Per formalizzare il concetto di diagramma di un nodo introdurremo il concetto di proiezione regolare, ovvero una proiezione in cui i punti di intersezione tra le immagini dei segmenti di L sono solamente gli incroci del nodo (e senza segmenti paralleli alla direzione di proiezione).

Definizione. Sia $L \subset \mathbb{R}^3$ un link, $v \in \mathbb{S}^2$ una direzione e $\pi_v : \mathbb{R}^3 \rightarrow v^\perp$ la proiezione su $v^\perp$ come in precedenza. Allora un punto $x \in \pi(L) \subset v^\perp$ si dice

- **regolare** se $|\pi^{-1}(x)| = 1$
- **singolare** se $|\pi^{-1}(x)| > 1$
- **doppio** se $|\pi^{-1}(x)| = 2$

Fatto. Dato un link poligonale $L \subset \mathbb{R}^3$, esiste un aperto denso $U \subset \mathbb{S}^2$ tale che $\forall v \in U$ si ha che

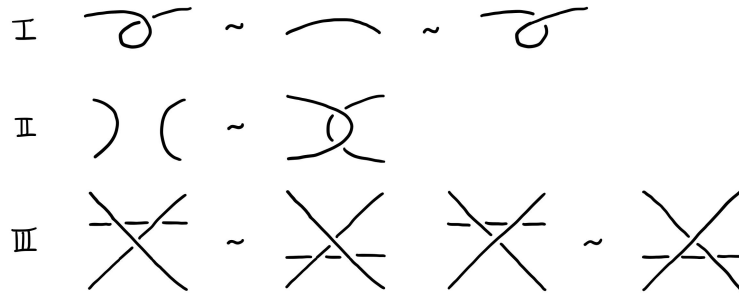
- i) L non ha segmenti paralleli a v .
- ii) Se $x \in \pi_v(L)$ è singolare allora
 - $\pi_v^{-1}(x)$ non contiene vertici di L
 - x è un punto doppio
 - x è un punto di intersezione trasversa delle immagini di due segmenti

Quindi dato $L \subset \mathbb{R}^3$ link poligonale, esiste una proiezione regolare $\pi(L) \subset \mathbb{R}^2$ con un numero finito di punti singolari, ciascuno dei quali è un punto doppio e di intersezione trasversa. Ognuno di questi punti doppi viene detto **incrocio**.

Definizione. Un **diagramma** $D \subset \mathbb{R}^2$ di un link $L \subset \mathbb{R}^3$ è l'immagine di L attraverso una proiezione regolare decorata con l'informazione sopra/sotto ad ogni incrocio.

Fatto. Due link con stesso diagramma sono equivalenti.

Definizione. Le mosse I, II, III (e le loro inverse) sono dette **mosse di Reidemeister**.



Teorema (di Reidemeister) 1.1. Due diagrammi di link equivalenti sono collegati da una successione finita di isotopie planari e mosse di Reidemeister.

Il modo principale in cui utilizzeremo il teorema di Reidemeister è attraverso la seguente proprietà. Indichiamo con $\mathcal{D}$ l'insieme dei diagrammi di nodi e link.

Proposizione 1.1. Data una funzione $\varphi : \mathcal{D} \rightarrow S$ con S un insieme (eventualmente con una qualche struttura come quella di anello) con la proprietà che $D \sim D' \Rightarrow \varphi(D) = \varphi(D')$ allora se $\varphi(D) \neq \varphi(D') \Rightarrow D \approx D'$, in particolare se D, D' sono diagrammi per K, K' allora $K \approx K'$.

Dimostrazione. È semplicemente la forma contronominale del teorema di Reidemeister. $\square$

Funzioni con la stessa proprietà di φ sono quindi invarianti di nodi o link per isotopia ambiente e ci danno un modo di distinguerli. Più avanti vedremo ad esempio il polinomio $F_K(a, z) : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{Z}[a, a^{-1}, z, z^{-1}]$ che risulterà essere un invariante di isotopia ambiente per link orientati.

Come abbiamo generalizzato da nodi a link possiamo ripetere tutto anche aggiungendo un'orientazione e studiare **nodi e link orientati** ed abbiamo anche una versione orientata del teorema di Reidemeister.

1.3. Operazioni su Diagrammi

Definizione. Dato un link $L \subset \mathbb{R}^3$ possiamo definire

- Il **mirror** $m(L) := \rho(L)$ dove $\rho : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ è la riflessione rispetto al piano di proiezione. In particolare dato un diagramma, il suo mirror è lo stesso diagramma con tutte le informazioni sopra/sotto scambiate.

inoltre, se diamo anche un'orientazione ad L possiamo definire

- Il **reverse** $r(L)$, in cui prendiamo l'orientazione opposta su ogni componente.
- L'**inverso** $-L := m(r(L)) = r(m(L))$.

Definizione. Sia $K \subset \mathbb{R}^3$, se K non è equivalente a $m(K)$ allora diciamo che K è **chirale**, altrimenti è detto **anfichirale**.

