

# Appunti di Geometria

Gabriel Antonio Videtta

26 luglio 2022

# Indice

<b>1</b>	<b>Assiomi della geometria</b>	<b>3</b>
1.1	I concetti primitivi . . . . .	3
1.2	Gli assiomi di appartenenza . . . . .	3
1.3	Gli assiomi di ordine . . . . .	4

# 1 Assiomi della geometria

## 1.1 I concetti primitivi

La geometria euclidea dispone di tre principali concetti primitivi, ossia concetti inesprimibili per definizione, ma assunti come definiti e chiari. Essi sono:

- il punto;
- la retta;
- il piano.

Per indicare questi tre concetti sono in atto alcune convenzioni stilistiche:

- i punti vengono indicati con le lettere maiuscole dell'alfabeto latino ( $A, B, C, \dots$ );
- le rette vengono indicate con le lettere minuscole dell'alfabeto latino ( $a, b, c, \dots$ );
- i piani vengono indicati con le lettere minuscole dell'alfabeto greco ( $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ ).

A partire da questi concetti è possibile stabilire gli assiomi della geometria euclidea.

## 1.2 Gli assiomi di appartenenza

Gli assiomi di appartenenza stabiliscono le relazioni tra i tre concetti primitivi prima elencati.

**Assioma 1.1** (Primo assioma di relazione di insieme). *Ogni piano è un insieme infinito di punti* ( $\forall \alpha, |\alpha| = \infty$ ).

**Assioma 1.2** (Secondo assioma di relazione di insieme). *Ogni retta è un sottoinsieme di un piano* ( $\forall r \exists! \alpha \mid r \in \alpha$ ).

**Assioma 1.3** (Primo assioma di appartenenza della retta). *A ogni retta appartengono almeno due punti distinti* ( $\forall r \exists A, B \mid A \neq B \wedge A, B \in r$ ).

**Assioma 1.4** (Secondo assioma di appartenenza della retta). *Dati due punti distinti, esiste una e una sola retta a cui essi appartengano contemporaneamente* ( $A \neq B \implies \exists! r \mid A, B \in r$ ).

**Teorema 1.1.** *Date due rette distinte, esse possono incontrarsi in al più un punto* ( $r \neq s \implies |r \cap s| \leq 1$ ).

*Dimostrazione.* Qualora le due rette dovessero incontrarsi in più di un punto, esisterebbero allora due punti appartenenti ad ambo le rette. Tuttavia, per l'**Assioma 1.4**, attraverso la congiunzione di tali due punti si può determinare una e una sola retta, generando una contraddizione. ■

A partire da questo teorema si possono definire tre combinazioni di rette.

**Definizione 1.1** (Rette coincidenti). Due rette si dicono coincidenti se e solo se condividono il medesimo sottoinsieme del piano ( $r \equiv s \iff \nexists P \in r \mid P \notin s \wedge \nexists P \in s \mid P \notin r$ ).

**Definizione 1.2** (Rette incidenti). Due rette si dicono incidenti se e solo se condividono un solo punto del piano.

**Definizione 1.3** (Rette parallele). Due rette si dicono parallele se e solo se non condividono alcun punto del piano. ( $r \parallel s \iff |r \cap s| = 0$ ).

**Definizione 1.4** (Punti non allineati). Tre o più punti si dicono non allineati se non esiste alcuna retta che li contenga tutti contemporaneamente.

**Assioma 1.5.** *Tre punti non allineati definiscono sempre e univocamente un piano ( $A, B, C \nmid \#r \mid A, B, C \in r \implies \exists \alpha \mid A, B, C \in \alpha$ ).*

### 1.3 Gli assiomi di ordine

Un verso di percorrenza in una retta  $r$  viene istituito come un sistema mediante il quale è sempre possibile stabilire una relazione di ordine tra due punti distinti  $A$  e  $B$  appartenenti alla medesima retta in modo tale che  $A > B$  o  $A < B$ .

Stabilito un verso di percorrenza di una retta, vengono postulati due assiomi detti di ordine che fanno riferimento a tale verso di percorrenza.

**Assioma 1.6** (Primo assioma di ordine della retta). *Presi due punti distinti  $A$  e  $B$  appartenenti alla retta  $r$  tali che  $A < B$ , allora esiste un punto  $C$ , sempre appartenente alla retta  $r$ , tale che  $A < C < B$  ( $A, B \in r \mid A < B \implies \exists C \in r \mid A < C < B$ ).*

**Assioma 1.7** (Secondo assioma di ordine della retta). *Dato un punto  $C$  appartenente alla retta  $r$ , esistono sempre due punti  $A$  e  $B$ , sempre appartenenti a  $r$ , tali che  $A < C < B$ . ( $C \in r \implies \exists A, B \in r \mid A < C < B$ ).*

**Teorema 1.2.** *Ad ogni retta appartengono infiniti punti.*

*Dimostrazione.* Qualora ad una retta appartenesse un numero finito di punti, stabilito un verso di percorrenza, sarebbe possibile enumerare tali punti in ordine. Presi i primi due punti minori  $A$  e  $B$ , ossia tali che non esista alcun punto  $C$  tale che  $A < C < B$ , per l'**Assioma 1.7** tra di essi deve esistere un punto  $C$  tale che  $A < C < B$ , entrando in piena contraddizione con l'assunto. ■

**Teorema 1.3.** *Ogni punto  $P$  del piano appartiene ad un numero infinito di rette.*

*Dimostrazione.* Per l'**Assioma 1.5**, per ogni punto  $P$  del piano devono esistere altri due punti  $A$  e  $B$  tali che la retta che li congiunge non contenga  $P$ .

Si considerino le rette  $a$ , che congiunge  $P$  e  $A$ , e  $d$ , che congiunge  $A$  e  $B$ . Per conseguenza del **Teorema 1.2**, per  $d$  passano infiniti punti, i quali, presi singolarmente e congiunti a  $P$ , definiscono allo stesso modo infinite rette. ■