



UNIVERSITÀ DI PISA

---

Dipartimento di Matematica  
Corso di Laurea Triennale in Matematica

Tesi di Laurea

# **Il polinomio di Kauffman: un invariante di isotopia regolare**

Relatore:  
**Prof. Paolo Lisca**

Candidato:  
**Antonio De Lucreziis**

---

Anno Accademico 2024/2025

## Abstract

In questa tesi tratteremo del polinomio di Kauffman, un invariante di nodi e link di isotopia regolare. Introduciamo dei risultati di fondazione della teoria dei nodi per definire l'isotopia regolare. Infine vedremo la dimostrazione della buona definizione del polinomio di Kauffman a partire dalla forma assiomatica. Per il progetto di Laboratorio Computazionale abbiamo implementato in Python questo polinomio e verificato tutti i valori presenti nel database di KnotInfo e trovato un errore nel calcolo del nodo  $10_{125}$ .

## Indice

|                                                       |    |
|-------------------------------------------------------|----|
| 1. Introduzione .....                                 | 3  |
| 1.1. Introduzione alla Teoria dei Nodi .....          | 3  |
| 1.2. Proiezioni e Diagrammi .....                     | 6  |
| 1.3. Operazioni su Diagrammi .....                    | 8  |
| 2. Isotopia Regolare .....                            | 9  |
| 2.1. Writhe .....                                     | 10 |
| 2.2. Da isotopia regolare ad ambiente .....           | 12 |
| 3. Polinomio di Kauffman .....                        | 14 |
| 3.1. Definizione assiomatica .....                    | 15 |
| 3.2. Alcune proprietà del polinomio di Kauffman ..... | 15 |
| 3.3. Dimostrazione Forma Induttiva .....              | 18 |
| 4. Bibliografia .....                                 | 21 |

## Capitolo 1

# Introduzione

## 1.1. Introduzione alla Teoria dei Nodi

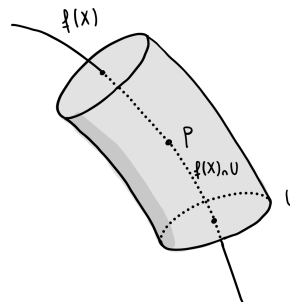
Ora introdurremo alcuni risultati fondamentali di teoria dei nodi. Vedremo le definizioni di nodo e link ed alcuni risultati di fondazione che ci serviranno per poter parlare ad esempio dei diagrammi planari e dell'isotopia regolare.

**Definizione.** Dati  $X, Y$  spazi topologici,  $f : X \rightarrow Y$  continua si dice **embedding** se  $X$  è omeomorfo a  $f(X) \subset Y$  con la topologia di sottospazio indotta da  $Y$ .

**Fatto.** Dati  $X, Y$  spazi topologici con  $X$  compatto,  $Y$  di Hausdorff e data un'applicazione continua  $f : X \rightarrow Y$  allora  $f$  è un embedding  $\Leftrightarrow$  è iniettiva.

**Definizione.** Dato un embedding  $f : X \rightarrow Y$ , un punto  $p \in X$  allora  $f$  si dice **localmente piatto** in  $p$  se  $\exists U \subset \mathbb{R}^3$  intorno di  $p$ , tale che

$$\begin{aligned} U &\approx \mathbb{D}^2 \times [0, 1] \\ U \cap f(X) &\Leftrightarrow \{0\} \times [0, 1] \end{aligned}$$



inoltre  $f$  si dice embedding **localmente piatto** se lo è in ogni punto di  $X$ .

**Definizione.** Un **nodo tame** è un sottoinsieme  $K \subset \mathbb{R}^3$  per cui esiste un embedding  $f : \mathbb{S}^1 \hookrightarrow \mathbb{R}^3$  localmente piatto con  $K = f(\mathbb{S}^1)$ . In questo caso  $f$  è anche detto **embedding tame**.

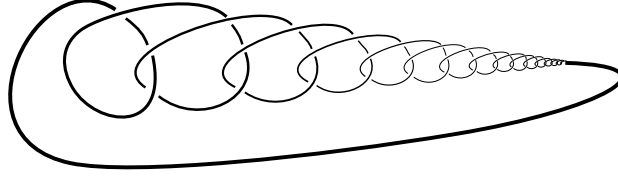


FIGURE 1. Un esempio di nodo non tame

Esistono anche nodi non tame come quello riportato nella figura precedente [1], ma d'ora in avanti considereremo solo nodi tame.

**Definizione.** Due nodi  $K_0, K_1 \subset \mathbb{R}^3$  sono **equivalenti** se esiste un'**isotopia ambiente**  $H$  che porta uno nell'altro, ovvero esiste  $H : \mathbb{R}^3 \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$  applicazione continua, tale che

- $\forall t \in [0, 1], H(\cdot, t)$  è un omeomorfismo

e ponendo  $H_t(x) := H(x, t)$  si ha

- $H_0 = \text{id}_{\mathbb{R}^3}$
- $H_1(K_0) = K_1$

Inoltre se due nodi sono equivalenti allora vale che  $\mathbb{R}^3 \setminus K_0 \approx \mathbb{R}^3 \setminus K_1$ .