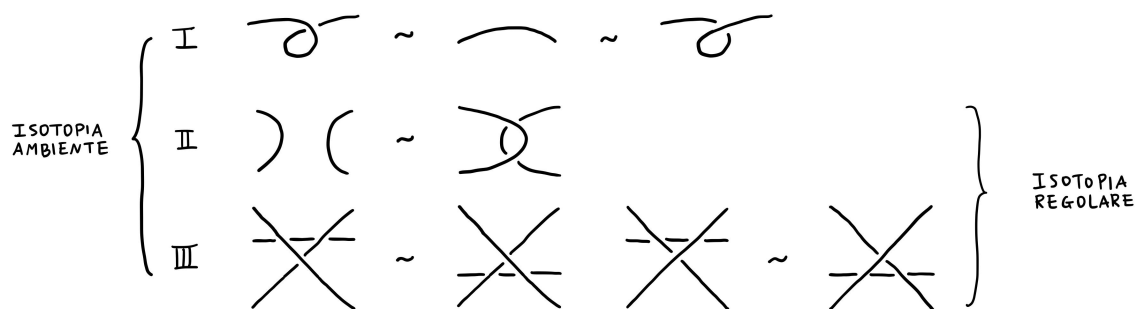
Capitolo 2

Isotopia Regolare

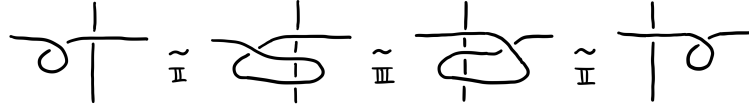
Il teorema di Reidemeister ci dice che due nodi sono equivalenti a meno di isotopia ambiente se e solo se lo sono anche dei loro diagrammi a meno di isotopie planari e mosse I, II e III.

Possiamo chiederci cosa succede se ci restringiamo all'equivalenza generata solo dalle isotopie planari e dalle mosse II e III, questo ci dà una nuova equivalenza tra nodi più stringente dell'isotopia ambiente.

Definizione. Due diagrammi D_1, D_2 di nodi o link si dicono equivalenti a meno di **isotopia regolare** se e solo se sono equivalenti a meno di isotopie planari e mosse II e III di Reidemeister.



Una prima cosa che possiamo notare è che tutte le mosse di tipo I, quelle che introducono quelli che chiameremo **riccioli**, possono passare sopra o sotto altri fili senza problemi applicando le seguenti mosse



Quindi i riccioli possono essere spostati liberamente e non ci impediscono di applicare mosse di tipo II o III. In particolare questo ci permette anche di “fattorizzare” tutti i riccioli di una componente in modo che siano tutti vicini.

Un'altra osservazione sul comportamento dell'isotopia regolare rispetto alle mosse di tipo I è la seguente. Quando abbiamo una coppia di riccioli con segni opposti abbiamo la seguente proprietà di cancellazione detto *trucco di Whitney*.



Un'altra osservazione importante che possiamo fare quando si parla di isotopia regolare è che quest'ultima è equivalente all'isotopia di *link con framing*¹. In particolare l'isotopia regolare preserva il framing del nodo.

Questo sarà importante più avanti quando vedremo invarianti come il polinomio F_K che risulteranno essere invarianti per isotopia ambiente. Nel caso del polinomio F_K , il calcolo va fatto fissando un particolare diagramma del link. È tutt'ora un problema aperto dare una definizione “intrinseca” di F_K senza usare diagrammi.

2.1. Writhe

Vediamo ora un primo invariante di isotopia regolare per link orientati, per prima cosa definiamo il segno di un incrocio.

¹Nel caso di nodi come embedding da $\mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^3$, un **nodo con framing** è un embedding di $\mathbb{D}^2 \times \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^3$. Il **framing** del nodo è l'immagine di $I \times \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^3$. Un nodo con framing può essere visto come una banda embedded dove il framing è il numero di twist con segno.

Definizione. Dato un incrocio del diagramma di un link orientato ci possono essere due casi in base alla direzione in cui il filo sotto si trova rispetto a quello sopra. Definiamo il **segno** di un incrocio in base a questi casi come segue

$$\varepsilon\left(\begin{array}{c} \nearrow \\ \searrow \end{array}\right) = +1 \quad \varepsilon\left(\begin{array}{c} \nwarrow \\ \swarrow \end{array}\right) = -1$$

Definizione. Dato K link orientato, il **writhe** $w(K)$ o numero di avvolgimento è dato dalla somma dei segni dei suoi incroci

$$w(K) := \sum_{c \text{ incrocio}} \varepsilon(c)$$

Proposizione 2.2. Se K è il diagramma di un nodo, il writhe non dipende dall'orientazione.

Dimostrazione. Basta ricondurci a controllare cosa succede quando applichiamo il cambio dell'orientazione in ε :

$$\begin{aligned} \varepsilon\left(\begin{array}{c} \nwarrow \\ \swarrow \end{array}\right) &= \varepsilon\left(\begin{array}{c} \nearrow \\ \searrow \end{array}\right) = +1 \\ \varepsilon\left(\begin{array}{c} \nearrow \\ \swarrow \end{array}\right) &= \varepsilon\left(\begin{array}{c} \nwarrow \\ \searrow \end{array}\right) = -1 \end{aligned}$$

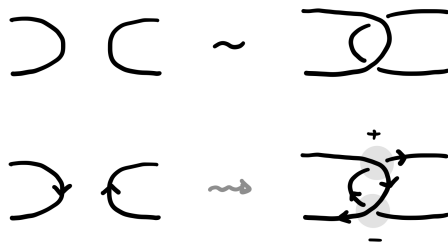
Nel primo caso invertendo le due frecce il filo che passa sotto va sempre verso sinistra rispetto a quello sopra quindi il segno rimane invariato, il secondo caso è analogo. $\square$

Questo risultato può essere generalizzato a diagrammi di link con l'accortezza di invertire l'orientazione di tutte le componenti (o anche solamente tutte quelle che appartengono ad una sola componente connessa della sua ombra planare).

