

L'Algebrario

dispense del corso di Aritmetica

GABRIEL ANTONIO VIDETTA

A.A. 2022/2023



UNIVERSITÀ DI PISA

Premessa

TODO

Indice

1	Introduzione alla teoria degli anelli	8
1.1	Definizione e prime proprietà	8
1.2	Omomorfismi di anelli e ideali	10
1.3	Quoziente per un ideale e primo teorema d'isomorfismo	12
2	Anelli euclidei, PID e UFD	15
2.1	Prime proprietà	15
2.2	Irriducibili e prime definizioni	16
2.3	PID e MCD	17
2.4	L'algoritmo di Euclide	19
2.5	UFD e fattorizzazione	21
3	Esempi notevoli di anelli euclidei	24
3.1	I numeri interi: \mathbb{Z}	24
3.2	I campi: \mathbb{K}	24
3.3	I polinomi di un campo: $\mathbb{K}[x]$	24
3.4	Gli interi di Gauss: $\mathbb{Z}[i]$	25
3.5	Gli interi di Eisenstein: $\mathbb{Z}[\omega]$	26
4	Irriducibili e corollari di aritmetica in $\mathbb{Z}[i]$	28
4.1	Il teorema di Natale di Fermat e gli irriducibili in $\mathbb{Z}[i]$	28
4.2	L'identità di Brahmagupta-Fibonacci	30
5	Irriducibilità in $\mathbb{Z}[x]$ e in $\mathbb{Q}[x]$	33
5.1	Criterio di Eisenstein e proiezione in $\mathbb{Z}_p[x]$	33
5.2	Alcuni irriducibili di $\mathbb{Z}_2[x]$	35
5.3	Teorema delle radici razionali e lemma di Gauss	36
6	I polinomi di un campo: $\mathbb{K}[x]$	40
6.1	Elementi preliminari	40
6.2	Sottogruppi moltiplicativi finiti di \mathbb{K}	41
6.3	Il quoziente $\mathbb{K}[x]/(f(x))$	42
7	Estensioni algebriche di \mathbb{K}	46
7.1	Morfismi di valutazione, elementi algebrici e trascendenti	46
7.2	Teorema delle torri ed estensioni algebriche	49
8	Campi di spezzamento	55
9	Teorema fondamentale dell'Algebra e radici reali in $\mathbb{Q}[x]$	58
10	Introduzione alla teoria dei campi	60
10.1	La caratteristica di un campo	60
10.2	Prime proprietà dei campi di caratteristica p	61
10.3	L'omomorfismo di Frobenius	61
10.4	Classificazione dei campi finiti	63
11	Teoremi rilevanti sui campi finiti	65
11.1	Campo di spezzamento di un irriducibile in \mathbb{F}_p	65
11.2	L'inclusione $\mathbb{F}_{p^m} \subseteq \mathbb{F}_{p^n}$ e il polinomio $x^{p^n} - x$	66

12 Riferimenti bibliografici**70**

§1 Introduzione alla teoria degli anelli

§1.1 Definizione e prime proprietà

Definizione 1.1. Si definisce **anello**^a una struttura algebrica costruita su un insieme A e due operazioni binarie $+$ e \cdot ^b avente le seguenti proprietà:

- $(A, +)$ è un *gruppo abeliano*, alla cui identità, detta *identità additiva*, ci si riferisce con il simbolo 0 ,
- $\forall a, b, c \in A, (ab)c = a(bc)$,
- $\forall a, b, c \in A, (a + b)c = ac + bc$,
- $\forall a, b, c \in A, a(b + c) = ab + ac$,
- $\exists 1 \in A \mid \forall a \in A, 1a = a = a1$, e tale 1 viene detto *identità moltiplicativa*.

^aIn realtà, si parla in questo caso di anello *con unità*, in cui vale l'assioma di esistenza di un'identità moltiplicativa. In queste dispense si identificherà con "anello" solamente un anello con unità.

^bD'ora in avanti il punto verrà omissso.

Come accade per i gruppi, gli anelli soddisfano alcune proprietà algebriche particolari, tra le quali si citano le più importanti:

Proposizione 1.2

$$\forall a \in A, 0a = 0 = a0.$$

Dimostrazione. $0a = (0 + 0)a = 0a + 0a \implies 0a = 0$. Analogamente $a0 = a(0 + 0) = a0 + a0 \implies a0 = 0$. \square

Proposizione 1.3

$$\forall a \in A, -(-a) = a.$$

Dimostrazione. $-(-a) - a = 0 \wedge a - a = 0 \implies -(-a) = a$, per la proprietà di unicità dell'inverso in un gruppo¹. \square

Proposizione 1.4

$$a(-b) = (-a)b = -(ab).$$

Dimostrazione. $a(-b) + ab = a(b - b) = a0 = 0 \implies a(-b) = -(ab)$, per la proprietà di unicità dell'inverso in un gruppo. Analogamente $(-a)b + ab = (a - a)b = 0b = 0 \implies (-a)b = -(ab)$. \square

Corollario 1.5

$$(-1)a = a(-1) = -a.$$

¹In questo caso, il gruppo additivo dell'anello.

Proposizione 1.6

$$(-a)(-b) = ab.$$

Dimostrazione. $(-a)(-b) = -(a(-b)) = -(-(ab)) = ab$, per la *Proposizione 1.4*. \square

Si enuncia invece adesso la nozione di **sottoanello**, in tutto e per tutto analoga a quella di *sottogruppo*.

Definizione 1.7. Si definisce sottoanello rispetto all'anello A un anello B avente le seguenti proprietà:

- $B \subseteq A$,
- $0, 1 \in B$,
- $\forall a, b \in B, a + b \in B \wedge ab \in B$.

Definizione 1.8. Un sottoanello B rispetto ad A si dice **proprio** se $B \neq A$.

Definizione 1.9. Un anello si dice **commutativo** se $\forall a, b \in A, ab = ba$.

Esempio 1.10

Un facile esempio di anello commutativo è $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

Definizione 1.11. Un elemento a di un anello A si dice **invertibile** se $\exists b \in A \mid ab = ba = 1$.

Definizione 1.12. Dato un anello A , si definisce A^* come l'insieme degli elementi invertibili di A , che a sua volta forma un *gruppo moltiplicativo*.

Definizione 1.13. Un anello A si dice **corpo** se $\forall a \neq 0 \in A, \exists b \in A \mid ab = ba = 1$, ossia se $A \setminus \{0\} = A^*$.

Esempio 1.14

L'esempio più rilevante di corpo è quello dei *quaternioni* \mathbb{H} , definiti nel seguente modo:

$$\mathbb{H} = \{a + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k} \mid a, b, c, d \in \mathbb{R}\},$$

dove:

$$\mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = -1, \quad \mathbf{ij} = \mathbf{k}, \mathbf{jk} = \mathbf{i}, \mathbf{ki} = \mathbf{j}.$$

Infatti ogni elemento non nullo di \mathbb{H} possiede un inverso moltiplicativo:

$$(a + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k})^{-1} = \frac{a - b\mathbf{i} - c\mathbf{j} - d\mathbf{k}}{a^2 + b^2 + c^2 + d^2},$$

mentre la moltiplicazione non è commutativa.

Definizione 1.15. Un anello commutativo che è anche un corpo si dice **campo**.

Esempio 1.16

Alcuni campi, tra i più importanti, sono \mathbb{Q} , \mathbb{R} , \mathbb{C} e $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ con p primo.

Definizione 1.17. Un elemento $a \neq 0$ appartenente a un anello A si dice **divisore di zero** se $\exists b \neq 0 \in A \mid ab = 0$ o $ba = 0$.

Esempio 1.18

2 è un divisore di zero in $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$, infatti $2 \cdot 3 \equiv 0 \pmod{6}$.

Definizione 1.19. Un anello commutativo in cui non sono presenti divisori di zero si dice **dominio d'integrità**, o più semplicemente *dominio*.

Proposizione 1.20 (Legge di annullamento del prodotto)

Sia D un dominio. Allora $ab = 0 \implies a = 0 \vee b = 0$.

Dimostrazione. Siano $a, b \in D \mid ab = 0$. Se $a = 0$, la condizione è soddisfatta. Se invece $a \neq 0$, b deve essere per forza nullo, altrimenti si sarebbe trovato un divisore di 0, e D non sarebbe un dominio, \nexists . \square

Esempio 1.21

L'anello dei polinomi su un campo, $\mathbb{K}[x]$, è un dominio.

§1.2 Omomorfismi di anelli e ideali

Definizione 1.22. Un **omomorfismo di anelli**^a è una mappa $\phi : A \rightarrow B$ – con A e B anelli – soddisfacente alcune particolari proprietà:

- ϕ è un *omomorfismo di gruppi* rispetto all'addizione di A e di B , ossia $\forall a, b \in A$, $\phi(a + b) = \phi(a) + \phi(b)$,
- $\phi(ab) = \phi(a)\phi(b)$,
- $\phi(1_A) = 1_B$.

^aLa specificazione "di anelli" è d'ora in avanti omessa.

Definizione 1.23. Se $\phi : A \rightarrow B$ è un omomorfismo iniettivo, si dice che ϕ è un **monomorfismo**.

Definizione 1.24. Se $\phi : A \rightarrow B$ è un omomorfismo suriettivo, si dice che ϕ è un **epimorfismo**.

Definizione 1.25. Se $\phi : A \rightarrow B$ è un omomorfismo bigettivo^a, si dice che ϕ è un **isomorfismo**.

^aOvvero se è sia un monomorfismo che un epimorfismo.

Prima di enunciare l'analogo del *Primo teorema d'isomorfismo* dei gruppi in relazione agli anelli, si rifletta su un esempio di omomorfismo:

Esempio 1.26

Sia $\phi : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}, k \mapsto 2k$ un omomorfismo. Esso è un monomorfismo, infatti $\phi(x) = \phi(y) \implies 2x = 2y \implies x = y$. Pertanto $\text{Ker } \phi = \{0\}$. Sebbene $\text{Ker } \phi < \mathbb{Z}$, esso **non è un sottoanello**^a.

^aInfatti $1 \notin \text{Ker } \phi$.

Dunque, con lo scopo di definire meglio le proprietà di un *kernel*, così come si introdotto il concetto di *sottogruppo normale* per i gruppi, si introduce ora il concetto di **ideale**.

Definizione 1.27. Si definisce ideale rispetto all'anello A un insieme I avente le seguenti proprietà:

- $I \leq A$,
- $\forall a \in A, \forall b \in I, ab \in I$ e $ba \in I$.

Esempio 1.28

Sia I l'insieme dei polinomi di $\mathbb{R}[x]$ tali che 2 ne sia radice. Esso altro non è che un ideale, infatti $0 \in I \wedge \forall f(x), g(x) \in I, (f + g)(2) = 0$ (i.e. $I < \mathbb{R}[x]$) e $\forall f(x) \in A, g(x) \in I, (fg)(2) = 0$.

Proposizione 1.29

Sia I un ideale di A . $1 \in I \implies I = A$.

Dimostrazione. Per le proprietà dell'ideale I , $\forall a \in A, a1 = a \in I \implies A \subseteq I$. Dal momento che anche $I \subseteq A$, si deduce che $I = A$. \square

Proposizione 1.30

Sia $\phi : A \rightarrow B$ un omomorfismo. $\text{Ker } \phi$ è allora un ideale di A .

Dimostrazione. Poiché ϕ è anche un omomorfismo tra gruppi, si deduce che $\text{Ker } \phi \leq A$. Inoltre $\forall a \in A, \forall b \in \text{Ker } \phi, \phi(ab) = \phi(a)\phi(b) = \phi(a)0 = 0 \implies ab \in I$. \square

Proposizione 1.31

Sia $\phi : A \rightarrow B$ un omomorfismo. $\text{Imm } \phi$ è allora un sottoanello di B .

Dimostrazione. Chiaramente $0, 1 \in \text{Imm } \phi$, dal momento che $\phi(0) = 0$, $\phi(1) = 1$. Inoltre, dalla teoria dei gruppi, si ricorda anche che $\text{Imm } \phi \leq B$. Infine, $\forall \phi(a), \phi(b) \in \text{Imm } \phi$, $\phi(a)\phi(b) = \phi(ab) \in \text{Imm } \phi$. \square

Definizione 1.32. Si definisce con la notazione (a) l'ideale *bilatero* generato da a in A , ossia:

$$(a) = \{ba \mid b \in A\} \cup \{ab \mid b \in A\}.$$

Definizione 1.33. Si dice che un ideale I è *principale* o **monogenerato**, quando $\exists a \in I \mid I = (a)$.

Esempio 1.34

In relazione all'Esempio 1.28, l'ideale I è monogenerato^a. In particolare, $I = (x - 2)$.

^aNon è un caso: $\mathbb{R}[x]$, in quanto anello euclideo, si dimostra essere un PID (*principal ideal domain*), ossia un dominio che ammette *solo* ideali monogenerati.

§1.3 Quoziente per un ideale e primo teorema d'isomorfismo

Si definisce invece adesso il concetto di **anello quoziente**, in modo completamente analogo a quello di *gruppo quoziente*:

Definizione 1.35. Sia A un anello e I un suo ideale, si definisce A/I l'anello ottenuto quozientando A per I . Gli elementi di tale anello sono le classi di equivalenza di \sim (i.e. gli elementi di A/\sim), dove $\forall a, b \in A$, $a \sim b \iff a - b \in I$. Tali classi di equivalenza vengono indicate come $a + I$, dove a è un rappresentante della classe. L'anello è così dotato di due operazioni:

- $\forall a, b \in A$, $(a + I) + (b + I) = (a + b) + I$,
- $\forall a, b \in A$, $(a + I)(b + I) = ab + I$.