Spesso serve fare manipolazioni direttamente sui nodi o sui diagrammi e lavorare con gli embedding  $\mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{R}^3$  non è molto comodo da un punto di vista formale e pratico, per questo motivo introduciamo i *nodi poligonali* che ci permettono di dare una formalizzazione alternativa dei nodi tame più operativa.

**Definizione.** Un **nodo poligonale** è un nodo equivalente ad un'unione finita di segmenti lineari.

**Fatto – Crowell [2].** Dato un nodo  $K \subset \mathbb{R}^3$ ,  $K$  è tame  $\Leftrightarrow K$  è poligonale.

**Definizione.** Il **nodo banale** è la classe di equivalenza del bordo di un triangolo equilatero.

Passiamo ora al caso in cui abbiamo un nodo con più di una componente

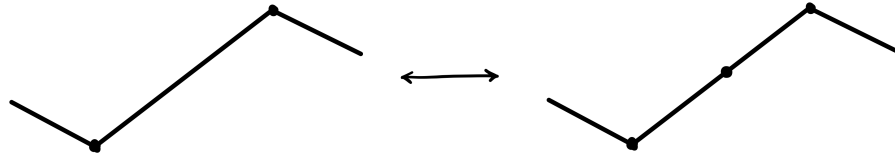
**Definizione.**  $L \subset \mathbb{R}^3$  è detto **link** se  $\exists$  embedding  $f : \mathbb{S}^1 \cup \dots \cup \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{R}^3$  local-mente piatto con immagine  $L$ .

Possiamo generalizzare tutte le definizioni che diamo per i nodi ai link, sostituendo  $\mathbb{S}^1$  con  $\mathbb{S}^1 \cup \dots \cup \mathbb{S}^1$  e apportando le giuste modifiche.

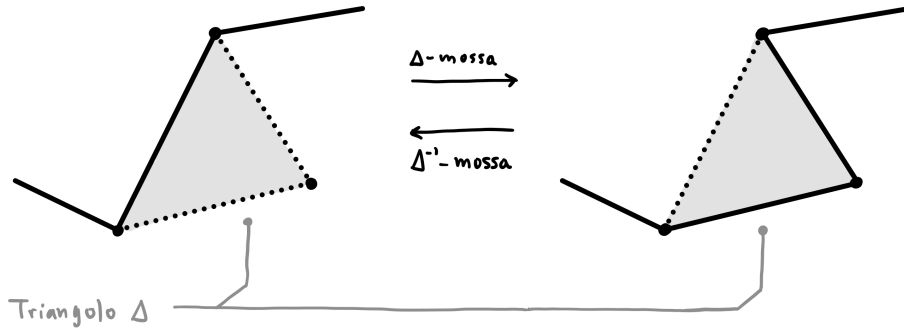
Introduciamo ora il concetto di equivalenza combinatoria di link poligonal in  $\mathbb{R}^3$ ; questo è il primo passo che ci permetterà di descrivere l'equivalenza per isotopia ambiente tra nodi attraverso una sequenza finita di mosse.

**Definizione.** Due link  $L_1, L_2$  sono **combinatorialmente equivalenti** se si ottengono uno dall'altro tramite un numero finito delle seguenti mosse:

- i) Aggiunta/rimozione di vertici



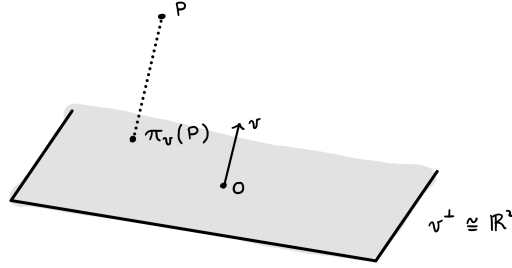
- ii) Dato un triangolo piano  $\Delta \subset \mathbb{R}^3$  tale che  $\Delta \cap L$  sia un lato di  $\Delta$  ed un segmento di  $L$  allora una  $\Delta$ -mossa è la seguente



**Fatto.** Due link poligonal  $L_1, L_2 \subset \mathbb{R}^3$  sono equivalenti  $\Leftrightarrow$  sono combinatorialmente equivalenti.

## 1.2. Proiezioni e Diagrammi

Data una direzione  $v \in \mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$ , possiamo definire  $\pi_v : \mathbb{R}^3 \rightarrow v^\perp$  proiezione sul piano ortogonale a  $v$  come nella seguente figura:



Per formalizzare il concetto di diagramma di un nodo introdurremo il concetto di proiezione regolare, ovvero una proiezione in cui i punti di intersezione tra le immagini dei segmenti di  $L$  sono solamente gli incroci del nodo (e senza segmenti paralleli alla direzione di proiezione).