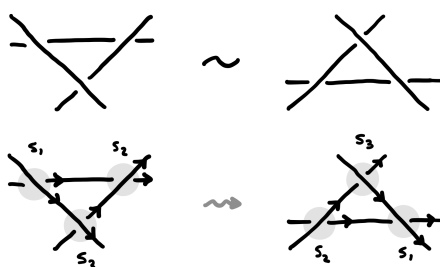
Proposizione 2.3. Il writhe è un invariante di isotopia regolare, ovvero se K_1, K_2 sono diagrammi di link equivalenti a meno di isotopia regolare allora $w(K_1) = w(K_2)$.

Dimostrazione. Controlliamo cosa succede nel caso delle mosse di tipo II e III:

- Nel caso della mossa II si può vedere che indipendentemente dalle orientazioni dei due fili, quando portiamo uno sopra l'altro compaiono sempre due incroci con segni opposti quindi per additività del writhe la somma totale non cambia.



- Per quanto riguarda la mossa III, il numero di incroci non cambia quindi basta controllare che la somma sia la stessa



Come possiamo notare nel caso mostrato in figura ciò che accade è che stiamo solo spostando e scambiando alcuni degli incroci tra loro. In particolare possiamo identificare ogni incrocio come l'intersezione di due delle tre rette, dopo aver applicato la mossa III le rette si saranno spostate ma le orientazioni saranno sempre le stesse e quindi anche i segni degli incroci.

Inoltre notiamo che il writhe non è influenzato dalle isotopie planari quindi questo conclude la dimostrazione. $\square$

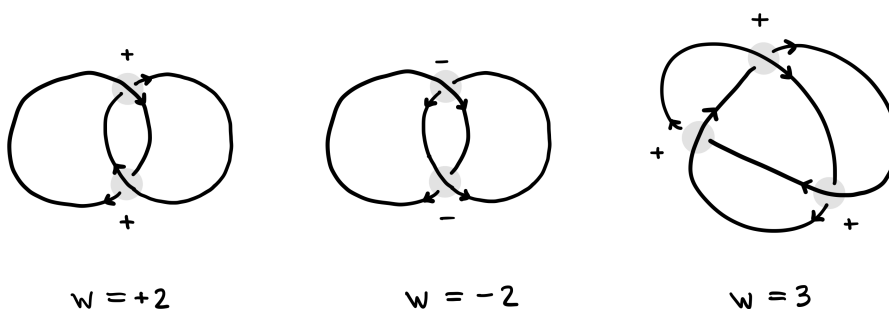


FIGURE 9. Esempi di calcolo del writhe

2.2. Da isotopia regolare ad ambiente

Un primo fatto generale che possiamo vedere è che, dato un invariante di isotopia regolare per diagrammi che si comporta “bene” rispetto alle mosse di tipo I, possiamo costruire un invariante di isotopia ambiente per link aggiungendo un fattore di correzione dato dal writhe.

Proposizione 2.4. Sia R un anello, $a \in R$ un elemento invertibile e K un link orientato, $\mathcal{D}$ l'insieme dei diagrammi di link orientati, allora se $L : \mathcal{D} \rightarrow R$ è un invariante di isotopia regolare tale che

$$L(\overline{\bigcirc}) = aL(\frown) \quad L(\overline{\bigcirc}) = a^{-1}L(\frown)$$

allora $F(K) := a^{-w(K)}L(K)$ è un invariante di isotopia ambiente.

Osservazione. In questo caso la notazione “ $L(\overline{\bigcirc}) = aL(\frown)$ ” indica che ci sono due diagrammi D_1, D_2 identici ovunque tranne che nella parte evidenziata.

Dimostrazione. Per prima cosa notiamo che $w(K)$ è invariante per isotopia regolare, dunque lo è anche $a^{-w(K)}$. Osserviamo che $a^{-w(K)} \cdot L(K)$ è un prodotto di quantità invarianti per isotopia regolare dunque anche $F(K)$ è invariante per isotopia regolare.

Dunque basta controllare che $F(K)$ sia invariante rispetto alle mosse di tipo I. Per prima cosa osserviamo che

$$w(\overline{\bigcirc}) = w(\frown) + 1 \quad w(\overline{\bigcirc}) = w(\frown) - 1$$

ed usando la proprietà dell'ipotesi otteniamo

$$\begin{aligned} F(\overline{\bigcirc}) &= a^{-w(\overline{\bigcirc})} \cdot L(\overline{\bigcirc}) \\ &= a^{-w(\frown)-1} \cdot a \cdot L(\frown) \\ &= a^{-w(\frown)} \cdot \cancel{a} \cdot \cancel{a} \cdot L(\frown) \\ &= a^{-w(\frown)} \cdot L(\frown) = F(\frown) \end{aligned}$$

e analogamente segue anche per l'altro ricciolo che $F(\overline{\bigcirc}) = F(\frown)$. $\square$

Capitolo 3

Il Polinomio di Kauffman

Ora introdurremo il polinomio di Kauffman [3], che vedremo essere un invariante di isotopia regolare. Questo polinomio è definito in modo implicito da assiomi che utilizzano le relazioni skein, queste relazioni possono essere utilizzate direttamente per calcolare il polinomio di Kauffman per un certo diagramma sia in modo implicito che sfruttando una valutazione che porta man mano verso un nodo banale standard.