Osservazione. L'addizione di A/I è ben definita, dal momento che $I \trianglelefteq A$, in quanto sottogruppo di un gruppo abeliano.

Osservazione. Anche la moltiplicazione di A/I è ben definita. Siano $a \sim a'$, $b \sim b'$ quattro elementi di A tali che $a = a' + i_1$ e $b = b' + i_2$ con $i_1, i_2 \in I$. Allora $ab = (a' + i_1)(b' + i_2) = a'b' + \underbrace{i_1b' + i_2a' + i_1i_2}_{\in I} \implies ab \sim a'b'$.

Proposizione 1.36

$A/\{0\} \cong A$.

Dimostrazione. Sia $\pi : A \rightarrow A/\{0\}$, $a \mapsto a + \{0\}$ l'omomorfismo di proiezione al quoziente. Innanzitutto, $a \sim a' \iff a - a' = 0 \iff a = a'$, per cui π è un monomorfismo (altrimenti si troverebbero due $a, b \mid a \neq b \wedge a \sim b$). Infine, π è un epimorfismo, dal momento che $\forall a + \{0\} \in A/\{0\}$, $\pi(a) = a + \{0\}$. Pertanto π è un isomorfismo. \square

Adesso è possibile enunciare il seguente fondamentale teorema:

Teorema 1.37 (*Primo teorema d'isomorfismo*)

Sia $\phi : A \rightarrow B$ un omomorfismo. $A/\text{Ker } \phi \cong \text{Imm } \phi$.

Dimostrazione. La dimostrazione procede in modo analogo a quanto visto per il teorema correlato in teoria dei gruppi.

Sia $\zeta : A/\text{Ker } \phi \rightarrow \text{Imm } \phi$, $a + \text{Ker } \phi \mapsto \phi(a)$. Si verifica che ζ è un omomorfismo: essendolo già per i gruppi, è sufficiente verificare che $\zeta((a + I)(b + I)) = \zeta(ab + I) = \phi(ab) = \phi(a)\phi(b) = \zeta(a + I)\zeta(b + I)$.

ζ è chiaramente anche un epimorfismo, dal momento che $\forall \phi(a) \in \text{Imm } \phi$, $\zeta(a + \text{Ker } \phi) = \phi(a)$. Inoltre, dal momento che $\zeta(a + \text{Ker } \phi) = 0 \iff \phi(a) = 0 \iff a + \text{Ker } \phi = \text{Ker } \phi$, ossia l'identità di $A/\text{Ker } \phi$, si deduce anche che ζ è un monomorfismo. Pertanto ζ è un isomorfismo. \square

Corollario 1.38

Sia $\phi : A \rightarrow B$ un monomorfismo. $A \cong \text{Imm } \phi$.

Dimostrazione. Poiché ϕ è un monomorfismo, $\text{Ker } \phi = \{0\}$. Allora, per il *Primo teorema di isomorfismo*, $A/\{0\} \cong \text{Imm } \phi$. Dalla *Proposizione 1.36*, si desume che $A \cong A/\{0\}$. Allora, per la proprietà transitiva degli isomorfismi, $A \cong \text{Imm } \phi$. \square

§2 Anelli euclidei, PID e UFD

§2.1 Prime proprietà

Nel corso della storia della matematica, numerosi studiosi hanno tentato di generalizzare – o meglio, accomunare a più strutture algebriche – il concetto di divisione euclidea che era stato formulato per l'anello dei numeri interi \mathbb{Z} e, successivamente, per l'anello dei polinomi $\mathbb{K}[x]$. Lo sforzo di questi studiosi ad oggi è converso in un'unica definizione, quella di anello euclideo, di seguito presentata.

Definizione 2.1. Un **anello euclideo** è un dominio d'integrità D^a sul quale è definita una funzione g detta **funzione grado** o *norma* soddisfacente le seguenti proprietà:

- $g : D \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{N}$,
- $\forall a, b \in D \setminus \{0\}, g(a) \leq g(ab)$,
- $\forall a \in D, b \in D \setminus \{0\}, \exists q, r \in D \mid a = bq + r \text{ e } r = 0 \vee g(r) < g(b)$.

^aDifatti, nella letteratura inglese, si parla di *Euclidean domain* piuttosto che di anello.

Di seguito vengono presentate alcune definizioni, correlate alle proprietà immediate di un anello euclideo.

Definizione 2.2. Dato un anello euclideo E , siano $a \in E$ e $b \in E \setminus \{0\}$. Si dice che $b \mid a$, ossia che b *divide* a , se $\exists c \in E \mid a = bc$.

Osservazione. Si osserva che, per ogni anello euclideo E , qualsiasi $a \in E$ divide 0. Infatti, $0 = a0$.

Proposizione 2.3

Dato un anello euclideo E , $a \mid b \wedge b \nmid a \implies g(a) < g(b)$.

Dimostrazione. Poiché $b \nmid a$, esistono q, r tali che $a = bq + r$, con $g(r) < g(b)$. Dal momento però che $a \mid b$, $\exists c \mid b = ac$. Pertanto $a = ac + r \implies r = a(1 - c)$. Dacché $1 - c \neq 0$ – altrimenti $r = 0$, \nmid –, così come $a \neq 0$, si deduce dalle proprietà della funzione grado che $g(a) \leq g(r)$. Combinando le due disuguaglianze, si ottiene la tesi: $g(a) < g(b)$. \square

Proposizione 2.4

$g(1)$ è il minimo di $\text{Imm } g$, ossia il minimo grado assumibile da un elemento di un anello euclideo E .

Dimostrazione. Sia $a \in E \setminus \{0\}$, allora, per le proprietà della funzione grado, $g(1) \leq g(1a) = g(a)$. \square

Teorema 2.5

Sia $a \in E \setminus \{0\}$, allora $a \in E^* \iff g(a) = g(1)$.

Dimostrazione. Dividiamo la dimostrazione in due parti, ognuna corrispondente a una implicazione.

(\implies) Sia $a \in E^*$, allora $\exists b \in E^*$ tale che $ab = 1$. Poiché sia a che b sono diversi da 0, dalle proprietà della funzione grado si desume che $g(a) \leq g(ab) = g(1)$. Poiché, dalla *Proposizione 2.4*, $g(1)$ è minimo, si conclude che $g(a) = g(1)$.

(\impliedby) Sia $a \in E \setminus \{0\}$ con $g(a) = g(1)$. Allora esistono q, r tali che $1 = aq + r$. Vi sono due possibilità: che r sia 0, o che $g(r) < g(a)$. Tuttavia, poiché $g(a) = g(1)$, dalla *Proposizione 2.4* si desume che $g(a)$ è minimo, e quindi che r è nullo. Si conclude quindi che $aq = 1$, e dunque che $a \in E^*$. \square

§2.2 Irriducibili e prime definizioni

Come accade nell'aritmetica dei numeri interi, anche in un dominio è possibile definire una nozione di *primo*. In un dominio possono essere tuttavia definiti due tipi di "primi", gli elementi *irriducibili* e gli elementi *primi*.

Definizione 2.6. In un dominio A , si dice che $a \in A \setminus A^*$ è **irriducibile** se $\exists b, c \mid a = bc \implies b \in A^* \text{ o } c \in A^*$.

Osservazione. Dalla definizione si escludono gli invertibili di A per permettere di definire meglio il concetto di fattorizzazione in seguito. Infatti, se li avessimo inclusi, avremmo che ogni dominio sarebbe a fattorizzazione non unica, dal momento che $a = bc$ potrebbe essere scritto anche come $a = 1bc$.

Definizione 2.7. Si dice che due elementi non nulli a, b appartenenti a un anello euclideo E sono **associati** se $a \mid b$ e $b \mid a$.

Proposizione 2.8

a e b sono associati $\iff \exists c \in E^* \mid a = bc$ e a, b entrambi non nulli.

Dimostrazione. Si dimostrano le due implicazioni separatamente.

(\implies) Se a e b sono associati, allora $\exists d, e$ tali che $a = bd$ e che $b = ae$. Combinando le due relazioni si ottiene:

$$a = aed \implies a(1 - ed) = 0.$$

Poiché a è diverso da zero, si ricava che $ed = 1$, ossia che $d, e \in E^*$, e quindi la tesi.

(\impliedby) Se a e b sono entrambi non nulli e $\exists c \in E^* \mid a = bc$, b chiaramente divide a . Inoltre, $a = bc \implies b = ac^{-1}$, e quindi anche a divide b . Pertanto a e b sono associati. \square

Proposizione 2.9

Siano a e b due associati in E . Allora $a \mid c \implies b \mid c$.

Dimostrazione. Poiché a e b sono associati, per la *Proposizione 2.8*, $\exists d \in E^*$ tale che $a = db$. Dal momento che $a \mid c$, $\exists \alpha \in E$ tale che $c = \alpha a$, quindi:

$$c = \alpha a = \alpha db,$$

da cui la tesi. \square

Proposizione 2.10

Siano a e b due associati in E . Allora $(a) = (b)$.

Dimostrazione. Poiché a e b sono associati, $\exists d \in E^*$ tale che $a = db$. Si dimostra l'uguaglianza dei due insiemi.

Sia $\alpha = ak \in (a)$, allora $\alpha = dbk$ appartiene anche a (b) , quindi $(a) \subseteq (b)$. Sia invece $\beta = bk \in (b)$, allora $\beta = d^{-1}ak$ appartiene anche a (a) , da cui $(b) \subseteq (a)$. Dalla doppia inclusione si verifica la tesi, $(a) = (b)$. \square

Definizione 2.11. In un dominio A , si dice che $a \in A \setminus A^*$ è **primo** se $a \mid bc \implies a \mid b \vee a \mid c$.

Proposizione 2.12

Se $a \in A$ è primo, allora a è anche irriducibile.

Dimostrazione. Si dimostra la tesi contronominale. Sia a non irriducibile. Se $a \in A^*$, allora a non può essere primo. Altrimenti $a = bc$ con $b, c \in A \setminus A^*$.

Chiaramente $a \mid bc$, ossia sé stesso. Senza perdita di generalità, se $a \mid b$, dal momento che anche $b \mid a$, si dedurrebbe che a e b sono associati secondo la *Proposizione 2.8*. Tuttavia questo implicherebbe che $c \in A^*$, \nexists . \square

§2.3 PID e MCD

Come accade per \mathbb{Z} , in ogni anello euclideo è possibile definire il concetto di *massimo comun divisore*, sebbene con qualche accortezza in più. Pertanto, ancor prima di definirlo, si enuncia la definizione di PID e si dimostra un teorema fondamentale degli anelli euclidei, che si ripresenterà in seguito come ingrediente fondamentale per la fondazione del concetto di MCD.

Definizione 2.13. Si dice che un dominio è un *principal ideal domain* (PID)^a se ogni suo ideale è monogenerato.

^aOssia un dominio a soli ideali principali, quindi monogenerati, proprio come da definizione.

Teorema 2.14

Sia E un anello euclideo. Allora E è un PID.

Dimostrazione. Sia I un ideale di E . Se $I = (0)$, allora I è già monogenerato. Altrimenti si consideri l'insieme $g(I \setminus \{0\})$. Poiché $g(I \setminus \{0\}) \subseteq \mathbb{N}$, esso ammette un minimo per il principio del buon ordinamento.

Sia $m \in I$ un valore che assume tale minimo e sia $a \in I$. Poiché E è euclideo, $\exists q, r \mid a = mq + r$ con $r = 0$ o $g(r) < g(m)$. Tuttavia, poiché $r = a - mq \in I$ e $g(m)$ è minimo, necessariamente $r = 0$ – altrimenti r sarebbe ancor più minimo di m , $\nexists -$, quindi $m \mid a, \forall a \in I$. Quindi $I \subseteq (m)$.

Dal momento che per le proprietà degli ideali $\forall a \in E, ma \in I$, si conclude che $(m) \subseteq I$. Quindi $I = (m)$. \square

Adesso è possibile definire il concetto di massimo comun divisore, basandoci sul fatto che ogni anello euclideo è un PID.

Definizione 2.15. Sia D un dominio e siano $a, b \in D$. Si definisce *massimo comun divisore (MCD)* di a e b un generatore dell'ideale (a, b) .

Osservazione. Questa definizione di MCD è una buona definizione dal momento che sicuramente esiste un generatore dell'ideale (a, b) , dacché D è un PID.

Osservazione. Non si parla di un unico massimo comun divisore, dal momento che potrebbero esservi più generatori dell'ideale (a, b) . Segue tuttavia che tutti questi generatori sono in realtà associati^a. Quando si scriverà $\text{MCD}(a, b)$ s'intenderà quindi uno qualsiasi di questi associati.

^aInfatti ogni generatore divide ogni altro elemento di un ideale, e così i vari generatori si dividono tra di loro. Pertanto sono associati.

Teorema 2.16 (*Identità di Bézout*)

Sia d un MCD di a e b . Allora $\exists \alpha, \beta$ tali che $d = \alpha a + \beta b$.

Dimostrazione. Il teorema segue dalla definizione di MCD come generatore dell'ideale (a, b) . Infatti, poiché $d \in (a, b)$, esistono sicuramente, per definizione, α e β tali che $d = \alpha a + \beta b$. \square

Proposizione 2.17

Siano $a, b \in D$. Allora vale la seguente equivalenza:

$$d = \text{MCD}(a, b) \iff \begin{cases} d \mid a \wedge d \mid b \\ \forall c \text{ t.c. } c \mid a \wedge c \mid b, c \mid d \end{cases}$$

Dimostrazione. Si dimostrano le due implicazioni separatamente.

(\implies) Poiché d è generatore dell'ideale (a, b) , la prima proprietà segue banalmente.