**Definizione.** Sia  $L \subset \mathbb{R}^3$  un link,  $v \in \mathbb{S}^2$  una direzione e  $\pi_v : \mathbb{R}^3 \rightarrow v^\perp$  la proiezione su  $v^\perp$  come in precedenza. Allora un punto  $x \in \pi(L) \subset v^\perp$  si dice

- **regolare** se  $|\pi^{-1}(x)| = 1$
- **singolare** se  $|\pi^{-1}(x)| > 1$
- **doppio** se  $|\pi^{-1}(x)| = 2$

**Fatto.** Dato un link poligonale  $L \subset \mathbb{R}^3$ , esiste un aperto denso  $U \subset \mathbb{S}^2$  tale che  $\forall v \in U$  si ha che

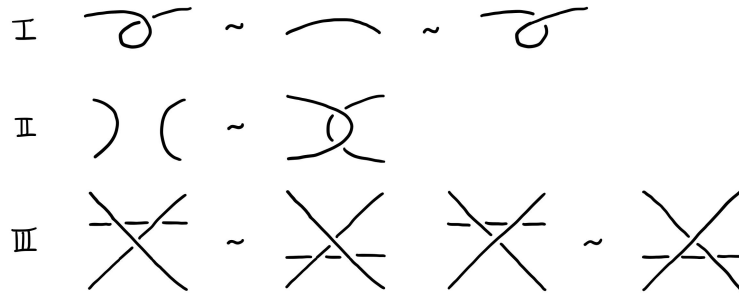
- i)  $L$  non ha segmenti paralleli a  $v$ .
- ii) Se  $x \in \pi_v(L)$  è singolare allora
  - $\pi_v^{-1}(x)$  non contiene vertici di  $L$
  - $x$  è un punto doppio
  - $x$  è un punto di intersezione trasversa delle immagini di due segmenti

Quindi dato  $L \subset \mathbb{R}^3$  link poligonale, esiste una proiezione regolare  $\pi(L) \subset \mathbb{R}^2$  con un numero finito di punti singolari, ciascuno dei quali è un punto doppio e di intersezione trasversa. Ognuno di questi punti doppi viene detto **incrocio**.

**Definizione.** Un **diagramma**  $D \subset \mathbb{R}^2$  di un link  $L \subset \mathbb{R}^3$  è l'immagine di  $L$  attraverso una proiezione regolare decorata con l'informazione sopra/sotto ad ogni incrocio.

**Fatto.** Due link con stesso diagramma sono equivalenti.

**Definizione.** Le mosse I, II, III (e le loro inverse) sono dette **mosse di Reidemeister**.



**Teorema (di Reidemeister) 1.1.** Due diagrammi di link equivalenti sono collegati da una successione finita di isotopie planari e mosse di Reidemeister.

Il modo principale in cui utilizzeremo il teorema di Reidemeister è attraverso la seguente proprietà. Indichiamo con  $\mathcal{D}$  l'insieme dei diagrammi di nodi e link.

**Proposizione 1.1.** Data una funzione  $\varphi : \mathcal{D} \rightarrow S$  con  $S$  un insieme (eventualmente con una qualche struttura come quella di anello) con la proprietà che  $D \sim D' \Rightarrow \varphi(D) = \varphi(D')$  allora se  $\varphi(D) \neq \varphi(D') \Rightarrow D \not\sim D'$ , in particolare se  $D, D'$  sono diagrammi per  $K, K'$  allora  $K \not\sim K'$ .

*Dimostrazione.* È semplicemente la forma contronominale del teorema di Reidemeister.  $\square$

Funzioni con la stessa proprietà di  $\varphi$  sono quindi invarianti di nodi o link per isotopia ambiente e ci danno un modo di distinguerli. Più avanti vedremo ad esempio il polinomio  $F_K(a, z) : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{Z}[a, a^{-1}, z, z^{-1}]$  che risulterà essere un invariante di isotopia ambiente per link orientati.

Come abbiamo generalizzato da nodi a link possiamo ripetere tutto anche aggiungendo un'orientazione e studiare **nodi e link orientati** ed abbiamo anche una versione orientata del teorema di Reidemeister.

## 1.3. Operazioni su Diagrammi

**Definizione.** Dato un link  $L \subset \mathbb{R}^3$  possiamo definire

- Il **mirror**  $m(L) := \rho(L)$  dove  $\rho : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  è la riflessione rispetto al piano di proiezione. In particolare dato un diagramma, il suo mirror è lo stesso diagramma con tutte le informazioni sopra/sotto scambiate.

inoltre, se diamo anche un'*orientazione* ad  $L$  possiamo definire

- Il **reverse**  $r(L)$ , in cui prendiamo l'orientazione opposta su ogni componente.
- L'**inverso**  $-L := m(r(L)) = r(m(L))$ .

**Definizione.** Sia  $K \subset \mathbb{R}^3$ , se  $K$  non è equivalente a  $m(K)$  allora diciamo che  $K$  è **chirale**, altrimenti è detto **anfichirale**.