Vedremo come questi assiomi definiscono un unico invariante di isotopia regolare ben definito e come $L_K(a, z)$ può essere generalizzato ad un invariante di isotopia ambiente $F_K(a, z)$.

Notazione. Per rendere alcuni calcoli più leggibili, in questo capitolo utilizzeremo in modo intercambiabile le notazioni L_K e $L[K]$ per indicare le valutazioni di L in un certo diagramma.

3.1. Definizione assiomatica

Definizione. Dato K il diagramma di un link non orientato, e sia $\mathbb{Z}[a, a^{-1}, z, z^{-1}]$ l'anello dei polinomi di Laurent sugli interi nelle variabili a e z , allora $L_K \in \mathbb{Z}[a, a^{-1}, z, z^{-1}]$, e verifica i seguenti assiomi:

- i) Se K, K' sono equivalenti a meno di isotopia regolare, allora $L_K = L_{K'}$.
- ii) Valgono le seguenti relazioni skein per quaterne di diagrammi identici ovunque tranne che nei punti indicati
 - a) $L(\text{X}) + L(\text{Y}) = z(L(\text{Z}) + L(\text{W}))$
 - b) $L(\bigcirc) = 1$
 - c) $L(\text{A}) = aL(\text{B})$
 - d) $L(\text{C}) = a^{-1}L(\text{B})$

Come già anticipato in precedenza, vedremo che questo è un invariante di isotopia regolare e può essere generalizzato ad invariante di isotopia ambiente come segue

Definizione. Definiamo $F_K \in \mathbb{Z}[a, a^{-1}, z, z^{-1}]$ per diagrammi orientati K come

$$F_K := a^{-w(K)} L_K$$

dove L_K di un diagramma orientato è definito dimenticando l'orientazione.

Proposizione 3.5. Il polinomio $F_K(a, z)$ è un invariante di isotopia ambiente

Dimostrazione. Segue dalla Proposizione 2.4. □

3.2. Alcune proprietà del polinomio di Kauffman

Lemma 3.6. Sia K il diagramma di un link orientato e $m(K)$ il suo mirror. Allora abbiamo le seguenti relazioni

$$L_{m(K)}(a, z) = L_K(1/a, z) \quad F_{m(K)}(a, z) = F_K(1/a, z)$$

Dimostrazione. $m(K)$ è ottenuto da K scambiando tutti i suoi incroci quindi se analizziamo cosa succede nei vari assiomi solo vicino ad un certo incrocio otteniamo le seguenti relazioni

$$\begin{aligned} L[m(\bigcirc)] &= L[\bigcirc] = 1 \\ L[m(\overline{\mathcal{D}})] &= L[\overline{\mathcal{D}}] = a^{-1}L[\neg] \\ L[m(\overline{\mathcal{D}})] &= L[\overline{\mathcal{D}}] = aL[\neg] \end{aligned}$$

ed infine l'ultima relazione rimane invariata per la simmetria del polinomio di Kauffman

$$\begin{aligned} L[m(\times)] + L[m(\times)] &= z(L[m(\smile)] + L[m(\frown)]) \\ \Rightarrow L[\times] + L[\times] &= z(L[\smile] + L[\frown]) \\ \Rightarrow L[\times] + L[\times] &= z(L[\smile] + L[\frown]) \end{aligned}$$

quindi passare al mirror ha l'effetto di scambiare solamente a con $1/a$ ma il resto della valutazione rimane identico.

Infine per $F_{m(K)}$ basta osservare che $w(m(K)) = -w(K)$ per una motivazione analoga. $\square$

Prima di passare alla dimostrazione della buona definizione vediamo alcuni esempi di calcolo di L_K in modo “implicito”, questo può essere fatto scegliendo accuratamente i diagrammi in cui effettuare la valutazione attraverso le relazioni skein degli assiomi.

Ad esempio proviamo a ricavare il valore di $\delta := L[\bigcirc\bigcirc]$

$$\begin{aligned} L[\text{8}] + L[\text{8}] &= z(L[\text{8}] + L[\text{8}]) \\ \Rightarrow aL[\bigcirc] + a^{-1}L[\bigcirc] &= z(\delta + L[\bigcirc]) \\ \Rightarrow a + a^{-1} &= z(\delta + 1) \\ \Rightarrow \delta &= (a + a^{-1})/z - 1 \end{aligned}$$

Questo valore $\delta = (a + 1/a)/z - 1$ ricomparirà anche in seguito ed è il coefficiente che il polinomio di Kauffman introduce quando abbiamo più componenti disgiunte. Possiamo anche trovare il risultato per il link di Hopf come segue

$$\begin{aligned} L[\text{link di Hopf}] + L[\text{link di Hopf}] &= z(L[\text{link di Hopf}] + L[\text{link di Hopf}]) \\ \Rightarrow L[\text{link di Hopf}] + \delta &= z(a + a^{-1}) \\ \Rightarrow L[\text{link di Hopf}] &= -(a + a^{-1})z^{-1} + 1 + (a + a^{-1})z \end{aligned}$$

E del nodo trifoglio

$$\begin{aligned} L[\text{nodo trifoglio}] + L[\text{nodo trifoglio}] &= z(L[\text{nodo trifoglio}] + L[\text{nodo trifoglio}]) \\ \Rightarrow L[\text{nodo trifoglio}] + a &= z(L[\text{link di Hopf}] + a^{-2}) \\ \Rightarrow L[\text{nodo trifoglio}] &= -(2a + a^{-1}) + (1 + a^{-2})z + (a + a^{-1})z^2 \end{aligned}$$

Definizione. Diremo che un diagramma è *split* se è l'unione disgiunta di due diagrammi separati, in questo caso scriviamo $K = K_1 \sqcup K_2$ dove K_1 e K_2 sono le due componenti disgiunte.