Inoltre, per l'*Identità di Bézout*, $\exists \alpha, \beta$ tali che $d = \alpha a + \beta b$. Allora, se $c \mid a$ e $c \mid b$, sicuramente esistono γ e δ tali che $a = \gamma c$ e $b = \delta c$. Pertanto si verifica la seconda proprietà, e quindi la tesi:

$$d = \alpha a + \beta b = \alpha \gamma c + \beta \delta c = c(\alpha \gamma + \beta \delta).$$

(\Leftarrow) Sia $m = \text{MCD}(a, b)$. Dal momento che d divide sia a che b , d deve dividere, per l'implicazione scorsa, anche m . Per la seconda proprietà, m divide d a sua volta. Allora d è un associato di m , e quindi, dalla *Proposizione 2.10*, $(m) = (d) = (a, b)$, da cui $d = \text{MCD}(a, b)$. \square

Proposizione 2.18

Se $a \mid bc$ e $d = \text{MCD}(a, b) \in D^*$, allora $a \mid c$.

Dimostrazione. Per l'*Identità di Bézout* $\exists \alpha, \beta$ tali che $\alpha a + \beta b = d$. Allora, poiché $a \mid bc$, $\exists \gamma$ tale che $bc = a\gamma$. Si verifica quindi la tesi:

$$\alpha a + \beta b = d \implies \alpha ac + \beta bc = dc \implies ad^{-1}(\alpha c + \beta \gamma) = c.$$

\square

Lemma 2.19

Se a è un irriducibile di un PID D , allora $\forall b \in D$, $(a, b) = D \vee (a, b) = (a)$, o equivalentemente $\text{MCD}(a, b) \in D^*$ o $\text{MCD}(a, b) = a$.

Dimostrazione. Dacché $\text{MCD}(a, b) \mid a$, le uniche opzioni, dal momento che a è irriducibile, sono che $\text{MCD}(a, b)$ sia un invertibile o che sia un associato di a stesso. \square

Teorema 2.20

Se a è un irriducibile di un PID D , allora a è anche un primo.

Dimostrazione. Siano b e c tali che $a \mid bc$. Per il *Lemma 2.19*, $\text{MCD}(a, b)$ può essere solo un associato di a o essere un invertibile. Se è un associato di a , allora, per la *Proposizione 2.9*, poiché $\text{MCD}(a, b)$ divide b , anche a divide b . Altrimenti $\text{MCD}(a, b) \in D^*$, e quindi, per la *Proposizione 2.18*, $a \mid c$. \square

§2.4 L'algoritmo di Euclide

Per algoritmo di Euclide si intende un algoritmo che è in grado di produrre in un numero finito di passi un MCD tra due elementi a e b non entrambi nulli di un anello euclideo². L'algoritmo classico è di seguito presentato:

²Si richiede che l'anello sia euclideo e non soltanto che sia un PID, dal momento che l'algoritmo usufruisce delle proprietà della funzione grado.

```

 $e \leftarrow \max(a, b);$ 
 $d \leftarrow \min(a, b);$ 

while  $d > 0$  do
   $m \leftarrow d;$ 
   $d \leftarrow e \bmod d;$ 
   $e \leftarrow m;$ 
end

```

dove e è l'MCD ricercato e l'operazione \bmod restituisce un resto della divisione euclidea³.

Lemma 2.21

L'algoritmo di Euclide termina sempre in un numero finito di passi.

Dimostrazione. Se d è pari a 0, l'algoritmo termina immediatamente.

Altrimenti si può costruire una sequenza $(g(d_i))_{i \geq 1}$ dove d_i è il valore di d all'inizio di ogni i -esimo ciclo **while**. Ad ogni ciclo vi sono due casi: se d_i si annulla dopo l'operazione di \bmod , il ciclo si conclude al passo successivo, altrimenti, poiché d_i è un resto di una divisione euclidea, segue che $g(d_i) < g(d_{i-1})$, dove si pone $d_0 = \min(a, b)$.

Per il principio della discesa infinita, $(g(d_i))_{i \geq 1}$ non può essere una sequenza infinita, essendo strettamente decrescente. Quindi la sequenza è finita, e pertanto il ciclo **while** s'interrompe dopo un numero finito di passi. \square

Lemma 2.22

Sia $r = a \bmod b$. Allora vale che $(a, b) = (b, r)$.

Dimostrazione. Poiché $r = a \bmod b$, $\exists q$ tale che $a = qb + r$. Siano k_1 e k_2 tali che $(k_1) = (a, b)$ e $(k_2) = (b, r)$. Dal momento che k_1 divide sia a che b , si ha che divide anche r . Siano α, β tali che $a = \alpha k_1$ e $b = \beta k_1$. Si verifica infatti che:

$$r = a - qb = \alpha k_1 - q\beta k_1 = k_1(\alpha - q\beta).$$

Poiché k_1 divide sia b che r , per le proprietà del MCD, k_1 divide anche k_2 . Analogamente, k_2 divide k_1 . Pertanto k_1 e k_2 sono associati, e dalla *Proposizione 2.10* generano quindi lo stesso ideale, da cui la tesi. \square

Teorema 2.23

L'algoritmo di Euclide restituisce sempre correttamente un MCD tra due elementi a e b non entrambi nulli in un numero finito di passi.

Dimostrazione. Per il *Lemma 2.21*, l'algoritmo sicuramente termina. Se d è pari a 0, allora l'algoritmo termina restituendo e . Il valore è corretto, dal momento che, senza perdita di generalità, se b è nullo, allora $\text{MCD}(a, b) = a$: infatti a divide sia sé stesso che

³Ossia $a \bmod b$ restituisce un r tale che $\exists q \mid a = bq + r$ con $r = 0$ o $g(r) < g(b)$.

0, e ogni divisore di a è sempre un divisore di 0.

Se invece d non è pari a 0, si scelga il d_n tale che $g(d_n)$ sia l'ultimo elemento della sequenza $(g(d_i))_{i \geq 1}$ definita nel Lemma 2.21. Per il Lemma 2.22, si ha la seguente uguaglianza:

$$(e_0, d_0) = (d_0, d_1) = \cdots = (d_n, 0) = (d_n).$$

Poiché quindi d_n è generatore di $(e_0, d_0) = (a, b)$, $d_n = \text{MCD}(a, b)$. □

§2.5 UFD e fattorizzazione

Si enuncia ora la definizione fondamentale di UFD, sulla quale costruiremo un teorema fondamentale per gli anelli euclidei.

Definizione 2.24. Si dice che un dominio D è uno *unique factorization domain* (**UFD**)^a se ogni $a \in D$ non nullo e non invertibile può essere scritto in forma unica come prodotto di irriducibili, a meno di associati.

^aOssia un dominio a fattorizzazione unica.

Lemma 2.25

Sia E un anello euclideo. Allora ogni elemento $a \in E$ non nullo e non invertibile può essere scritto come prodotto di irriducibili.

Dimostrazione. Si definisca A nel seguente modo:

$$A = \{g(a) \mid a \in E \setminus (E^* \cup \{0\}) \text{ non sia prodotto di irriducibili}\}.$$

Se $A \neq \emptyset$, allora, poiché $A \subseteq \mathbb{N}$, per il principio del buon ordinamento, esiste un $m \in E$ tale che $g(m)$ sia minimo. Sicuramente m non è irriducibile – altrimenti $g(m) \notin A$, \nexists –, quindi $m = ab$ con $a, b \in E \setminus E^*$.

Poiché $a \mid m$, ma $m \nmid a$ – altrimenti a e m sarebbero associati, e quindi b sarebbe invertibile –, si deduce che $g(a) < g(m)$, e quindi che $g(a) \notin A$. Allora a può scriversi come prodotto di irriducibili. Analogamente anche b può scriversi come prodotto di irriducibili, e quindi m , che è il prodotto di a e b , è prodotto di irriducibili, \nexists .

Quindi $A = \emptyset$, e ogni $a \in E$ non nullo e non invertibile è prodotto di irriducibili. □

Teorema 2.26

Sia E un anello euclideo. Allora E è un UFD^a.

^aIn realtà questo teorema è un caso particolare di un teorema più generale: ogni PID è un UFD. Poiché la dimostrazione esula dalle intenzioni di queste dispense, si è preferito dimostrare il caso più familiare. Per la dimostrazione del teorema più generale si rimanda a [DM, pp. 124-126].

Dimostrazione. Innanzitutto, per il Lemma 2.25, ogni $a \in E$ non invertibile e non nullo ammette una fattorizzazione.

Sia allora $a \in E$ non invertibile e non nullo. Affinché E sia un UFD, deve verificarsi la seguente condizione: se $a = p_1 p_2 \cdots p_r = q_1 q_2 \cdots q_s \in E$, allora $r = s$ ed esiste una permutazione $\sigma \in S_r$ tale per cui σ associi a ogni indice i di un p_i un indice j di un q_j in modo tale che p_i e q_j siano associati.

Si procede per induzione.

(*passo base*) Se $r = 1$, allora a è irriducibile. Allora necessariamente $s = 1$, altrimenti a sarebbe prodotto di irriducibili, e quindi contemporaneamente anche non irriducibile. Inoltre esiste la permutazione banale $e \in S_1$ che associa p_1 a q_1 .

(*passo induttivo*) Si assume che valga la tesi se a è prodotto di $r - 1$ irriducibili. Si consideri p_1 : poiché p_1 divide a , p_1 divide anche $q_1 q_2 \cdots q_s$. Dal momento che E , in quanto anello euclideo, è anche un dominio, dal *Teorema 2.20*, p_1 è anche primo, e quindi $p_1 \mid q_1$ o $p_1 \mid q_2 \cdots q_s$.

Se $p_1 \nmid q_1$ si reitera il procedimento su $q_2 \cdots q_s$, trovando in un numero finito di passi un q_j tale per cui $p_1 \mid q_j$. Allora si procede la dimostrazione scambiando q_1 e q_j .

Poiché q_1 è irriducibile, p_1 e q_1 sono associati, ossia $q_1 = kp_1$ con $k \in E^*$. Allora $p_1 \cdots p_r = q_1 \cdots q_s = kp_1 \cdots q_s$, quindi, dal momento che $p_1 \neq 0$ ed E è un dominio:

$$p_1(p_2 \cdots p_r - kq_2 \cdots q_s) = 0 \implies p_2 \cdots p_r = kq_2 \cdots q_s.$$

Tuttavia il primo membro è un prodotto $r - 1$ irriducibili, pertanto $r = s$ ed esiste un $\sigma \in S_{r-1}$ che associa ad ogni irriducibile p_i un suo associato q_i . Allora si estende σ a S_r mappando p_1 a q_1 , verificando la tesi. \square

§3 Esempi notevoli di anelli euclidei

§3.1 I numeri interi: \mathbb{Z}

Senza ombra di dubbio l'esempio più importante di anello euclideo – nonché l'esempio da cui si è generalizzata proprio la stessa nozione di anello euclideo – è l'anello dei numeri interi.

In questo dominio la funzione grado è canonicamente il valore assoluto:

$$g : \mathbb{Z} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{N}, k \mapsto |k|.$$

Infatti, chiaramente $|a| \leq |ab| \forall a, b \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Inoltre esistono – e sono anche unici, a meno di segno – $q, r \in \mathbb{Z} \mid a = bq + r$, con $r = 0 \vee |r| < |q|$.

Dal momento che così si verifica che \mathbb{Z} è un anello euclideo, il *Teorema fondamentale dell'aritmetica* è una conseguenza del *Teorema 2.26*.

§3.2 I campi: \mathbb{K}

Ogni campo \mathbb{K} è un anello euclideo, seppur banalmente. Infatti, eccetto proprio per 0, ogni elemento è "divisibile" per ogni altro elemento: siano $a, b \in \mathbb{K}$, allora $a = ab^{-1}b$.

Si definisce quindi la funzione grado come la funzione nulla:

$$g : \mathbb{K}^* \rightarrow \mathbb{N}, a \mapsto 0.$$

Chiaramente g soddisfa il primo assioma della funzione grado. Inoltre, poiché ogni elemento è "divisibile", il resto è sempre zero – non è pertanto necessario verificare nessun'altra proprietà.

§3.3 I polinomi di un campo: $\mathbb{K}[x]$

I polinomi di un campo \mathbb{K} formano un anello euclideo rilevante nello studio dell'algebra astratta. Come suggerisce la terminologia, la funzione grado in questo dominio coincide proprio con il grado del polinomio, ossia si definisce come:

$$g : \mathbb{K}[x] \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{N}, f(x) \mapsto \deg f.$$

Si verifica facilmente che $g(a(x)) \leq g(a(x)b(x)) \forall a(x), b(x) \in \mathbb{K}[x] \setminus \{0\}$, mentre la divisione euclidea – come negli interi – ci permette di concludere che effettivamente $\mathbb{K}[x]$ soddisfa tutti gli assiomi di un anello euclideo⁴.

Esempio 3.1

Sia $\alpha \in \mathbb{K}$ e sia $\varphi_\alpha : \mathbb{K}[x] \rightarrow \mathbb{K}, f(x) \mapsto f(\alpha)$ la sua valutazione polinomiale in $\mathbb{K}[x]$. φ_α è un omomorfismo, il cui nucleo è rappresentato dai polinomi in $\mathbb{K}[x]$ che hanno α come radice. Poiché $\mathbb{K}[x]$ è un PID, $\text{Ker } \varphi$ deve essere monogenerato. $x - \alpha \in \text{Ker } \varphi$ è irriducibile, e quindi è il generatore dell'ideale. Si desume così che $\text{Ker } \varphi = (x - \alpha)$.