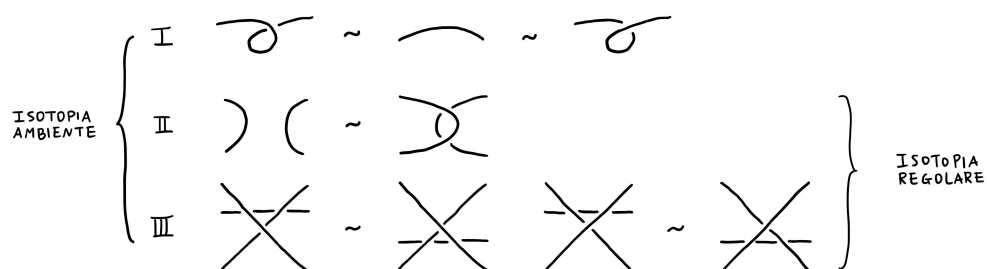
## Capitolo 2

# Isotopia Regolare

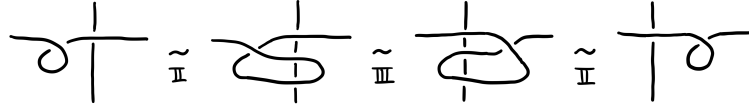
Il teorema di Reidemeister ci dice che due nodi sono equivalenti a meno di isotopia ambiente se e solo se lo sono anche dei loro diagrammi a meno di isotopie planari e mosse I, II e III.

Possiamo chiederci cosa succede se ci restringiamo all'equivalenza generata solo dalle isotopie planari e dalle mosse II e III, questo ci dà una nuova equivalenza tra nodi più stringente dell'isotopia ambiente.

**Definizione.** Due nodi o link  $K_1, K_2$  si dicono equivalenti a meno di **isotopia regolare** se e solo se due loro diagrammi sono equivalenti a meno di isotopie planari e mosse II e III di Reidemeister.



Una prima cosa che possiamo notare è che tutte le mosse di tipo I, quelle che introducono quelli che chiameremo **riccioli**, possono passare sopra o sotto altri fili senza problemi come mostra la seguente figura:



Quindi i riccioli possono essere spostati liberamente non ci impediscono di applicare mosse di tipo II o III. In particolare questo ci permette anche di “fattorizzare” tutti i riccioli di una componente in un link in modo che siano tutti vicini.

Un'altra osservazione sul comportamento dell'isotopia regolare rispetto alle mosse di tipo I è la seguente. Quando abbiamo una coppia di riccioli con segni opposti e su lati opposti abbiamo la seguente proprietà di cancellazione detto *trucco di Whitney*.



C'è un'osservazione importante da fare quando parliamo di isotopia regolare. Quest'ultima è definita solo quando si parla di diagrammi, quando invece parliamo di isotopia ambiente ha senso parlare dei link sia come diagrammi che come  $\mathbb{S}^1$  embedded in  $\mathbb{R}^3$ .

Questo sarà importante più avanti quando vedremo invarianti come il polinomio  $F_K$  che risulteranno essere invarianti per isotopia ambiente. Questi, però, sono definiti attraverso l'isotopia regolare; in particolare il calcolo va fatto fissando un particolare diagramma del link. Ad esempio è tutt'ora un problema aperto dare una definizione di  $F_K$  che sia indipendente dalla scelta di un diagramma.

## 2.1. Writhe

Vediamo ora un primo invariante di isotopia regolare per link orientati, prima definiamo il segno di un incrocio.

**Definizione.** Dato un incrocio di un link orientato ci possono essere due casi in base alla direzione in cui il filo sottostante si trova rispetto a quello sopra. Definiamo il **segno** di un incrocio in base a questi due casi:

$$\varepsilon\left(\begin{array}{c} \nearrow \\ \searrow \end{array}\right) = +1 \quad \varepsilon\left(\begin{array}{c} \nwarrow \\ \swarrow \end{array}\right) = -1$$

**Definizione.** Dato  $K$  link orientato, il **writhe**  $w(K)$  (o numero di avvolgimento) è dato dalla somma dei segni dei suoi incroci

$$w(K) := \sum_c \varepsilon(c)$$

**Proposizione 2.2.** Se  $K$  è un nodo, il writhe non dipende dall'orientazione.

*Dimostrazione.* Basta ricondurci a controllare cosa succede quando applichiamo il cambio dell'orientazione in  $\varepsilon$ :

$$\begin{aligned} \varepsilon\left(\begin{array}{c} \nearrow \\ \searrow \end{array}\right) &= \varepsilon\left(\begin{array}{c} \nwarrow \\ \nearrow \end{array}\right) = +1 \\ \varepsilon\left(\begin{array}{c} \nwarrow \\ \nearrow \end{array}\right) &= \varepsilon\left(\begin{array}{c} \nearrow \\ \searrow \end{array}\right) = -1 \end{aligned}$$

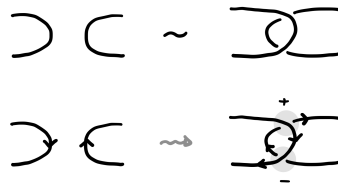
ad esempio nel primo caso invertendo le due frecce il filo sottostante va sempre verso sinistra rispetto a quello sopra quindi il segno rimane invariato.  $\square$

Questo risultato può essere generalizzato a link con l'accortezza di invertire l'orientazione di tutte le componenti (o anche solamente tutte quelle di una sola componente connessa relativamente alla sua ombra planare).