Definizione. Un diagramma K è una **somma connessa** se appare come due diagrammi disgiunti connessi da due archi paralleli (a meno di isotopie planari). Tagliando questi due archi e riunendo insieme le estremità dello stesso sotto-diagramma otteniamo un nuovo diagramma split della forma $\tilde{K} = K_1 \sqcup K_2$, in questo caso chiamiamo la somma connessa $K = K_1 \# K_2$.

Proposizione 3.7. Valgono le seguenti relazioni di L ed F per diagrammi split o in somma connessa

$$\begin{aligned} L[K_1 \sqcup K_2] &= \delta L[K_1]L[K_2] & F[K_1 \sqcup K_2] &= \delta F[K_1]F[K_2] \\ L[K_1 \# K_2] &= L[K_1]L[K_2] & F[K_1 \# K_2] &= F[K_1]F[K_2] \end{aligned}$$

dove $\delta = (a + a^{-1})/z - 1$ ed è lo stesso coefficiente che abbiamo trovato nell'esempio precedente.

3.3. Strumenti Forma Induttiva

Prima di passare a descrivere la definizione induttiva diamo alcune definizioni di manipolazioni di un diagramma.

Definizione. Sia K un diagramma di un nodo, $\mathcal{U}$ la sua ombra planare² e $p \in \mathcal{U}$ un punto di partenza direzionato in $\mathcal{U}$.

- Il suo **nodo banale standard** associato detto $\hat{K}(\mathcal{U}, p)$ è definito come segue: si prende il primo punto di partenza direzionato e si inizia a percorrere l'ombra planare in quella direzione e si rende ogni incrocio un sopra-incrocio quando ci si passa sopra per la prima volta.

Questa definizione si estende anche a diagrammi di link prendendo un insieme di punti base ordinati come mostrato in figura.

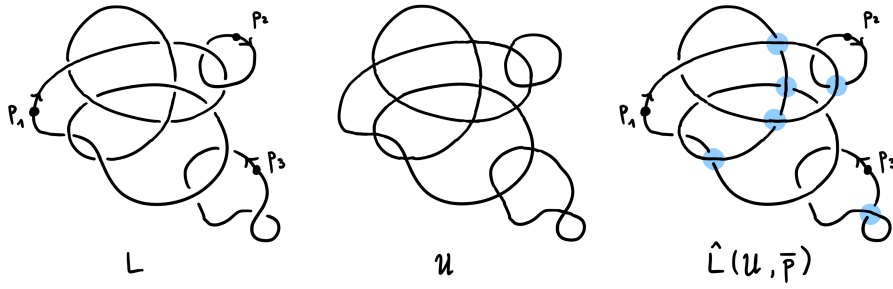


FIGURE 10. Un link con tre componenti e punti di partenza direzionati p_1, p_2, p_3 , con $\bar{p} = (p_1, p_2, p_3)$. In $\hat{L}(\mathcal{U}, \bar{p})$ sono evidenziati in **azzurro** gli incroci scambiati rispetto al link L .

- Definiamo ora le seguenti mosse su un diagramma, sia i l'etichetta di un incrocio del diagramma

$$\begin{array}{cccc} \begin{array}{c} \nearrow \\ \nwarrow \end{array} & \begin{array}{c} \nwarrow \\ \nearrow \end{array} & \begin{array}{c} \smile \\ \frown \end{array} & \begin{array}{c}) \\ (\end{array} \\ K & S_i K & E_i K & e_i K \end{array}$$

in questo caso $S_i K$ scambia l'informazione sopra/sotto dell'incrocio, mentre $E_i K$ e $e_i K$ applicano gli **splice** orizzontali e verticali a quell'incrocio.

²Ovvero per $K \subset \mathbb{R}^3$ poniamo $U := \pi(K) \subset \mathbb{R}^2$

Sia ora $\lambda = (\lambda_n, \dots, \lambda_0)$ una sequenza di etichette di suoi incroci.

- Definiamo le seguenti operazioni compatte per una sequenza di scambi seguita da uno splice finale

$$A_i^\lambda = E_{\lambda_i} S_{\lambda_{i-1}} \cdots S_{\lambda_0} \quad B_i^\lambda = e_{\lambda_i} S_{\lambda_{i-1}} \cdots S_{\lambda_0}$$

notiamo che per $i = 0$ abbiamo che $A_0^\lambda K = E_{\lambda_0} K$ e $B_0^\lambda K = e_{\lambda_0} K$ che è l'unico caso degenere per questa definizione.