⁴Curiosamente i polinomi di $\mathbb{K}[x]$ e i campi \mathbb{K} sono gli unici anelli euclidei in cui resti e quozienti sono unici, includendo la scelta di segno (vd. [1]).

§3.4 Gli interi di Gauss: $\mathbb{Z}[i]$

Un importante esempio di anello euclideo è il dominio degli interi di Gauss $\mathbb{Z}[i]$, definito come:

$$\mathbb{Z}[i] = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{Z}\}.$$

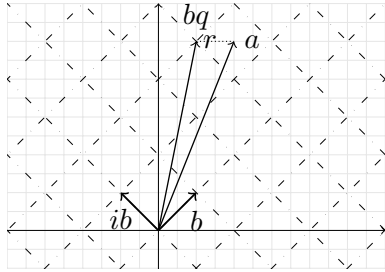


Figura 1: Visualizzazione della divisione euclidea nel piano degli interi di Gauss.

La funzione grado coincide in particolare con il quadrato del modulo di un numero complesso, ossia:

$$g(z) : \mathbb{Z}[i] \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{N}, a + bi \mapsto |a + bi|^2.$$

Il vantaggio di quest'ultima definizione è l'enfasi sul collegamento tra la funzione grado di \mathbb{Z} e quella di $\mathbb{Z}[i]$. Infatti, se $a \in \mathbb{Z}$, il grado di a in \mathbb{Z} e in $\mathbb{Z}[i]$ sono uno il quadrato dell'altro. In particolare, è possibile ridefinire il grado di \mathbb{Z} proprio in modo tale da farlo coincidere con quello di $\mathbb{Z}[i]$.

Teorema 3.2

$\mathbb{Z}[i]$ è un anello euclideo.

Dimostrazione. Si verifica la prima proprietà della funzione grado. Siano $a, b \in \mathbb{Z}[i] \setminus \{0\}$, allora $|a| \geq 1 \wedge |b| \geq 1$. Poiché $|ab| = |a||b|$ ⁵, si verifica facilmente che $|ab| \geq |a|$, ossia che $g(ab) \geq g(a)$.

Si verifica infine che esiste una divisione euclidea, ossia che $\forall a \in \mathbb{Z}[i], \forall b \in \mathbb{Z}[i] \setminus \{0\}, \exists q, r \in \mathbb{Z}[i] \mid a = bq + r$ e $r = 0 \vee g(r) < g(b)$. Come si visualizza facilmente nella *Figura 1*, tutti i multipli di b formano un piano con basi b e ib , dove sicuramente esiste un certo q tale che la distanza $|r| = |a - bq|$ sia minima.

Se a è un multiplo di b , vale sicuramente che $a = bq$. Altrimenti dal momento che r è sicuramente inquadrato in uno dei tasselli del piano, vale sicuramente la seguente disuguaglianza, che lega il modulo di r alla diagonale di ogni quadrato:

$$|r| \leq \frac{|b|}{\sqrt{2}}.$$

Pertanto vale la seconda e ultima proprietà della funzione grado:

$$|r| \leq \frac{|b|}{\sqrt{2}} < |b| \implies |r|^2 < |b|^2 \implies g(r) < g(b).$$

□

⁵Questa interessante proprietà del modulo è alla base dell'identità di Brahmagupta-Fibonacci: $(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (ac - bd)^2 + (ad + bc)^2$.

§3.5 Gli interi di Eisenstein: $\mathbb{Z}[\omega]$

Sulla scia di $\mathbb{Z}[i]$ è possibile definire anche l'anello degli interi di Eisenstein, aggiungendo a \mathbb{Z} la prima radice cubica primitiva dell'unità in senso antiorario, ossia:

$$\omega = e^{\frac{2\pi i}{3}} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i.$$

In particolare, ω è una delle due radici dell'equazione $z^2 + z + 1 = 0$, dove invece l'altra radice altro non è che $\omega^2 = \bar{\omega}$.

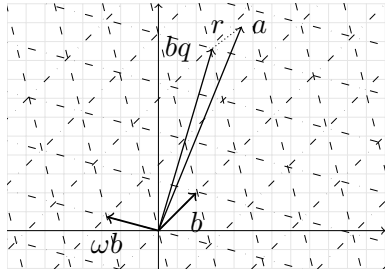


Figura 2: Visualizzazione della divisione euclidea nel piano degli interi di Eisenstein.

La funzione grado in $\mathbb{Z}[\omega]$ deriva da quella di $\mathbb{Z}[i]$ e coincide ancora con il quadrato del modulo del numero complesso. Si definisce quindi:

$$g : \mathbb{Z}[\omega] \setminus \{0\}, a + b\omega \mapsto |a + b\omega|^2.$$

Sviluppando il modulo è possibile ottenere una formula più concreta:

$$|a + b\omega|^2 = \left| \left(a - \frac{b}{2} \right) + \frac{b\sqrt{3}}{2}i \right|^2 =$$

$$= \left(a - \frac{b}{2} \right)^2 + \frac{3b^2}{4} = a^2 - ab + b^2.$$

Teorema 3.3

$\mathbb{Z}[\omega]$ è un anello euclideo.

Dimostrazione. Sulla scia della dimostrazione presentata per $\mathbb{Z}[i]$, si verifica facilmente la prima proprietà della funzione grado. Siano $a, b \in \mathbb{Z}[\omega]$, allora $|a| \geq 1$ e $|b| \geq 1$. Poiché dalle proprietà dei numeri complessi vale ancora $|a| |b| \geq |a|$, la proprietà $g(ab) \geq g(a)$ è già verificata.

Si verifica infine la seconda e ultima proprietà della funzione grado. Come per $\mathbb{Z}[i]$, i multipli di $b \in \mathbb{Z}[\omega]$ sono visualizzati su un piano che ha per basi b e ωb (come in Figura 2), pertanto esiste sicuramente un q tale che la distanza $|a - bq|$ sia minima.

Se a è multiplo di b , allora chiaramente $a = bq$. Altrimenti, a è certamente inquadrato in uno dei triangoli del piano, per cui vale la seguente disuguaglianza:

$$|r| \leq \frac{\sqrt{3}}{2} |b|.$$

Dunque la tesi è verificata:

$$|r| \leq \frac{\sqrt{3}}{2} |b| < |b| \implies |r|^2 < |b|^2 \implies g(r) < g(b).$$

□

§4 Irriducibili e corollari di aritmetica in $\mathbb{Z}[i]$

Come già dimostrato, $\mathbb{Z}[i]$ è un anello euclideo con la seguente funzione grado:

$$g : \mathbb{Z}[i] \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{Z}, a + bi \mapsto \|a + bi\|^2.$$

A partire da questo preconetto è possibile dimostrare un teorema importante in aritmetica, il *Teorema di Natale di Fermat*, che discende direttamente come corollario di un teorema più generale riguardante $\mathbb{Z}[i]$.

§4.1 Il teorema di Natale di Fermat e gli irriducibili in $\mathbb{Z}[i]$

Lemma 4.1

Sia p un numero primo riducibile in $\mathbb{Z}[i]$, allora p può essere scritto come somma di due quadrati in \mathbb{Z} .

Dimostrazione. Se p è riducibile in $\mathbb{Z}[i]$, allora esistono $a + bi$ e $c + di$ appartenenti a $\mathbb{Z}[i] \setminus \mathbb{Z}[i]^*$ tali che $p = (a + bi)(c + di)$.

Impiegando le proprietà dell'operazione di coniugio si ottiene la seguente equazione:

$$\bar{p} = p = (a - bi)(c - di) \implies p^2 = p\bar{p} = (a^2 + b^2)(c^2 + d^2).$$

Dal momento che $a + bi$ e $c + di$ non sono invertibili, i valori della funzione grado calcolati in essi sono strettamente maggiori del valore assunto nell'unità, ovvero:

$$a^2 + b^2 > 1, \quad c^2 + d^2 > 1.$$

Allora devono per forza valere le seguenti equazioni:

$$p = a^2 + b^2, \quad p = c^2 + d^2,$$

da cui la tesi. □

Lemma 4.2

Sia p un numero primo tale che $p \equiv 1 \pmod{4}$. Allora esiste un $x \in \mathbb{Z}$ tale che $p \mid x^2 + 1$.

Dimostrazione. Per il *Teorema di Wilson*, $(p - 1)! \equiv -1 \pmod{p}$. Attraverso varie manipolazioni algebriche si ottiene:

$$\begin{aligned} -1 &\equiv 1 \cdots \frac{p-1}{2} \cdot \frac{p+1}{2} \cdots (p-1) \equiv 1 \cdots \frac{p-1}{2} \left(-\frac{p-1}{2}\right) \cdots (-1) \equiv \\ &\equiv (-1)^{\frac{p-1}{2}} \left(\left(\frac{p-1}{2}\right)!\right)^2 \equiv \left(\left(\frac{p-1}{2}\right)!\right)^2 \pmod{p}, \end{aligned}$$

da cui con $x = \left(\frac{p-1}{2}\right)!$ si verifica la tesi. □

Teorema 4.3

Sia p un numero primo tale che $p \equiv 1 \pmod{4}$. Allora p è riducibile in $\mathbb{Z}[i]$.

Dimostrazione. Per il [Lemma 4.2](#), si ha che esiste un $x \in \mathbb{Z}$ tale che $p \mid x^2 + 1$. Se p fosse irriducibile, dacché $\mathbb{Z}[i]$ è un PID in quanto euclideo, p sarebbe anche un primo di $\mathbb{Z}[i]$. Dal momento che $x^2 + 1 = (x + i)(x - i)$, p dovrebbe dividere almeno uno di questi due fattori.

Senza perdita di generalità, si ponga che $p \mid (x + i)$. Allora $\exists a + bi \in \mathbb{Z}[i] \mid x + i = (a + bi)p$. Uguagliando le parti immaginarie si ottiene $bp = 1$, che non ammette soluzioni, \nexists . Pertanto p è riducibile. \square

Corollario 4.4 (Teorema di Natale di Fermat)

Sia p un numero primo tale che $p \equiv 1 \pmod{4}$. Allora p è somma di due quadrati in \mathbb{Z} .

Dimostrazione. Per il [Teorema 4.3](#), p è riducibile in $\mathbb{Z}[i]$. In quanto riducibile in $\mathbb{Z}[i]$, per il [Lemma 4.1](#), p è allora somma di due quadrati. \square

Teorema 4.5

Sia p un numero primo tale che $p \equiv -1 \pmod{4}$. Allora p è irriducibile in $\mathbb{Z}[i]$.

Dimostrazione. Se p fosse riducibile in $\mathbb{Z}[i]$, per il [Teorema di Natale di Fermat](#) esisterebbero a e b in \mathbb{Z} tali che $p = a^2 + b^2$. Dal momento che p è dispari, possiamo supporre, senza perdita di generalità, che a sia pari e che b sia dispari. Pertanto $a^2 \equiv 0 \pmod{4}$ e $b^2 \equiv 1 \pmod{4}$, dacché sono uno pari e l'altro dispari⁶. Tuttavia la congruenza $a^2 + b^2 \equiv 1 \equiv -1 \pmod{4}$ non è mai soddisfatta, \nexists . Pertanto p può essere solo irriducibile. \square

Osservazione. Si osserva che $2 = (1 + i)(1 - i)$. Dal momento che $\|1 + i\|^2 = \|1 - i\|^2 = 2 \neq 1$, si deduce che nessuno dei due fattori è invertibile. Pertanto 2 non è irriducibile.

Proposizione 4.6

Gli unici primi $p \in \mathbb{Z}$ irriducibili in $\mathbb{Z}[i]$ sono i primi p tali che $p \equiv -1 \pmod{4}$.

Dimostrazione. Per l'osservazione precedente, 2 non è irriducibile in $\mathbb{Z}[i]$, così come i primi congrui a 1 in modulo 4, per il [Teorema 4.3](#). Al contrario i primi p congrui a -1 in modulo 4 sono irriducibili, per il [Teorema 4.5](#), da cui la tesi. \square

Teorema 4.7

$z \in \mathbb{Z}[i]$ è irriducibile se e solo se z è un associato di un $k \in \mathbb{Z}$ tale che $k \equiv -1 \pmod{4}$, o se $\|z\|^2$ è primo.

⁶Infatti, $0^2 \equiv 0 \pmod{4}$, $1^2 \equiv 1 \pmod{4}$, $2^2 \equiv 4 \equiv 0 \pmod{4}$, $3^2 \equiv 9 \equiv 1 \pmod{4}$.

Dimostrazione. Si dimostrano le due implicazioni separatamente.

(\implies) Sia $z \in \mathbb{Z}[i]$ irriducibile. Chiaramente $z \mid z\bar{z} = g(z)$. Dacché \mathbb{Z} è un UFD, $g(z)$ può decomporre in un prodotto di primi $q_1 q_2 \cdots q_n$. Dal momento che $\mathbb{Z}[i]$ è un PID, in quanto anello euclideo, z deve dividere uno dei primi della fattorizzazione di $g(z)$. Si assuma che tale primo sia q_i . Allora esiste un $w \in \mathbb{Z}[i]$ tale che $q_i = wz$.

Se $w \in \mathbb{Z}[i]^*$, si deduce che z è un associato di q_i . Dal momento che z è irriducibile, q_i , che è suo associato, è a sua volta irriducibile. Allora, per la *Proposizione 4.6*, $q_i \equiv -1 \pmod{4}$.

Altrimenti, se w non è invertibile, si ha che $g(w) > g(1)$, ossia che $\|w\|^2 > 1$. Inoltre in quanto irriducibile, anche z non è invertibile, e quindi $g(z) > g(1) \implies \|z\|^2 > 1$. Dalla proprietà moltiplicativa del modulo si ricava $q_i^2 = \|q_i\|^2 = \|w\|^2 \|z\|^2$, da cui necessariamente consegue che:

$$\|w\|^2 = q_i, \quad \|z\|^2 = q_i,$$

attraverso cui si verifica l'implicazione.