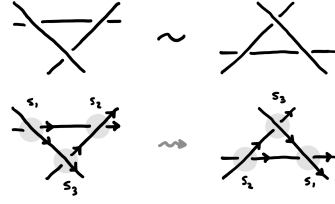
**Proposizione 2.3.** Il writhe è un invariante di isotopia regolare, ovvero se  $K_1, K_2$  sono equivalenti a meno di isotopia regolare allora  $w(K_1) = w(K_2)$ .

*Dimostrazione.* Per prima cosa controlliamo cosa succede nel caso delle mosse di tipo II e III:

- Nel caso della mossa II si può vedere che indipendentemente dalle orientazioni sui due fili, quando portiamo uno sopra l'altro compaiono sempre due incroci con segni opposti quindi per additività del writhe la somma totale non cambia.



- Per quanto riguarda la mossa III, il numero di incroci non cambia quindi basta controllare che la somma sia la stessa



Come possiamo notare nel caso mostrato in figura ciò che accade è che stiamo solo spostando e scambiando alcuni degli incroci tra loro. In particolare possiamo identificare ogni incrocio come l'intersezione di due delle tre rette, dopo aver applicato la mossa III le rette si saranno spostate ma le orientazioni saranno sempre le stesse e quindi anche i segni degli incroci.

Inoltre notiamo che il writhe non è influenzato dalle isotopie planari quindi questo conclude la dimostrazione.  $\square$

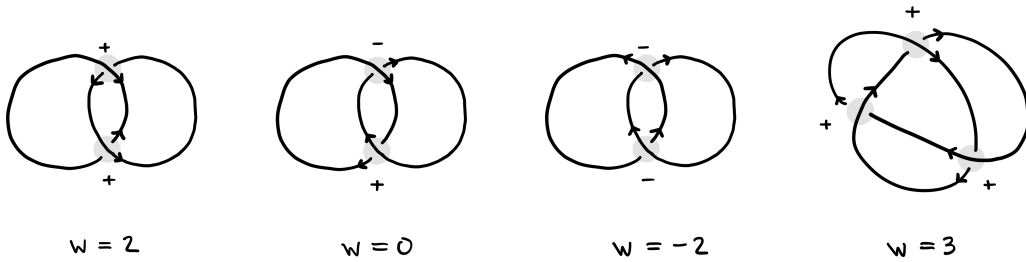


FIGURE 9. Esempi di calcolo del writhe

## 2.2. Da isotopia regolare ad ambiente

Un primo fatto più generale che possiamo vedere è che, dato un invariante di isotopia regolare che si comporta bene rispetto alle mosse di tipo I, possiamo costruire un invariante di isotopia ambiente aggiungendo un fattore di correzione dato dal writhe.

**Proposizione 2.4.** Sia  $R$  un anello,  $a \in R$  un elemento invertibile e  $K$  un link orientato, allora se  $L(K) \in R$  è un invariante di isotopia regolare tale che

$$L(\overline{\bigcirc}) = aL(\bigcirc) \quad L(\bigcirc) = a^{-1}L(\overline{\bigcirc})$$

allora  $F(K) := a^{-w(K)}L(K)$  è un invariante di isotopia ambiente.

*Dimostrazione.* Per prima cosa notiamo che  $w(K)$  è un invariante per isotopia regolare, dunque lo è anche  $a^{-w(K)}$ . Osserviamo che  $a^{-w(K)} \cdot L(K)$  è un prodotto di due invarianti per isotopia regolare dunque anche  $F(K)$  è invariante per isotopia regolare.

Dunque basta controllare che  $F(K)$  sia invariante rispetto alle mosse di tipo I. Per prima cosa osserviamo che

$$w(\overline{\bigcirc}) = w(\frown) + 1 \quad w(\overline{\bigcirc}) = w(\frown) - 1$$

ed usando anche la proprietà dell'ipotesi otteniamo

$$\begin{aligned} F(\overline{\bigcirc}) &= a^{-w(\overline{\bigcirc})} \cdot L(\overline{\bigcirc}) \\ &= a^{-w(\frown)-1} \cdot a \cdot L(\frown) \\ &= a^{-w(\frown)} \cdot \cancel{a}^I \cdot \cancel{a} \cdot L(\frown) \\ &= a^{-w(\frown)} \cdot L(\frown) = F(\frown) \end{aligned}$$

e segue anche analogamente l'altro ricciolo che  $F(\overline{\bigcirc}) = F(\frown)$ . □

## Capitolo 3

---

# Polinomio di Kauffman

---

Ora introdurremo il polinomio di Kauffman [3] che vedremo essere un invariante di isotopia regolare. Questo polinomio è definito in modo implicito da degli assiomi che utilizzano le relazioni skein, queste relazioni possono essere utilizzate direttamente per calcolare

Vedremo come questi assiomi definiscono un unico invariante di isotopia regolare ben definito e come  $L_K(a, z)$  può essere generalizzato a un invariante di isotopia ambiente  $F_K(a, z)$  utilizzando il *writhe* di un nodo.