- Poniamo $\hat{K}(\lambda) = S_{\lambda_n} \cdots S_{\lambda_0} K$ e definiamo le notazioni compatte per le seguenti somme alternate

$$\sum_K(\lambda) := \sum_{i=0}^n (-1)^i (L[A_i^\lambda K] + L[B_i^\lambda K])$$

$$\Omega_{K(\lambda)} := (-1)^{|\lambda|+1} L[\hat{K}(\lambda)] + z \sum_K(\lambda)$$

dove $|\lambda| = n$ per λ come sopra.

Osservazione. Se abbiamo una sequenza di operazioni S_i, E_i, e_i su incroci diversi queste operazioni commutano tra loro. Questo segue dal fatto che queste operazioni fanno solo modifiche locali al diagramma.

Definizione. Dati K_1, K_2 diagrammi di link, diciamo che K_1 **sovrasta** K_2 se per ogni incrocio tra K_1 e K_2 abbiamo che sono tutti sopra-incroci.

3.4. Forma Induttiva

3.4.1. Caso base: Nodo banale standard

Per prima cosa osserviamo che se abbiamo il diagramma di un nodo non orientato K allora, preso p un qualsiasi punto di partenza direzionato, $\hat{K}(\mathcal{U}, p)$ sarà un nodo banale. Esisterà quindi una sequenza di mosse di tipi I, II, III che ci porta al diagramma $\bigcirc$. Rimuovendo da questa successione tutte le mosse di tipo I e modificando le mosse II e III della successione in modo da far passare i riccioli attraverso i fili (come visto in precedenza si può fare usando alcune mosse II e III) otteniamo una successione composta solamente da mosse II e III che ci porta ad un diagramma composto solamente da riccioli.

Riformulare con
proposizione +
dimostrazione

Questa osservazione ci permette di calcolare esplicitamente $L_{\hat{K}(u,p)}$ che può essere risolto usando solo gli assiomi ii.b), ii.c), ii.d) ovvero quelli per $\overline{\bigcirc}$, $\overline{\bigcirc}$, $\bigcirc$. Segue facilmente per induzione che $L_{\hat{K}}(a, z) = a^{w(K)}$.

3.4.2. Caso induttivo

L'idea per la definizione induttiva è di considerare dato un nodo o un link K il suo nodo o link discendente standard $\hat{K}$. Questo induce una sequenza di indici λ che indichiamo con $0, \dots, n$. Se applichiamo incrementalmente gli scambi a K , ovvero consideriamo $S_i \dots S_0 K$, ed applichiamo la relazione skein principale a questi diagrammi otteniamo le seguenti relazioni

$$\begin{aligned} L[K] + L[S_0 K] &= z(L[E_0 K] + L[e_0 K]) \\ L[S_0 K] + L[S_1 S_0 K] &= z(L[E_0 S_0 K] + L[e_0 S_0 K]) \\ &\vdots \\ L[S_{n-1} \dots S_0 K] + L[\underbrace{S_n \dots S_0 K}_{\hat{K}}] &= z(L[E_n S_{n-1} \dots S_0 K] + L[e_n S_{n-1} \dots S_0 K]) \end{aligned}$$

se ora sommiamo e sottraiamo membro a membro queste equazioni otteniamo la seguente identità

$$\begin{array}{ccc} L[K] + L[S_0 K] & & z(L[E_0 K] + L[e_0 K]) \\ -(L[S_0 K] + L[S_1 S_0 K]) & & -z(L[E_0 S_0 K] + L[e_0 S_0 K]) \\ \vdots & = & \vdots \\ +(-1)^n (L[S_{n-1} \dots S_0 K] + L[\hat{K}]) & & +(-1)^n (z(L[E_n S_{n-1} \dots S_0 K] + L[e_n S_{n-1} \dots S_0 K])) \end{array}$$

notiamo che possiamo cancellare tutti i termini del membro di sinistra che compaiono due volte con segno opposto

$$\begin{array}{ccc} L[K] + \cancel{L[S_0 K]} & & z(L[E_0 K] + L[e_0 K]) \\ -(\cancel{L[S_0 K]} + \cancel{L[S_1 S_0 K]}) & & -z(L[E_0 S_0 K] + L[e_0 S_0 K]) \\ \vdots & = & \vdots \\ +(-1)^n (\cancel{L[S_{n-1} \dots S_0 K]} + L[\hat{K}]) & & +(-1)^n (z(L[E_n S_{n-1} \dots S_0 K] + L[e_n S_{n-1} \dots S_0 K])) \end{array}$$

Da cui otteniamo un'espressione ricorsiva per L_K :

$$\begin{aligned}
 \Rightarrow L_K &= (-1)^{n+1} L_{\hat{K}} + z \sum_{i=0}^n (-1)^i (L[E_n S_{n-1} \cdots S_0 K] + L[e_n S_{n-1} \cdots S_0 K]) \\
 &= (-1)^{n+1} L_{\hat{K}} + z \sum_{i=0}^n (-1)^i (L[A_n^\lambda K] + L[B_n^\lambda K])
 \end{aligned} \tag{1}$$

Questo ci dà un'idea su come sia possibile calcolare induttivamente L_K in termini di $L_{\hat{K}}$ e di altri diagrammi con meno incroci del diagramma di partenza o più “vicini” a $\hat{K}$.