(\impliedby) Se $k \in \mathbb{Z}$ e $k \equiv -1 \pmod{4}$, per il *Teorema 4.5*, k è irriducibile. Allora in quanto suo associato, anche z è irriducibile.

Altrimenti, se $\|z\|^2$ è un primo p , si ponga $z = ab$ con a e $b \in \mathbb{Z}[i]$. Per la proprietà moltiplicativa del modulo, $p = \|z\|^2 = \|ab\|^2 = \|a\|^2 \|b\|^2$. Tuttavia questo implica che uno tra $\|a\|^2$ e $\|b\|^2$ sia pari a 1, ossia che uno tra a e b sia invertibile, dacché $g(1) = 1$. Pertanto z è in ogni caso irriducibile. \square

Infine si enuncia un'ultima identità inerente all'aritmetica, ma strettamente collegata a $\mathbb{Z}[i]$.

§4.2 L'identità di Brahmagupta-Fibonacci

Proposizione 4.8 (*Identità di Brahmagupta-Fibonacci*)

Il prodotto di due somme di quadrati è ancora una somma di quadrati. In particolare:

$$(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (ac - bd)^2 + (ad + bc)^2.$$

Dimostrazione. La dimostrazione altro non è che una banale verifica algebrica. Ciononostante è possibile risalire a questa identità in via alternativa mediante l'uso del modulo dei numeri complessi.

Siano $z_1 = a + bi$, $z_2 = c + di \in \mathbb{C}$. Allora, per le proprietà del modulo dei numeri complessi:

$$\|z_1\| \|z_2\| = \|z_1 z_2\|. \quad (1)$$

Computando il prodotto tra z_1 e z_2 si ottiene:

$$z_1 z_2 = (ac - bd) + (ad + bc)i,$$

da cui a sua volta si ricava:

$$\|z_1 z_2\| = \sqrt{(ac - bd)^2 + (ad + bc)^2},$$

assieme a:

$$\|z_1\| = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad \|z_2\| = \sqrt{c^2 + d^2}.$$

Infine, da (1), elevando al quadrato, si deduce l'identità presentata:

$$\sqrt{a^2 + b^2} \sqrt{c^2 + d^2} = \sqrt{(ac - bd)^2 + (ad + bc)^2} \implies (a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (ac - bd)^2 + (ad + bc)^2.$$

□

Esempio 4.9

Si consideri $65 = 5 \cdot 13$. Dal momento che sia 5 che 13 sono congrui a 1 in modulo 4, sappiamo già si possono scrivere entrambi come somme di due quadrati. Allora, dall'*Identità di Brahmagupta-Fibonacci*, anche 65 è somma di due quadrati.

Infatti $5 = 2^2 + 1^2$ e $13 = 3^2 + 2^2$. Pertanto $65 = 5 \cdot 13 = (2 \cdot 3 - 1 \cdot 2)^2 + (2 \cdot 2 + 1 \cdot 3)^2 = 4^2 + 7^2$.

§5 Irriducibilità in $\mathbb{Z}[x]$ e in $\mathbb{Q}[x]$

§5.1 Criterio di Eisenstein e proiezione in $\mathbb{Z}_p[x]$

Prima di studiare le irriducibilità in \mathbb{Z} , si guarda alle irriducibilità nei vari campi finiti \mathbb{Z}_p , con p primo. Questo metodo presenta un vantaggio da non sottovalutare: in \mathbb{Z}_p per ogni grado n esiste un numero finito di polinomi monici⁷ – in particolare, p^n – e quindi per un polinomio di grado d è sufficiente controllare che questo non sia prodotto di tali polinomi monici per $1 \leq n < d$.

In modo preliminare, si definisce un omomorfismo fondamentale.

Definizione 5.1. Sia il seguente l'omomorfismo di proiezione da \mathbb{Z} in \mathbb{Z}_p :

$$\hat{\pi}_p : \mathbb{Z}[x] \rightarrow \mathbb{Z}_p[x], \quad a_n x^n + \dots + a_0 \mapsto [a_n]_p x^n + \dots + [a_0]_p.$$

Osservazione. Si dimostra facilmente che $\hat{\pi}$ è un omomorfismo di anelli. Innanzitutto, $\hat{\pi}(1) = [1]_p$. Vale chiaramente la linearità:

$$\begin{aligned} \hat{\pi}_p(a_n x^n + \dots + a_0) + \hat{\pi}_p(b_n x^n + \dots + b_0) &= [a_n]_p x^n + \dots + [a_0]_p x^0 + [b_n]_p x^n + \dots + [b_0]_p x^0 = \\ &= [a_n + b_n]_p x^n + \dots = \hat{\pi}_p(a_n x^n + \dots + a_0 + b_n x^n + \dots + b_0). \end{aligned}$$

Infine vale anche la moltiplicatività:

$$\begin{aligned} \hat{\pi}_p(a_n x^n + \dots + a_0) \hat{\pi}_p(b_n x^n + \dots + b_0) &= ([a_n]_p x^n + \dots) ([b_n]_p x^n + \dots) = \\ &= \sum_{i=0}^n \sum_{j+k=i} [a_j]_p [b_k]_p x^i = \sum_{i=0}^n \sum_{j+k=i} [a_j b_k]_p x^i = \hat{\pi}_p \left(\sum_{i=0}^n \sum_{j+k=i} a_j b_k x^i \right) = \\ &= \hat{\pi}_p((a_n x^n + \dots + a_0)(b_n x^n + \dots + b_0)). \end{aligned}$$

Prima di enunciare un teorema che si rivelerà importante nel determinare l'irriducibilità di un polinomio in $\mathbb{Z}[x]$, si enuncia una definizione che verrà ripresa anche in seguito

Definizione 5.2. Un polinomio $a_n x^n + \dots + a_0 \in \mathbb{Z}[x]$ si dice **primitivo** se $\text{MCD}(a_n, \dots, a_0) = 1$.

Teorema 5.3

Sia p un primo. Sia $f(x) = a_n x^n + \dots \in \mathbb{Z}[x]$ primitivo. Se $p \nmid a_n$ e $\hat{\pi}_p(f(x))$ è irriducibile in $\mathbb{Z}_p[x]$, allora anche $f(x)$ lo è in $\mathbb{Z}[x]$.

Dimostrazione. Si dimostra la tesi contronominale. Sia $f(x) = a_n x^n + \dots \in \mathbb{Z}[x]$ primitivo e riducibile, con $p \nmid a_n$. Dal momento che $f(x)$ è riducibile, esistono $g(x), h(x)$ non invertibili tali che $f(x) = g(x)h(x)$.

⁷Si prendono in considerazione solo i polinomi monici dal momento che vale l'equivalenza degli associati: se a divide b , allora tutti gli associati di a dividono b . \mathbb{Z}_p è infatti un campo, e quindi $\mathbb{Z}_p[x]$ è un anello euclideo.

Si dimostra che $\deg g(x) \geq 1$. Se infatti fosse nullo, $g(x)$ dovrebbe o essere uguale a ± 1 – assurdo, dal momento che $g(x)$ non è invertibile, \nmid – o essere una costante non invertibile. Tuttavia, nell'ultimo caso, risulterebbe che $f(x)$ non è primitivo, poiché $g(x)$ dividerebbe ogni coefficiente del polinomio. Analogamente anche $\deg h(x) \geq 1$.

Si consideri ora $\hat{\pi}_p(f(x)) = \hat{\pi}_p(g(x))\hat{\pi}_p(h(x))$. Dal momento che $p \nmid a_n$, il grado di $f(x)$ rimane costante sotto l'operazione di omomorfismo, ossia $\deg \hat{\pi}_p(f(x)) = \deg f(x)$.

Inoltre, poiché nessuno dei fattori di $f(x)$ è nullo, $\deg f(x) = \deg g(x) + \deg h(x)$. Da questa considerazione si deduce che anche i gradi di $g(x)$ e $h(x)$ non devono calare, altrimenti si avrebbe che $\deg \hat{\pi}_p(f(x)) < \deg f(x)$, \nmid . Allora $\deg \hat{\pi}_p(g(x)) = \deg g(x) \geq 1$, $\deg \hat{\pi}_p(h(x)) = \deg h(x) \geq 1$.

Poiché $\deg \hat{\pi}_p(g(x))$ e $\deg \hat{\pi}_p(h(x))$ sono dunque entrambi non nulli, $\hat{\pi}_p(g(x))$ e $\hat{\pi}_p(h(x))$ non sono invertibili⁸. Quindi $f(x)$ è prodotto di non invertibili, ed è dunque riducibile. \square

Teorema 5.4 (*Criterio di Eisenstein*)

Sia p un primo. Sia $f(x) = a_n x^n + \dots + a_0 \in \mathbb{Z}[x]$ primitivo tale che:

- (1) $p \nmid a_n$,
- (2) $p \mid a_i, \forall i \neq n$,
- (3) $p^2 \nmid a_0$.

Allora $f(x)$ è irriducibile in $\mathbb{Z}[x]$.

Dimostrazione. Si ponga $f(x)$ riducibile e sia pertanto $f(x) = g(x)h(x)$ con $g(x)$ e $h(x)$ non invertibili. Analogamente a come visto per il *Teorema 5.3*, si desume che $\deg g(x)$, $\deg h(x) \geq 1$.

Si applica l'omomorfismo di proiezione in $\mathbb{Z}_p[x]$:

$$\hat{\pi}_p(f(x)) = \underbrace{[a_n]_p}_{\neq 0} x^n,$$

da cui si deduce che $\deg \hat{\pi}_p(f(x)) = \deg f(x)$.

Dal momento che $\hat{\pi}_p(f(x)) = \hat{\pi}_p(g(x))\hat{\pi}_p(h(x))$ e che $\mathbb{Z}_p[x]$, in quanto campo, è un dominio, necessariamente sia $\hat{\pi}_p(g(x))$ che $\hat{\pi}_p(h(x))$ sono dei monomi.

Inoltre, sempre in modo analogo a come visto per il *Teorema 5.3*, sia $\deg \hat{\pi}_p(g(x))$ che $\deg \hat{\pi}_p(h(x))$ sono maggiori o uguali ad 1.

Combinando questo risultato col fatto che questi due fattori sono monomi, si desume che $\hat{\pi}_p(g(x))$ e $\hat{\pi}_p(h(x))$ sono monomi di grado positivo. Quindi p deve dividere entrambi i

⁸Si ricorda che $\mathbb{Z}_p[x]$ è un anello euclideo. Pertanto, non avere lo stesso grado dell'unità equivale a non essere invertibili.

termini noti di $g(x)$ e $h(x)$, e in particolare p^2 deve dividere il loro prodotto, ossia a_0 . Tuttavia questo è un assurdo, \nexists . \square

Osservazione. Si consideri $x^k - 2$, per $k \geq 1$. Per il *Criterio di Eisenstein*, considerando come primo $p = 2$, si verifica che $x^k - 2$ è sempre irriducibile. Pertanto, per ogni grado di un polinomio esiste almeno un irriducibile – a differenza di come invece avviene in $\mathbb{R}[x]$ o in $\mathbb{C}[x]$.

Teorema 5.5

Sia $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$ primitivo e sia $a \in \mathbb{Z}$. Allora $f(x)$ è irriducibile se e solo se $f(x + a)$ è irriducibile.

Dimostrazione. Si dimostra una sola implicazione, dal momento che l'implicazione contraria consegue dalle stesse considerazioni poste studiando prima $f(x + a)$ e poi $f(x)$.

Sia $f(x) = a(x)b(x)$ riducibile, con $a(x), b(x) \in \mathbb{Z}[x]$ non invertibili. Come già visto per il *Teorema 5.3*, $\deg a(x), \deg b(x) \geq 1$.

Allora chiaramente $f(x + a) = g(x + a)h(x + a)$, con $\deg g(x + a) = \deg g(x) \geq 1$, $\deg h(x + a) = \deg h(x) \geq 1$. Pertanto $f(x + a)$ continua a essere riducibile, da cui la tesi. \square

Esempio 5.6

Si consideri $f(x) = x^{p-1} + \dots + x^2 + x + 1 \in \mathbb{Z}[x]$, dove tutti i coefficienti del polinomio sono 1. Si verifica che:

$$f(x + 1) = \frac{(x + 1)^p - 1}{x} = p + \binom{p}{2}x + \dots + x^{p-1}.$$

Allora, per il *Criterio di Eisenstein* con p , $f(x + 1)$ è irriducibile. Pertanto anche $f(x)$ lo è.

§5.2 Alcuni irriducibili di $\mathbb{Z}_2[x]$

Tra tutti gli anelli $\mathbb{Z}_p[x]$, $\mathbb{Z}_2[x]$ ricopre sicuramente un ruolo fondamentale, dal momento che è il meno costoso computazionalmente da analizzare, dacché \mathbb{Z}_2 consta di soli due elementi. Pertanto si computano adesso gli irriducibili di $\mathbb{Z}_2[x]$ fino al quarto grado incluso, a meno di associati.

Sicuramente x e $x + 1$ sono irriducibili, dal momento che sono di primo grado. I polinomi di secondo grado devono dunque essere prodotto di questi polinomi, e pertanto devono avere 0 o 1 come radice: si verifica quindi che $x^2 + x + 1$ è l'unico polinomio di secondo grado irriducibile.