### 3.1. Definizione assiomatica

**Definizione.** Dato  $K$  un link non orientato,  $L_K \in \mathbb{Z}[a, a^{-1}, z, z^{-1}]$ , ovvero i polinomi di Laurent sugli interi nelle variabili  $a$  e  $z$ , e verifica i seguenti assiomi:

- i) Se  $K, K'$  sono equivalenti a meno di isotopia regolare, allora  $L_K = L_{K'}$ .
- ii) Valgono le seguenti relazioni skein per quaterne di diagrammi identici ovunque tranne che nei punti indicati

- $L(\text{X}) + L(\text{X}) = z(L(\text{Y}) + L(\text{Z}))$
- $L(\bigcirc) = 1$
- $L(\text{D}) = aL(\text{A})$
- $L(\text{D}) = a^{-1}L(\text{A})$

Come già anticipato in precedenza, vedremo che questo è un invariante di isotopia regolare e può essere generalizzato ad invariante di isotopia ambiente come segue

**Definizione.** Definiamo  $F_K \in \mathbb{Z}[a, a^{-1}, z, z^{-1}]$  per diagrammi orientati  $K$  come

$$F_K := a^{-w(K)} L_K$$

dove  $L_K$  di un diagramma orientato è definito dimenticando l'orientazione.

**Proposizione 3.5.** Il polinomio  $F_K(a, z)$  è un invariante di isotopia ambiente

*Dimostrazione.* Segue dalla Proposizione 4. □

### 3.2. Alcune proprietà del polinomio di Kauffman

**Lemma 3.6.** Sia  $K$  un link orientato e  $m(K)$  il suo mirror. Allora abbiamo la seguente relazione per  $L$  e  $F$

$$L_{m(K)}(a, z) = L_K(1/a, z) \quad F_{m(K)}(a, z) = F_K(1/a, z)$$

*Dimostrazione.*  $m(K)$  è ottenuto da  $K$  scambiando tutti i suoi incroci quindi se analizziamo cosa succede nei vari assiomi solo vicino ad un certo incrocio otteniamo le seguenti relazioni

$$\begin{aligned} L(m(\bigcirc)) &= L(\bigcirc) = 1 \\ L(m(\overline{\mathcal{D}})) &= L(\overline{\mathcal{D}}) = a^{-1}L(\neg) \\ L(m(\overline{\mathcal{D}})) &= L(\overline{\mathcal{D}}) = aL(\neg) \end{aligned}$$

ed infine l'ultima relazione rimane invariata per la simmetria del polinomio di Kauffman

$$\begin{aligned} L(m(\times)) + L(m(\times)) &= z(L(m(\smile)) + L(m(\frown))) \\ \Rightarrow L(\times) + L(\times) &= z(L(\smile) + L(\frown)) \\ \Rightarrow L(\times) + L(\times) &= z(L(\smile) + L(\frown)) \end{aligned}$$

quindi passare al mirror ha l'effetto di scambiare solamente  $a$  con  $a^{-1}$  ma il resto della valutazione rimane identico.

Infine per  $F_{m(K)}$  basta osservare che  $w(m(K)) = -w(K)$  per una motivazione analoga.  $\square$

Prima di passare alla dimostrazione della buona definizione vediamo alcuni esempi di calcolo di  $L_K$  in modo “implicito”, questo può essere fatto scegliendo accuratamente per quali diagrammi valutare le relazioni skein degli assiomi.

Ad esempio proviamo a ricavare il valore di  $\delta := L(\bigcirc\bigcirc)$

$$\begin{aligned} L(\text{8}) + L(\text{8}) &= z(L(\text{8}) + L(\text{8})) \\ \Rightarrow aL(\bigcirc) + a^{-1}L(\bigcirc) &= z(\delta + L(\bigcirc)) \\ \Rightarrow a + a^{-1} &= z(\delta + 1) \\ \Rightarrow \delta &= (a + a^{-1})/z - 1 \end{aligned}$$

Tutte le immagini qua sotto sono temporanee e devo rifarle

Questo valore  $\delta = (a + 1/a)/z - 1$  ricomparirà anche in seguito ed è il coefficiente che il polinomio di Kauffman introduce quando abbiamo un link con due

componenti disgiunte. Possiamo anche trovare il risultato per il link di Hopf come segue

$$\begin{aligned}
 L(\text{link di Hopf}) + L(\text{link di Hopf}) &= z(L(\text{link di Hopf}) + L(\text{link di Hopf})) \\
 \Rightarrow L(\text{link di Hopf}) + \delta &= z(a + a^{-1}) \\
 \Rightarrow L(\text{link di Hopf}) &= -(a + a^{-1})z^{-1} + 1 + (a + a^{-1})z
 \end{aligned}$$

Ed del nodo trifoglio

$$\begin{aligned}
 L(\text{trifoglio}) + L(\text{trifoglio}) &= z(L(\text{trifoglio}) + L(\text{trifoglio})) \\
 \Rightarrow L(\text{trifoglio}) + a &= z(L(\text{link di Hopf}) + a^{-2}) \\
 \Rightarrow L(\text{trifoglio}) &= -(2a + a^{-1}) + (1 + a^{-2})z + (a + a^{-1})z^2
 \end{aligned}$$

**Definizione.** Diremo che un diagramma è *split* se è l'unione disgiunta di due diagrammi separati, in questo caso scriviamo  $K = K_1 \sqcup K_2$  dove  $K_1$  e  $K_2$  sono le due componenti disgiunte.