Affinché sia sempre possibile raggiungere un nodo in forma di nodo banale standard serve anche aggiungere la relazione

$$L_{K_1 \sqcup K_2} = \delta L_{K_1} L_{K_2} \tag{2}$$

per $K = K_1 \sqcup K_2$ con K_1 sovrastante³ K_2 .

sempre con $\delta = (a + a^{-1})/z - 1$.

3.4.3. La definizione induttiva

Definizione – Forma chiusa per L_K . Il polinomio $L_K(a, z)$ è definito induttivamente come segue, abbiamo i seguenti casi:

i) Se $K = \hat{K}(\mathcal{U}, p)$ è un *nodo banale standard* per un qualche p allora

$$L_K(a, z) := a^{w(K)}$$

ii) Se K_1, K_2 sono due diagrammi tali che $K_1 \cup K_2 \subseteq K$ ed abbiamo che K_1 *sovrasta* K_2 , allora poniamo

$$L(K_1 \cup K_2) := d L(K_1) L(K_2)$$

con $d := (a + a^{-1})/z - 1$.

iii) Sia $K = K_1 \cup \cdots \cup K_n$, se nessun K_i sovrasta tutti gli altri⁴ allora:

- Se K è composto da più componenti allora siano $p_1, \dots, p_n$ dei punti di partenza direzionati su $K_1, \dots, K_n$ e $\bar{p}_i$ lo stesso punto di partenza p_i con

³Questo include anche il caso di componenti disgiunte in quanto sono sovrastanti tra loro a vuoto.

⁴Questo sicuramente accade altrimenti potremmo usare il punto ii).

la direzione opposta su K_i . Sia $\lambda(p_i)$ la sequenza di scambi di incroci di K_i con $K - K_i$ tale che $\hat{K}(\lambda(p_i)) = K_i \sqcup (K - K_i)$ tale che K_i sia *sovrastante* il resto delle componenti. A questo punto possiamo definire L_K come

$$L_K(a, z) := \frac{1}{2n} \left[\sum_{i=1}^n \sum_{q=p_i, \bar{p}_i} \left((-1)^{|\lambda(q)|+1} dL_{K_i} L_{K-K_i} + z \sum_K (\lambda(q)) \right) \right]$$

- Se K è una singola componente allora sia p un punto di partenza direzionato su K e $\bar{p}$ quello con direzione opposta. Sia $\lambda(p)$ la sequenza di scambi di incroci che lo porta al nodo banale standard $\hat{K}$ e definiamo

$$L_K(a, z) := \frac{1}{2} \left[\sum_{q=p, \bar{p}} \left((-1)^{|\lambda(q)|+1} L(\hat{K}(\lambda(q))) + z \sum_K (\lambda(q)) \right) \right]$$

3.5. Dimostrazione buona definizione

Per prima cosa osserviamo che dato che in ogni termine della definizione induttiva per L_K , quando questa dipende dalla scelta di un punto base sono presenti i termini per entrambe le direzioni; quindi ci basta dimostrare induttivamente che le definizioni non dipendono dalla scelta di punto base.

Nel corso della dimostrazione tutti gli argomenti per induzione si baseranno sul numero di incroci dei diagrammi di link. Ometteremo i casi base ovvero i controlli per diagrammi con pochi vertici che fanno partire l'induzione in quanto sono tutti facili da controllare.

Definizione – L'ipotesi induttiva. L'ipotesi induttiva che useremo nel corso della dimostrazione è la seguente:

Per ogni diagramma di link K con $< N$ incroci e diagrammi $\overline{\bigcirc}$ con meno di N incroci:

- a) L_K è ben definito (non dipende dalla scelta di punto base).
- b) L_K verifica gli assiomi:
 - $L[K] + L[S_i K] = z(L[e_i K] + L[E_i K])$
 - $L[\overline{\bigcirc}] = aL[\frown]$
 - $L[\bigcirc] = aL[\smile]$
- c) L_K è invariante per mosse di tipo II e III che non aumentano il numero di incroci.

Lemma 3.8. Sia $\lambda = (\lambda_n, \dots, \lambda_1, \lambda_0)$ una scelta di etichette per un sottoinsieme di incroci di un diagramma di link K . Sia $\mu = (\lambda_0, \lambda_n, \dots, \lambda_1)$ la stessa successione λ ma ruotata di 1 in avanti. Allora

$$\sum_K (\lambda) = \sum_K (\mu)$$

Dimostrazione. Per prima cosa rinominiamo le etichette $\lambda_n, \dots, \lambda_0$ come $n, \dots, 0$ per semplificare la notazione dunque

$$\lambda = (n, n-1, \dots, 1, 0) \quad \mu = (0, n, n-1, \dots, 1)$$

ricordiamo ora le definizioni

$$\begin{aligned} \sum_K (\lambda) &= \sum_{i=0}^n (-1) (L[A_i^\lambda K] + L[B_i^\lambda K]) \\ &= +(L[E_0 K] + L[e_0 K]) + \\ &\quad -(L[E_1 S_0 K] + L[e_1 S_0 K]) + \\ &\quad \vdots \\ &\quad +(-1)^n (L[E_n S_{n-1} \cdots S_0 K] + L[e_n S_{n-1} \cdots S_0 K]) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \sum_K(\mu) &= \sum_{i=0}^n (-1)(L[A_i^\mu K] + L[B_i^\mu K]) \\
 &= +(L[E_1 K] + L[e_1 K]) + \\
 &\quad -(L[E_2 S_1 K] + L[e_2 S_1 K]) + \\
 &\quad \vdots \\
 &\quad +(-1)^n (L[E_0 S_n \cdots S_1 K] + L[e_0 S_n \cdots S_1 K])
 \end{aligned}$$