Per il terzo grado vale ancora lo stesso principio, per cui $x^3 + x^2 + 1$ e $x^3 + x + 1$ sono gli unici irriducibili di tale grado. Infine, per il quarto grado, i polinomi riducibili soddisfano una qualsiasi delle seguenti proprietà:

- 0 e 1 sono radici del polinomio,
- il polinomio è prodotto di due polinomi irriducibili di secondo grado.

Si escludono pertanto dagli irriducibili i polinomi non omogenei – che hanno sicuramente 0 come radice –, e i polinomi con 1 come radice, ossia $x^4 + x^3 + x + 1$, $x^4 + x^3 + x^2 + 1$, e $x^4 + x^2 + x + 1$. Si esclude anche $(x^2 + x + 1)^2 = x^4 + x^2 + 1$. Pertanto gli unici irriducibili di grado quattro sono $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$, $x^4 + x^3 + 1$, $x^4 + x + 1$.

Tutti questi irriducibili sono raccolti nella seguente tabella:

- (grado 1) $x, x + 1$,
- (grado 2) $x^2 + x + 1$,
- (grado 3) $x^3 + x^2 + 1, x^3 + x + 1$,
- (grado 4) $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1, x^4 + x^3 + 1, x^4 + x + 1$.

Esempio 5.7

Il polinomio $51x^3 + 11x^2 + 1 \in \mathbb{Z}[x]$ è primitivo dal momento che $\text{MCD}(51, 11, 1) = 1$. Inoltre, poiché $\hat{\pi}_2(51x^3 + 11x^2 + 1) = x^3 + x + 1$ è irriducibile, si deduce che anche $51x^3 + 11x^2 + 1$ lo è per il *Teorema 5.3*.

§5.3 Teorema delle radici razionali e lemma di Gauss

Si enunciano in questa sezione i teoremi più importanti per lo studio dell'irriducibilità dei polinomi in $\mathbb{Q}[x]$ e in $\mathbb{Z}[x]$, a partire dai due teoremi più importanti: il classico *Teorema delle radici razionali* e il *Lemma di Gauss*, che si pone da ponte tra l'analisi dell'irriducibilità in $\mathbb{Z}[x]$ e quella in $\mathbb{Q}[x]$.

Teorema 5.8 (Teorema delle radici razionali)

Sia $f(x) = a_n x^n + \dots + a_0 \in \mathbb{Z}[x]$. Abbia $f(x)$ una radice razionale. Allora, detta tale radice $\frac{p}{q}$, già ridotta ai minimi termini, questa è tale che:

- (i.) $p \mid a_0$,
- (ii.) $q \mid a_n$.

Dimostrazione. Poiché $\frac{p}{q}$ è radice, $f\left(\frac{p}{q}\right) = 0$, e quindi si ricava che:

$$a_n \left(\frac{p}{q}\right)^n + \dots + a_0 = 0 \implies a_n p^n = -q(\dots + a_0 q^{n-1}).$$

Quindi $q \mid a_n p^n$. Dal momento che $\text{MCD}(p, q) = 1$, si deduce che $q \mid a_n$.

Analogamente si ricava che:

$$a_0 q^n = -p(a_n p^{n-1} + \dots).$$

Pertanto, per lo stesso motivo espresso in precedenza, $p \mid a_0$, da cui la tesi. \square

Teorema 5.9 (*Lemma di Gauss*)

Il prodotto di due polinomi primitivi in $\mathbb{Z}[x]$ è anch'esso primitivo.

Dimostrazione. Siano $g(x) = a_mx^m + \dots + a_0$ e $h(x) = b_nx^n + \dots + b_0$ due polinomi primitivi in $\mathbb{Z}[x]$. Si assuma che $f(x) = g(x)h(x)$ non sia primitivo. Allora esiste un p primo che divide tutti i coefficienti di $f(x)$.

Siano a_s e b_t i più piccoli coefficienti non divisibili da p dei rispettivi polinomi. Questi sicuramente esistono, altrimenti p dividerebbe tutti i coefficienti, e quindi o $g(x)$ o $h(x)$ non sarebbe primitivo, \nexists .

Si consideri il coefficiente di x^{s+t} di $f(x)$:

$$c_{s+t} = \sum_{j+k=s+t} a_j b_k = \underbrace{a_0 b_{s+t} + a_1 b_{s+t-1} + \dots + a_s b_t}_{\equiv 0 \pmod{p}} + \underbrace{a_{s+1} b_{t-1} + \dots}_{\equiv 0 \pmod{p}},$$

dal momento che $p \mid c_{s+t}$, si deduce che p deve dividere anche $a_s b_t$, ossia uno tra a_s e b_t , che è assurdo, \nexists . Quindi $f(x)$ è primitivo. □

Teorema 5.10 (*Secondo lemma di Gauss*)

Sia $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$. Allora $f(x)$ è irriducibile in $\mathbb{Z}[x]$ se e solo se $f(x)$ è irriducibile in $\mathbb{Q}[x]$ ed è primitivo.

Dimostrazione. Si dimostrano le due implicazioni separatamente.

(\implies) Si dimostra l'implicazione contronominale, ossia mostrando che se $f(x)$ non è primitivo o se è riducibile in $\mathbb{Q}[x]$, allora $f(x)$ è riducibile in $\mathbb{Z}[x]$.

Se $f(x)$ non è primitivo, allora $f(x)$ è riducibile in $\mathbb{Z}[x]$. Sia quindi $f(x)$ primitivo e riducibile in $\mathbb{Q}[x]$, con $f(x) = g(x)h(x)$, $g(x), h(x) \in \mathbb{Q}[x] \setminus \mathbb{Q}[x]^*$.

Si descrivano $g(x)$ e $h(x)$ nel seguente modo:

$$g(x) = \frac{p_m}{q_m}x^m + \dots + \frac{p_0}{q_0}, \quad \text{MCD}(p_i, q_i) = 1 \quad \forall 0 \leq i \leq m,$$

$$h(x) = \frac{s_n}{t_n}x^n + \dots + \frac{s_0}{t_0}, \quad \text{MCD}(s_i, t_i) = 1 \quad \forall 0 \leq i \leq n.$$

Si definiscano inoltre le seguenti costanti:

$$\alpha = \frac{\text{mcm}(q_m, \dots, q_0)}{\text{MCD}(p_m, \dots, p_0)}, \quad \beta = \frac{\text{mcm}(t_n, \dots, t_0)}{\text{MCD}(s_n, \dots, s_0)}.$$

Si verifica che sia $\hat{g}(x) = \alpha g(x)$ che $\hat{h}(x) = \beta h(x)$ appartengono a $\mathbb{Z}[x]$ e che entrambi sono primitivi. Pertanto $\hat{g}(x)\hat{h}(x) \in \mathbb{Z}[x]$.

Si descriva $f(x)$ nel seguente modo:

$$f(x) = a_k x^k + \dots + a_0, \quad \text{MCD}(a_k, \dots, a_0) = 1.$$

Sia $\alpha\beta = \frac{p}{q}$ con $\text{MCD}(p, q) = 1$, allora:

$$\hat{g}(x)\hat{h}(x) = \alpha\beta f(x) = \frac{p}{q}(a_k x^k + \dots + a_0),$$

da cui, per far sì che $\hat{g}(x)\hat{h}(x)$ appartenga a $\mathbb{Z}[x]$, q deve necessariamente dividere tutti i coefficienti di $f(x)$. Tuttavia $f(x)$ è primitivo, e quindi $q = \pm 1$. Pertanto $\alpha\beta = \pm p \in \mathbb{Z}$.

Infine, per il *Lemma di Gauss*, $\alpha\beta f(x)$ è primitivo, da cui $\alpha\beta = \pm 1$. Quindi $f(x) = \pm \hat{g}(x)\hat{h}(x)$ è riducibile.

(\Leftarrow) Se $f(x)$ è irriducibile in $\mathbb{Q}[x]$ ed è primitivo, sicuramente $f(x)$ è irriducibile anche in $\mathbb{Z}[x]$. Infatti, se esiste una fattorizzazione in irriducibili in $\mathbb{Z}[x]$, essa non include alcuna costante moltiplicativa dal momento che $f(x)$ è primitivo, e quindi esisterebbe una fattorizzazione in irriducibili anche in $\mathbb{Q}[x]$. \square

§6 I polinomi di un campo: $\mathbb{K}[x]$

§6.1 Elementi preliminari

Prima di procedere ad enunciare le proprietà più rilevanti dell'anello dei polinomi $\mathbb{K}[x]$, si ricorda che esso è un **anello euclideo** in cui la funzione grado coincide con il grado del polinomio, ossia $g = \deg$. Si enuncia ora invece la definizione di radice.

Definizione 6.1. Si dice che $\alpha \in \mathbb{K}$ è una **radice** del polinomio $f(x) \in \mathbb{K}[x]$ se $f(\alpha) = 0$.

Proposizione 6.2

Se $\alpha \in \mathbb{K}$ è una radice di $f(x) \in \mathbb{K}[x]$, allora $(x - \alpha)$ divide $f(x)$.

Dimostrazione. Dal momento che $\mathbb{K}[x]$ è un anello euclideo, si può eseguire la divisione euclidea tra $f(x)$ e $(x - \alpha)$, ossia esistono $q(x), r(x) \in \mathbb{K}[x]$ tali che $f(x) = q(x)(x - \alpha) + r(x)$ con $\deg r(x) < \deg(x - \alpha)$ o con $r(x) = 0$.

Se $r(x) \neq 0$, poiché $\deg r(x) < \deg(x - \alpha)$, si deduce che $\deg r(x) = 0$, ossia che $r(x)$ è un invertibile. In entrambi i casi, $r(x)$ è comunque una costante. Pertanto, valutando il polinomio in α , si ricava:

$$0 = f(\alpha) = \underbrace{q(\alpha)(\alpha - \alpha)}_{=0} + r(\alpha),$$

da cui $r(\alpha) = 0$. Quindi $f(x) = q(x)(x - \alpha)$, e si verifica la tesi. \square

Teorema 6.3

Sia $f(x) \in \mathbb{K}[x]$ di grado n . Allora $f(x)$ ha al più n radici.

Dimostrazione. Se n è nullo, allora $f(x)$ è una costante non nulla, e quindi non ammette radici, in accordo alla tesi.

Sia allora $n \geq 1$. Se $f(x)$ non ha radici in \mathbb{K} , allora la tesi è ancora soddisfatta. Altrimenti sia ζ_1 una radice di $f(x)$. Si divida $f(x)$ per $(x - \zeta_1)$ e se ne prende il quoziente $q_1(x)$, mentre si ignori il resto, che, per la *Proposizione 6.2*, è nullo.

Si reiteri il procedimento utilizzando $q_1(x)$ al posto di $f(x)$ fino a quando il grado del quoziente non è nullo o il quoziente non ammette radici in \mathbb{K} , e si chiami quest'ultimo quoziente $\lambda(x)$. Infatti, poiché i gradi dei quozienti diminuiscono di 1 ad ogni iterazione, è garantito che l'algoritmo termini al più dopo n iterazioni.

In questo modo, numerando le radici, si può scrivere $f(x)$ come:

$$f(x) = \alpha(x - \zeta_1)(x - \zeta_2) \cdots (x - \zeta_k)\lambda(x). \quad (2)$$

Si osserva che $x - \zeta_i$ è irriducibile $\forall 1 \leq i \leq k$. Se $f(x)$ ammettesse un'altra fattorizzazione in cui compaia un fattore $x - \alpha$ con $\alpha \neq \zeta_i \forall 1 \leq i \leq k$, allora $f(x)$ ammetterebbe due fattorizzazioni in irriducibili, dacché $x - \alpha$ non sarebbe un associato di nessuno dei $x - \zeta_i$,

né tantomeno di un irriducibile $\lambda(x)$.

Se infatti $x - \alpha$ fosse un associato di un irriducibile $\lambda(x)$, $x - \alpha$ dividerebbe $\lambda(x)$, e quindi $\lambda(x)$ ammetterebbe α come radice. Se $\lambda(x)$ è una costante, questo è a priori assurdo, \nexists . Se invece $\lambda(x)$ non è una costante, il fatto che ammetta una radice contraddirebbe il funzionamento dell'algoritmo di fattorizzazione espresso in precedenza, \nexists . Quindi $x - \alpha$ non è associato di nessun irriducibile di $\lambda(x)$.

Allora il fatto che $f(x)$ ammetta due fattorizzazioni in irriducibili è assurdo, dacché $\mathbb{K}[x]$ è un anello euclideo, e quindi un UFD, \nexists . Quindi le radici sono esattamente $k \leq n$, da cui la tesi. \square

§6.2 Sottogruppi moltiplicativi finiti di \mathbb{K}

Si illustra adesso un teorema che riguarda i sottogruppi moltiplicativi finiti di \mathbb{K} , da cui consegnerà, per esempio, che \mathbb{Z}_p^* è sempre ciclico, per qualsiasi p primo.

Lemma 6.4

Per ogni $n \in \mathbb{N}$ vale la seguente identità:

$$n = \sum_{d|n} \varphi(d).$$

Dimostrazione. Si consideri il gruppo ciclico \mathbb{Z}_n per $n \in \mathbb{N}$. Si osserva che $|\mathbb{Z}_n| = n$.

Si definisca X_d come l'insieme degli elementi di G di ordine d . Dal momento che ogni elemento appartiene a uno e uno solo di questi X_d , per ogni divisore d di n , allora si può partizionare G nel seguente modo:

$$G = \bigcup_{d|n} X_d.$$

Dal momento che \mathbb{Z}_n è ciclico, ogni X_d ha esattamente $\varphi(d)$ elementi, e dunque si deduce che:

$$n = |G| = \sum_{d|n} |X_d| = \sum_{d|n} \varphi(d),$$

ossia la tesi. \square

Teorema 6.5

Un sottogruppo moltiplicativo finito di un campo \mathbb{K} è sempre ciclico.