**Definizione.** Un diagramma  $K$  è una **somma connessa** se appare come due diagrammi disgiunti connessi da due archi paralleli (a meno di isotopie planari). Tagliando questi due archi e riunendo insieme le estremità dello stesso sotto-diagramma otteniamo un nuovo diagramma split della forma  $\tilde{K} = K_1 \sqcup K_2$ , in questo caso chiamiamo la somma connessa  $K = K_1 \# K_2$ .

**Proposizione 3.7.** Valgono le seguenti relazioni di  $L$  ed  $F$  per diagrammi split o in somma connessa

$$\begin{aligned}
 L(K_1 \sqcup K_2) &= \delta L(K_1)L(K_2) & F(K_1 \sqcup K_2) &= \delta F(K_1)F(K_2) \\
 L(K_1 \# K_2) &= L(K_1)L(K_2) & F(K_1 \# K_2) &= F(K_1)F(K_2)
 \end{aligned}$$

dove  $\delta = (a + a^{-1})/z - 1$  ed è lo stesso coefficiente che abbiamo trovato nell'esempio precedente.

### 3.3. Dimostrazione Forma Induttiva

Prima di passare a descrivere la definizione induttiva diamo alcune definizioni di manipolazioni di un diagramma.

**Definizione.** Sia  $K$  un diagramma,  $\mathcal{U}$  la sua ombra planare<sup>1</sup> e  $p \in \mathcal{U}$  un punto di partenza direzionato in  $\mathcal{U}$ .

- Il suo **nodo (o link) banale standard** associato detto  $\hat{K}(\mathcal{U}, p)$  è definito come segue: si prende il primo punto di partenza direzionato e si inizia a percorrere l'ombra planare in quella direzione e si rende ogni incrocio un sopra-incrocio quando ci si passa sopra per la prima volta.

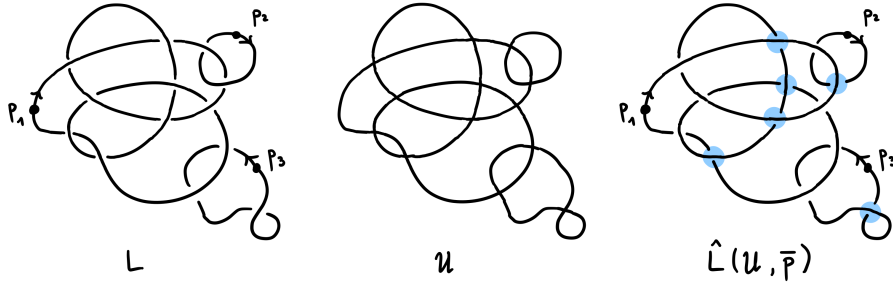


FIGURE 10. Un link con tre componenti e punti di partenza direzionati  $p_1, p_2, p_3$ , poniamo  $\bar{p} = (p_1, p_2, p_3)$ . In  $\hat{L}(\mathcal{U}, \bar{p})$  sono evidenziati in **azzurro** gli incroci scambiati rispetto al link  $L$ .

- Sia  $K$  un link,  $\lambda = (\lambda_n, \dots, \lambda_0)$  una sequenza di etichette di incroci allora poniamo

$$A_i^\lambda = E_{\lambda_i} S_{\lambda_{i-1}} \dots S_{\lambda_0} \quad B_i^\lambda = e_{\lambda_i} S_{\lambda_{i-1}} \dots S_{\lambda_0}$$

notiamo che per  $i = 0$  abbiamo che  $A_0^\lambda K = E_{\lambda_0} K$  e  $B_0^\lambda K = e_{\lambda_0} K$  che è l'unico caso degenerare per questa definizione.

- **TODO**  
Operazione compatta  $\sum_K(\lambda)$

L'idea per la definizione induttiva è di considerare dato un nodo o un link  $K$  il suo nodo o link discendente standard  $\hat{K}$ . Questo induce una sequenza di indici  $\lambda$

<sup>1</sup>Ovvero per  $K \subset \mathbb{R}^3$  poniamo  $U := \pi(K) \subset \mathbb{R}^2$

che indichiamo con  $0, \dots, n$ . Se la applichiamo incrementalmente a  $K$  otteniamo le seguenti relazioni

$$\begin{aligned} L_K + L_{S_0 K} &= z(L_{E_0 K} + L_{e_0 K}) \\ L_{S_0 K} + L_{S_1 S_0 K} &= z(L_{E_0 S_0 K} + L_{e_0 S_0 K}) \\ &\vdots \\ L_{S_{n-1} \dots S_0 K} + L_{\widehat{K}} &= z(L_{E_n S_{n-1} \dots S_0 K} + L_{e_n S_{n-1} \dots S_0 K}) \end{aligned}$$