Calcoliamo ora $\sum_K(\lambda) - \sum_K(\mu)$, per prima cosa allineiamo i termini come segue:

$$\begin{array}{ll}
 (L[E_0 K] + L[e_0 K]) + & \\
 -(L[E_1 S_0 K] + L[e_1 S_0 K]) + & (L[E_1 K] + L[e_1 K]) + \\
 +(L[E_2 S_1 S_0 K] + L[e_2 S_1 S_0 K]) + & -(L[E_2 S_1 K] + L[e_2 S_1 K]) + \\
 \vdots & + (L[E_3 S_2 S_1 K] + L[e_3 S_2 S_1 K]) + \\
 +(-1)^n (L[E_n S_{n-1} \cdots S_0 K] + L[e_n S_{n-1} \cdots S_0 K]) & \vdots \\
 & +(-1)^n (L[E_0 S_n \cdots S_1 K] + L[e_0 S_n \cdots S_1 K])
 \end{array}$$

a questo punto raggruppiamoli fattorizzando per righe:

$$\begin{aligned}
 \sum_K(\lambda) - \sum_K(\mu) &= +(L[E_0 K] + L[e_0 K]) + \\
 &\quad -(L[E_1 S_0 K] + L[e_1 S_0 K] + L[E_1 K] + L[e_1 K]) + \\
 &\quad \vdots \\
 &\quad +(-1)^n (L[E_n S_{n-1} \cdots S_1 S_0 K] + L[e_n S_{n-1} \cdots S_1 S_0 K] + \\
 &\quad \quad + L[E_n S_{n-1} \cdots S_1 K] + L[e_n S_{n-1} \cdots S_1 K]) + \\
 &\quad +(-1)^{n+1} (L[E_0 S_n \cdots S_1 K] + L[e_0 S_n \cdots S_1 K])
 \end{aligned}$$

permutando i termini di tutte le righe tranne la prima e l'ultima possiamo riscriverli in modo da averli nella forma “ $L[\square K] + L[\square S_0 K]$ ”

$$\begin{aligned}
 \sum_K(\lambda) - \sum_K(\mu) = & +(L[E_0K] + L[e_0K]) + \\
 & -(L[E_1K] + L[E_1S_0K] + L[e_1K] + L[e_1S_0K]) + \\
 & \vdots \\
 & (-1)^n(L[E_nS_{n-1} \cdots S_1K] + L[E_nS_{n-1} \cdots S_1S_0K] + \\
 & \quad + L[e_nS_{n-1} \cdots S_1K] + L[e_nS_{n-1} \cdots S_1S_0K]) \\
 & + (-1)^{n+1}(L[E_0S_n \cdots S_1K] + L[e_0S_n \cdots S_1K])
 \end{aligned}$$

ora utilizziamo un'osservazione precedente riguardo l'ordine di applicazione delle operazioni S_i quindi otteniamo $S_{n-1} \cdots S_1S_0K = S_0S_{n-1} \cdots S_1K$, dunque possiamo applicare l'induzione ovunque troviamo

$$\begin{aligned}
 L[\square] + L[S_i\square] &= z(L[E_i\square] + L[e_i\square]) \\
 \Rightarrow \sum_K(\lambda) - \sum_K(\mu) = & +(L[E_0K] + L[e_0K]) + \\
 & -z(L[E_0E_1K] + L[e_0E_1K] + L[E_0e_1K] + L[e_0e_1K]) + \\
 & \vdots \\
 & (-1)^nz(L[E_0E_nS_{n-1} \cdots S_1K] + L[e_0E_nS_{n-1} \cdots S_1K] + \\
 & \quad + L[E_0e_nS_{n-1} \cdots S_1K] + L[e_0e_nS_{n-1} \cdots S_1K]) \\
 & + (-1)^{n+1}(L[E_0S_n \cdots S_1K] + L[e_0S_n \cdots S_1K])
 \end{aligned}$$

riordiniamo le operazioni e portiamo E_0 e e_0 all'inizio delle successioni di operazioni

$$\begin{aligned}
 = & +(L[E_0K] + L[e_0K]) + \\
 & -z(L[E_1E_0K] + L[E_1e_0K] + L[e_1E_0K] + L[e_1e_0K]) + \\
 & \vdots \\
 & (-1)^nz(L[E_nS_{n-1} \cdots S_1E_0K] + L[E_nS_{n-1} \cdots S_1e_0K] + \\
 & \quad + L[e_nS_{n-1} \cdots S_1E_0K] + L[e_nS_{n-1} \cdots S_1e_0K]) \\
 & + (-1)^{n+1}(L[S_n \cdots S_1E_0K] + L[S_n \cdots S_1e_0K])
 \end{aligned}$$

□

Bibliografia

- [1] Jkasd, “Wild_knot.svg.” [Online]. Available: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Wild_knot.svg
- [2] R. Crowell and R. Fox, *Introduction to Knot Theory*. in Graduate Text in Mathematics. Springer New York, 1977.
- [3] L. H. Kauffman, “An invariant of regular isotopy,” *Trans. Am. Math. Soc.*, vol. 318, no. 2, pp. 417–471, 1990.