Dimostrazione. Sia G un sottogruppo finito di un campo \mathbb{K} definito sulla sua operazione di moltiplicazione, e sia $|G| = n$.

Si definisca X_d come l'insieme degli elementi di G di ordine d . Dal momento che ogni elemento appartiene a uno e uno solo di questi X_d , per ogni divisore d di n , allora si può partizionare G nel seguente modo:

$$G = \bigcup_{d|n} X_d,$$

da cui:

$$n = |G| = \sum_{d|n} |X_d|. \quad (3)$$

Dal *Lemma 6.4* e da (3), si ricava infine la seguente equazione:

$$\sum_{d|n} |X_d| = n = \sum_{d|n} \varphi(d). \quad (4)$$

Adesso vi sono due casi: o $|X_n| > 0$ o $|X_n| = 0$.

Nel primo caso si concluderebbe che esiste almeno un elemento in G di ordine n , e quindi che esiste un generatore con cui G è ciclico, ossia la tesi.

Nel secondo caso si dimostra un assurdo. Dal momento che $|X_n| = 0$, esiste sicuramente un divisore proprio d di n tale che $|X_d| > \varphi(d)$. Altrimenti, se $|X_d| \leq \varphi(d)$ per ogni divisore d , si ricaverebbe la seguente disuguaglianza:

$$\sum_{\substack{d|n \\ d \neq n}} |X_d| \leq \sum_{\substack{d|n \\ d \neq n}} \varphi(d) \implies \sum_{d|n} |X_d| \stackrel{|X_n|=0}{=} \sum_{\substack{d|n \\ d \neq n}} |X_d| \leq \sum_{\substack{d|n \\ d \neq n}} \varphi(d) \stackrel{\varphi(n) \geq 1}{<} \sum_{d|n} \varphi(d).$$

Tuttavia questo è un assurdo, dal momento che per (4) deve valere l'uguaglianza, \neq .

Sia $g \in X_d$ e si consideri $\langle g \rangle$, il sottogruppo generato da g . Vale in particolare che $|\langle g \rangle| = d$.

Si consideri adesso il polinomio $f(x) = x^d - 1 \in \mathbb{K}[x]$. Tutti e d gli elementi di $\langle g \rangle$ sono già soluzione di $f(x)$. Tuttavia, poiché $|X_d| > \varphi(d)$, esiste sicuramente un elemento h in X_d che non appartiene a $\langle g \rangle$. Infatti se tutti gli elementi di X_d appartenessero a $\langle g \rangle$ vi sarebbero più di $\varphi(d)$ generatori, \neq .

Infine, poiché $h \in X_d$, anch'esso è soluzione di $f(x)$. Questo è però un assurdo, poiché, per il *Teorema 6.3*, $f(x)$ ammette al più d radici, mentre così ne avrebbe almeno $d+1$, \neq .

Quindi $|X_d| > 0$, e G è ciclico. □

§6.3 Il quoziente $\mathbb{K}[x]/(f(x))$

Nell'ambito dello studio delle radici di un polinomio, il quoziente $\mathbb{K}[x]/(f(x))$ gioca un ruolo fondamentale. Infatti, come vedremo in seguito, se $f(x)$ è irriducibile, questo diventa un campo, e, soprattutto, ammette sempre una radice per $f(x)$.

In realtà, il quoziente $\mathbb{K}[x]/(f(x))$ si comporta pressoché allo stesso modo dei più familiari $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Infatti le principali regole dell'aritmetica modulare potrebbero essere estese anche a tale quoziente, senza particolari sacrifici.

Si enuncia adesso un teorema importante, che è equivalente – anche nella dimostrazione – all'analogo per i campi $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

Teorema 6.6

$\mathbb{K}[x]/(f(x))$ è un campo se e solo se $f(x)$ è irriducibile.

Dimostrazione. Si dimostrano le due implicazioni separatamente.

(\implies) Sia $f(x) \in \mathbb{K}[x]$ irriducibile. Affinché l'anello commutativo $\mathbb{K}[x]/(f(x))$ sia un campo è sufficiente dimostrare che ogni suo elemento non nullo ammette un inverso moltiplicativo.

Sia $\alpha(x) + (f(x)) \in \mathbb{K}[x]/(f(x))$ non nullo. Allora $\alpha(x)$ non è divisibile da $f(x)$, e pertanto $\text{MCD}(\alpha(x), f(x)) = 1$ ⁹.

Allora, per l'*Identità di Bézout*, esistono $\beta(x), \lambda(x) \in \mathbb{K}[x]$ tali che:

$$\alpha(x)\beta(x) + \lambda(x)f(x) = 1.$$

Dacché $\alpha(x)\beta(x) - 1 \in (f(x))$, si deduce che $\alpha(x)\beta(x) + (f(x)) = 1 + (f(x))$, e quindi $\beta(x) + (f(x))$ è l'inverso moltiplicativo di $\alpha(x) + (f(x))$, da cui la dimostrazione dell'implicazione.

(\impliedby) Si dimostra l'implicazione contronominale. Sia $f(x) \in \mathbb{K}[x]$ riducibile. Allora esistono $\alpha(x)$ e $\beta(x)$ non invertibili tali che $f(x) = \alpha(x)\beta(x)$, da cui si ricava che:

$$[\alpha(x) + (f(x))][\beta(x) + (f(x))] = f(x) + (f(x)) = 0 + (f(x)),$$

ossia l'identità di $\mathbb{K}[x]/(f(x))$.

Tuttavia, se $\mathbb{K}[x]/(f(x))$ fosse un campo, e quindi un dominio, ciò non sarebbe ammissibile, dacché non potrebbero esservi divisori di zero. Quindi $\mathbb{K}[x]/(f(x))$ non è un campo. \square

Osservazione. Una notazione per indicare un elemento di $\mathbb{K}[x]/(f(x))$ alternativa e più sintetica di $a + (f(x))$ è \bar{a} , qualora sia noto nel contesto a quale $f(x)$ si fa riferimento.

Proposizione 6.7

Nell'anello $\mathbb{K}[x]/(f(x))$ esiste sempre una radice di $f(x)$, convertendo opportunamente i coefficienti da \mathbb{K} a $\mathbb{K}[x]/(f(x))$.

Dimostrazione. Sia $\bar{x} = x + (f(x)) \in \mathbb{K}[x]/(f(x))$ e si descriva $f(x)$ come:

$$f(x) = a_n x^n + \dots + a_0.$$

⁹Si ricorda che in un PID la nozione di *massimo comun divisore* (MCD) è più ambigua di quella di \mathbb{Z} . Infatti $\text{MCD}(a, b)$ comprende tutti i generatori dell'ideale (a, b) , e quindi tutti i suoi associati. Pertanto si dirà $\text{MCD}(a, b)$ uno qualsiasi di questi associati, e nel nostro caso 1 è un buon valore, dacché l'MCD deve essere un associato di un'unità.

Allora, computando $f(x)$ in \bar{x} e convertendone i coefficienti, si ricava che:

$$f(\bar{x}) = \overline{a_n} \bar{x}^n + \dots + \overline{a_0} = \overline{a_n x^n + \dots + a_0} = \overline{f(x)} = \bar{0}.$$

Quindi \bar{x} è una radice di $f(x)$, da cui la tesi.

□

§7 Estensioni algebriche di \mathbb{K}

§7.1 Morfismi di valutazione, elementi algebrici e trascendenti

Si definisce adesso il concetto di *omomorfismo di valutazione*, che impiegheremo successivamente nello studio dei quozienti $\mathbb{K}[x]/(f(x))$ e dei cosiddetti *elementi algebrici* (o *trascendenti*).

Definizione 7.1. Sia B un anello commutativo, e sia $A \subseteq B$ un suo sottoanello. Si definisce **omomorfismo di valutazione** di $\alpha \in B$ in A l'omomorfismo:

$$\varphi_\alpha : A[x] \rightarrow B, f(x) \mapsto f(\alpha).$$

Osservazione. L'omomorfismo di valutazione è effettivamente un omomorfismo di anelli. Innanzitutto $\varphi_\alpha(1) = 1$. Inoltre vale la linearità:

$$\begin{aligned} \varphi_\alpha(f(x)) + \varphi_\alpha(g(x)) &= f(\alpha) + g(\alpha) = (f+g)(\alpha) = \varphi_\alpha((f+g)(x)) = \\ &= \varphi_\alpha(f(x) + g(x)), \end{aligned}$$

così come la moltiplicatività:

$$\varphi_\alpha(f(x))\varphi_\alpha(g(x)) = f(\alpha)g(\alpha) = (fg)(\alpha) = \varphi_\alpha((fg)(x)) = \varphi_\alpha(f(x)g(x)).$$

Si evidenziano adesso le principali proprietà di tale omomorfismo.

Proposizione 7.2

$$\text{Imm } \varphi_\alpha = A[\alpha]$$

Dimostrazione. Sicuramente $\text{Imm } \varphi_\alpha \subseteq A[\alpha]$, dacché ogni immagine di φ_α è una valutazione di un polinomio a coefficienti in A in α .

Sia dunque $a = a_n\alpha^n + \dots + a_0 \in A[\alpha]$. Allora $\varphi_\alpha(a_nx^n + \dots + a_0) = a$. Pertanto $a \in \text{Imm } \varphi_\alpha$, da cui $A[\alpha] \subseteq \text{Imm } \varphi_\alpha$.

Poiché vale la doppia inclusione, si desume che $\text{Imm } \varphi_\alpha = A[\alpha]$. □

Prima di applicare il *Primo teorema d'isomorfismo*, si distinguono due importanti casi, sui quali si baseranno le definizioni di *elemento algebrico* e di *elemento trascendente*.

Definizione 7.3. Sia $\alpha \in B$. Se $\text{Ker } \varphi_\alpha = (0)$, allora si dice che α è un **elemento trascendente** di B su A .

Osservazione. Equivalentemente, se $\alpha \in B$ è trascendente su A , significa che non vi è alcun polinomio non nullo in $A[x]$ che ha α come soluzione.

Esempio 7.4

Per esempio, il numero di Nepero-Eulero e è trascendente su $\mathbb{Q}[x]$ ^a. Quindi $\text{Ker } \varphi_e = (0)$, e dunque, dal *Primo teorema di isomorfismo*, vale che:

$$\mathbb{Q}[x] \cong \mathbb{Q}[x]/(0) \cong \mathbb{Q}[e].$$

^aPer una dimostrazione di questo fatto, si guardi a [H, pp. 234-237]

Possiamo generalizzare questo esempio nel seguente teorema.

Teorema 7.5

Sia B un campo e sia $A \subseteq B$ un suo sottoanello. Se $\alpha \in B$ è trascendente su A , allora vale la seguente relazione:

$$A[x] \cong A[\alpha].$$

Dimostrazione. Si consideri l'omomorfismo φ_α . Dacché α è trascendente, $\text{Ker } \varphi_\alpha = (0)$. Allora, combinando il *Primo teorema di isomorfismo* con la *Proposizione 7.2*, si ottiene proprio $A[x] \cong A[x]/(0) \cong A[\alpha]$, ossia la tesi. \square

Definizione 7.6. Sia $\alpha \in B$. Se $\text{Ker } \varphi_\alpha \neq (0)$, allora si dice che α è un **elemento algebrico** di B su A , mentre il generatore monico^a non nullo di $\text{Ker } \varphi_\alpha$ si dice **polinomio minimo** di α su A . Il grado di tale polinomio minimo è detto **grado di α** .

^aVi potrebbero essere infatti più generatori di $\text{Ker } \varphi_\alpha$, sebbene tutti associati tra loro. L'attributo *monico* garantisce così l'unicità del polinomio minimo.

Osservazione. Equivalentemente, se $\alpha \in B$ è trascendente su A , significa che esiste un polinomio non nullo in $A[x]$ che ha α come soluzione. In particolare, ogni polinomio in $A[x]$ che ha α come soluzione è un multiplo del suo polinomio minimo su A .

Esempio 7.7

Sia $\alpha \in A$. Allora α è banalmente un elemento algebrico su A , il cui polinomio minimo è $x - \alpha$. Vale dunque che $\text{Ker } \varphi_\alpha = (x - \alpha)$, da cui, secondo il *Primo teorema di isomorfismo*, si ricava che:

$$A[x]/(x - \alpha) \cong A[\alpha] \cong A.$$

Esempio 7.8

$i \in \mathbb{C}$ è un elemento algebrico su \mathbb{R} . Infatti, si consideri φ_i : poiché i è soluzione di $x^2 + 1$, si ha che $x^2 + 1 \in \text{Ker } \varphi_i$, che è quindi non vuoto.

Inoltre, dal momento che $x^2 + 1$ è irriducibile in $\mathbb{R}[x]$, esso è generatore di $\text{Ker } \varphi_i$. Inoltre, poiché monico, è anche il polinomio minimo di i su \mathbb{R} .

Allora, poiché dalla *Proposizione 7.2* $\text{Imm } \varphi_i = \mathbb{R}[i]$, si deduce dal *Primo teorema di isomorfismo* che:

$$\mathbb{R}[x]/(x^2 + 1) \cong \mathbb{R}[i] \cong \mathbb{C}.$$

Ancora una volta possiamo generalizzare questo esempio con il seguente teorema.