se ora sommiamo e sottraiamo membro a membro otteniamo la seguente identità

$$\begin{aligned} L_K + L_{S_0 K} & & z(L_{E_0 K} + L_{e_0 K}) \\ - (L_{S_0 K} + L_{S_1 S_0 K}) & & - z(L_{E_0 S_0 K} + L_{e_0 S_0 K}) \\ \vdots & = & \vdots \\ + (-1)^n (L_{S_{n-1} \dots S_0 K} + L_{\widehat{K}}) & & + (-1)^n (z(L_{E_n S_{n-1} \dots S_0 K} + L_{e_n S_{n-1} \dots S_0 K})) \end{aligned}$$

notiamo che possiamo cancellare tutti i termini del membro di sinistra che compaiono due volte con segno opposto

$$\begin{aligned} L_K + \cancel{L_{S_0 K}} & & z(L_{E_0 K} + L_{e_0 K}) \\ - (\cancel{L_{S_0 K}} + \cancel{L_{S_1 S_0 K}}) & & - z(L_{E_0 S_0 K} + L_{e_0 S_0 K}) \\ \vdots & = & \vdots \\ + (-1)^n (\cancel{L_{S_{n-1} \dots S_0 K}} + L_{\widehat{K}}) & & + (-1)^n (z(L_{E_n S_{n-1} \dots S_0 K} + L_{e_n S_{n-1} \dots S_0 K})) \end{aligned}$$

Da cui otteniamo un'espressione per  $L_K$ , inoltre posto  $\lambda = (0, \dots, n)$

$$\begin{aligned} \Rightarrow L_K &= (-1)^{n+1} L_{\widehat{K}} + z \sum_{i=0}^n (-1)^i (L_{E_n S_{n-1} \dots S_0 K} + L_{e_n S_{n-1} \dots S_0 K}) \\ &= (-1)^{n+1} L_{\widehat{K}} + z \sum_{i=0}^n (-1)^i (L_{A_n^\lambda K} + L_{B_n^\lambda K}) \end{aligned} \tag{1}$$

Questo ci dà un'idea su come sia possibile calcolare induttivamente  $L_K$  in termini di  $L_{\widehat{K}}$  e di altri diagrammi con meno incroci del diagramma di partenza.

Affinché sia sempre possibile raggiungere un nodo in forma di nodo banale standard serve aggiungere la seguente relazione quando  $K = K_1 \sqcup K_2$  con  $K_1$  sovrastante  $K_2$ .

$$L_{K_1 \sqcup K_2} = \delta L_{K_1} L_{K_2} \quad (2)$$

sempre con  $\delta = (a + a^{-1})/z - 1$ .

**Definizione – Forma chiusa per  $L_K$ .** Il polinomio  $L_K(a, z)$  è definito induttivamente come segue, abbiamo i seguenti casi:

i) Se  $K = \hat{K}$  è un *nodo banale standard* allora  $L_K(a, z) := a^{w(K)}$

ii) Se  $K_1$  è *sovrastante*  $K_2$ , sia  $d := (a + a^{-1})/z - 1$  e allora

$$L(K_1 \sqcup K_2) := dL(K_1)L(K_2)$$

iii) Se  $K = K_1 \sqcup \dots \sqcup K_n$

- Se un  $K_i$  è *sovrastante* un'altra componente allora applica (ii).
- Se nessun  $K_i$  è *sovrastante* tutti gli altri, siano  $p_1, \dots, p_n$  dei punti di partenza direzionati su  $K_1, \dots, K_n$  e sia  $\bar{p}_i$  lo stesso punto di partenza direzionato con la direzione opposta di  $p_i$  su  $K_i$ . Sia  $\lambda(p_i)$  la sequenza di scambi di incroci di  $K_i$  con  $K - K_i$  tale che  $\hat{K}(\lambda(p_i)) = K_i \sqcup (K - K_i)$  tale che  $K_i$  sia *sovrastante* il resto delle componenti. A questo punto possiamo definire  $L_K$  come

$$L_K(a, z) := \frac{1}{2n} \left[ \sum_{i=1}^n \sum_{q=p_i, \bar{p}_i} \left( (-1)^{|\lambda(q)|+1} dL_{K_i} L_{K-K_i} + z \sum_K (\lambda(q)) \right) \right]$$

- Se  $K$  è una singola componente allora sia  $p$  un punto di partenza direzionato su  $K$  e  $\bar{p}$  quello con direzione opposta. Sia  $\lambda(p)$  la sequenza di scambi di incroci che lo porta al nodo banale standard  $\hat{K}$  e definiamo

$$L_K(a, z) := \frac{1}{2} \left[ \sum_{q=p, \bar{p}} \left( (-1)^{|\lambda(q)|+1} L(\hat{K}(\lambda(q))) + z \sum_K (\lambda(q)) \right) \right]$$

## Bibliografia

- [1] Jkasd, “Wild\_knot.svg.” [Online]. Available: [https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Wild\\_knot.svg](https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Wild_knot.svg)
- [2] R. Crowell and R. Fox, *Introduction to Knot Theory*. in Graduate Text in Mathematics. Springer New York, 1977.
- [3] L. H. Kauffman, “An invariant of regular isotopy,” *Trans. Am. Math. Soc.*, vol. 318, no. 2, pp. 417–471, 1990.