Teorema 7.9

Sia B un campo e sia $A \subseteq B$ un suo sottoanello. Se $\alpha \in B$ è algebrico su A , allora, detto $f(x)$ il polinomio minimo di α , vale la seguente relazione:

$$A[x]/(f(x)) \cong A[\alpha].$$

Dimostrazione. Si consideri l'omomorfismo φ_α . Dacché $\text{Ker } \varphi_\alpha = (f(x))$ per definizione di polinomio minimo, combinando il *Primo teorema di isomorfismo* con la *Proposizione 7.2*, si ottiene proprio $A[x]/(f(x)) \cong A[\alpha]$, ossia la tesi. \square

Definizione 7.10. Sia B un campo e sia $A \subseteq B$ un suo sottoanello. Allora, dato $\alpha \in B$, si definisce con la notazione $A(\alpha)$ il sottocampo di B che contiene A e α che sia minimale rispetto all'inclusione.

Osservazione. Le notazioni $\mathbb{K}(\alpha, \beta)$ e $\mathbb{K}(\alpha)(\beta)$ sono equivalenti.

Proposizione 7.11

Sia B un campo e sia $A \subseteq B$ un suo sottoanello. Se $\alpha \in B$ è algebrico su A , allora $A(\alpha) = A[\alpha]$.

Dimostrazione. Se α è algebrico, allora $\text{Ker } \varphi_\alpha = (f(x)) \neq (0)$, dove $f(x) \in A[x]$ è irriducibile. Pertanto, per il *Teorema 6.6*, $A[x]/(f(x))$ è un campo.

Dunque dal *Teorema 7.9* si ricava che:

$$A[x]/(f(x)) \cong A[\alpha].$$

Pertanto $A[\alpha]$ è un campo. Dacché $A[\alpha] \subseteq A(\alpha)$ e $A(\alpha)$ è minimale rispetto all'inclusione, si deduce che $A[\alpha] = A(\alpha)$, ossia la tesi. \square

Osservazione. Il teorema che è stato appena enunciato non vale per gli elementi trascendenti. Infatti, $A[\alpha]$ sarebbe isomorfo a $A[x]$, che non è un campo. Al contrario $A(\alpha)$ è un campo, per definizione.

Proposizione 7.12

Sia B un campo e sia $A \subseteq B$ un suo sottoanello. Se $\alpha, \beta \in B$ sono algebrici su A e condividono lo stesso polinomio minimo, allora $A[\alpha] \cong A[\beta]$.

Dimostrazione. Sia $f(x)$ il polinomio minimo di α e β . Dal *Primo teorema di isomorfismo* e dalla *Proposizione 7.2* si desume che $A[x]/(f(x)) \cong A[\alpha]$. Analogamente si ricava che $A[x]/(f(x)) \cong A[\beta]$. Pertanto $A[\alpha] \cong A[\beta]$. \square

§7.2 Teorema delle torri ed estensioni algebriche

Definizione 7.13. Siano $A \subseteq B$ campi. Allora si denota come $[B : A]$ la dimensione dello spazio vettoriale B costruito su A , ossia $\dim B_A$. Tale dimensione è detta **grado dell'estensione**.

Teorema 7.14 (Teorema delle torri algebriche)

Siano $A \subseteq B \subseteq C$ campi. Allora:

$$[C : A] = [C : B][B : A].$$

Dimostrazione. Siano $[C : B] = m$ e $[B : A] = n$. Sia $\mathcal{B}_C = (a_1, \dots, a_m)$ una base di C su B , e sia $\mathcal{B}_B = (b_1, \dots, b_n)$ una base di B su A .

Si dimostra che la seguente è una base di C su A :

$$\mathcal{B}_A \mathcal{B}_B = \{a_1 b_1, \dots, a_1 b_n, \dots, a_m b_n\}.$$

(i) $\mathcal{B}_C \mathcal{B}_B$ genera A su C .

Sia $c \in C$. Allora si può descrivere c nel seguente modo:

$$c = \sum_{i=1}^m \beta_i a_i, \quad \text{con } \beta_i \in B, \forall 1 \leq i \leq m.$$

A sua volta, allora, si può descrivere ogni β_i nel seguente modo:

$$\beta_i = \sum_{j=1}^n \gamma_j^{(i)} b_j, \quad \text{con } \gamma_j^{(i)} \in A, \forall 1 \leq j \leq n.$$

Combinando le due equazioni, si verifica che $\mathcal{B}_C \mathcal{B}_B$ genera C su A :

$$c = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \gamma_j^{(i)} b_j a_i, \quad \text{con } \gamma_j^{(i)} \in A, \forall 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n.$$

(ii) $\mathcal{B}_C \mathcal{B}_B$ è linearmente indipendente.

Si consideri l'equazione:

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \gamma_j^{(i)} b_j a_i = 0, \quad \text{con } \gamma_j^{(i)} \in A, \forall 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n.$$

Poiché \mathcal{B}_C è linearmente indipendente, si deduce che:

$$\sum_{j=1}^n \gamma_j^{(i)} b_j = 0, \quad \forall 1 \leq i \leq m.$$

Tuttavia, \mathcal{B}_B è a sua volta linearmente indipendente, e quindi $\gamma_j^{(i)} = 0, \forall i, j$. Dunque $\mathcal{B}_C \mathcal{B}_B$ è linearmente indipendente.

Dal momento che $\mathcal{B}_C \mathcal{B}_B$ è linearmente indipendente e genera C su A , consegue che essa sia una base di C su A . Quindi $[C : A] = mn = [C : B][B : A]$, da cui la tesi. \square

Definizione 7.15. Siano $A \subseteq B$ campi. Se $[B : A] \neq \infty$, allora si dice che BA è un'estensione finita di A . Altrimenti si dice che B è un'estensione infinita di A .

Proposizione 7.16

Siano $A \subseteq B \subseteq C$ campi. Allora, se C è un'estensione finita di A , anche B lo è. Inoltre C è un'estensione finita di B .

Dimostrazione. Dal momento che B è un sottospazio dello spazio vettoriale C costruito su A , e questo ha dimensione finita, anche B su A ha dimensione finita. Quindi $[B : A] \neq \infty$, e B è dunque un'estensione finita di A .

Infine, dacché una base di C su A è un generatore finito di C su B , si deduce che $[C : B] \neq \infty$, e quindi che C è un'estensione finita di B . \square

Teorema 7.17

Siano $A \subseteq B$ campi. Allora $a \in B$ è algebrico su A se e solo se $[A(a) : A] \neq \infty$, ossia solo se $A(a)$ è un'estensione finita di A .

Dimostrazione. Si dimostrano le due implicazioni separatamente.

(\implies) Se $a \in B$ è algebrico su A , allora dal Teorema 7.9 si ricava che:

$$A[x]/(f(x)) \cong A[a] \cong A(a).$$

Dacché $A[x]/(f(x))$ ha dimensione finita, anche $A(a)$ ha dimensione finita, e quindi è un'estensione finita di A .

(\Leftarrow) Sia $A(a)$ un'estensione finita di A e sia $[A(a) : A] = m$. Allora $I = (1, a, a^2, \dots, a^m)$ è linearmente dipendente, dal momento che contiene $m + 1$ elementi. Quindi esiste una sequenza finita non nulla $(\alpha_i)_{i=0 \rightarrow m}$ con elementi in A tale che:

$$\alpha_m a^m + \dots + \alpha_2 a^2 + \alpha_1 a + \alpha_0 = 0.$$

Quindi a è soluzione del polinomio:

$$f(x) = \alpha_m x^m + \dots + \alpha_2 x^2 + \alpha_1 x + \alpha_0 \in A[x],$$

pertanto a è algebrico su A , da cui la tesi. \square

Definizione 7.18. Siano $A \subseteq B$ campi. Allora si dice che B è un'estensione algebrica di A se ogni elemento di B è algebrico su A .

Proposizione 7.19

Siano $A \subseteq B$ campi. Se B è un'estensione finita di A , allora B è una sua estensione algebrica.

Dimostrazione. Sia $\alpha \in B$ e si consideri la catena di campi $A \subseteq A(\alpha) \subseteq B$. Dacché $[B : A] \neq \infty$, per la *Proposizione 7.16* anche $[A(\alpha) : A] \neq \infty$. Pertanto, dal *Teorema 7.17*, α è algebrico. Così tutti gli elementi di B sono algebrici in A , e dunque, per definizione, B è un'estensione algebrica di A . \square

Teorema 7.20

Siano $A \subseteq B$ campi e siano $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ elementi algebrici di B su A , con $n \geq 1$. Allora $[A(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n) : A] \neq \infty$.

Dimostrazione. Si procede applicando il principio di induzione su n .

(*passo base*) La tesi è verificata per il *Teorema 7.17*.

(*passo induttivo*) Per l'ipotesi induttiva, si sa che $[A(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{n-1}) : A] \neq \infty$.

Poiché β_n è algebrico su A , sin da subito si osserva che $[A(\beta_n) : A] \neq \infty$ per il *Teorema 7.17*. Sia allora $f(x)$ il polinomio minimo di β_n appartenente a $A[x]$. Esso è un polinomio che ammette β_n come radice anche in $A(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{n-1})[x]$, e quindi $\text{Ker } \varphi_{\beta_n} \neq (0)$ ammette un generatore $p(x)$, che divide $f(x)$. Si ottiene pertanto la seguente disuguaglianza:

$$[A(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{n-1})(\beta_n) : A(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{n-1})] = \deg p(x) \leq \deg f(x) = [A(\beta_n) : A].$$

Poiché $[A(\beta_n) : A]$ è finito, anche $[A(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{n-1})(\beta_n) : A(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{n-1})]$ lo è.

Combinando i due risultati, si ottiene con il *Teorema delle torri algebriche* che:

$$[A(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n) : A] = [A(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{n-1})(\beta_n) : A(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{n-1})] \cdot [A(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{n-1}) : A] \neq \infty,$$

da cui la tesi. □

Corollario 7.21

Siano $A \subseteq B$ campi e siano $\alpha, \beta \in B$ elementi algebrici su A . Allora $A(\alpha, \beta)$ è un'estensione algebrica.

Dimostrazione. Dal Teorema 7.20 si ricava che $[A(\alpha, \beta) : A] \neq \infty$. Quindi $A(\alpha, \beta)$ è un'estensione finita di A , ed in quanto tale, per la Proposizione 7.19, essa è algebrica. □

Osservazione. Esistono estensioni algebriche che hanno grado infinito. Un esempio notevole è \mathcal{A} , l'insieme dei numeri algebrici di \mathbb{C} su \mathbb{Q} . Infatti, si ponga $[\mathcal{A} : \mathbb{Q}] = n - 1 \in \mathbb{N}$ e si consideri $x^n - 2$. Dal momento che per il Criterio di Eisenstein tale polinomio è irriducibile, si ricava che $[\mathbb{Q}(\sqrt[n]{2}) : \mathbb{Q}] = n$.

Poiché $\sqrt[n]{2}$ è algebrico, si deduce che $\mathbb{Q}(\sqrt[n]{2}) \subseteq \mathcal{A}$, dal momento che per il Corollario 7.21 ogni elemento di $\mathbb{Q}(\sqrt[n]{2})$ è algebrico su \mathbb{Q} . Tuttavia questo è un assurdo dal momento che $\mathbb{Q}(\sqrt[n]{2})$ ha dimensione maggiore di \mathcal{A} , di cui è sottospazio vettoriale.

Proposizione 7.22

Siano $A \subseteq B$ campi e sia $\alpha \in B$. Se $[A(\alpha) : A]$ è dispari, allora $A(\alpha^2) = A(\alpha)$.

Dimostrazione. Innanzitutto, si osserva che $A(\alpha^2) \subseteq A(\alpha)$, ossia che $A(\alpha)$ è un'estensione di $A(\alpha^2)$. Grazie a questa osservazione è possibile considerare il grado di $A(\alpha)$ su $A(\alpha^2)$, ossia $[A(\alpha) : A(\alpha^2)]$. Poiché α è radice del polinomio $x^2 - \alpha^2$ in $A(\alpha^2)$, si deduce che tale grado è al più 2.

Si applichi il Teorema delle torri algebriche alla catena di estensioni $A \subseteq A(\alpha^2) \subseteq A(\alpha)$:

$$[A(\alpha) : A] = \underbrace{[A(\alpha) : A(\alpha^2)]}_{\leq 2} [A(\alpha^2) : A].$$

Se $[A(\alpha) : A(\alpha^2)]$ fosse 2, $[A(\alpha) : A]$ sarebbe pari, \neq . Pertanto $[A(\alpha) : A(\alpha^2)] = 1$, da cui si ricava che $[A(\alpha) : A] = [A(\alpha^2) : A]$, ossia che $A(\alpha^2)$ ha la stessa dimensione di $A(\alpha)$ su A .

Dal momento che $A(\alpha^2)$ è un sottospazio vettoriale di $A(\alpha)$, avere la sua stessa dimensione equivale a coincidere con lo spazio stesso. Si conclude allora che $A(\alpha^2) = A(\alpha)$. □

Osservazione. Si osserva che la *Proposizione 7.22* si può generalizzare facilmente ad un esponente n qualsiasi, finché sia data come ipotesi la non divisibilità di $[A(\alpha) : A]$ per nessun numero primo minore o uguale di n .

Si può infatti considerare, per la dimostrazione generale, il polinomio $x^n - \alpha^n$, la cui esistenza implica che $[A(\alpha) : A(\alpha^n)]$ sia minore o uguale di n .

Teorema 7.23

Siano $A \subseteq B \subseteq C$ campi. Se B è un'estensione algebrica di A e C è un'estensione algebrica di B , allora C è un'estensione algebrica di A .

Dimostrazione. Per mostrare che C è un'estensione algebrica di A , verificheremo che ogni suo elemento è algebrico in A . Sia dunque $c \in C$.

Poiché per ipotesi c è algebrico su B , esiste un polinomio $f(x) \in B[x]$ tale che c ne sia radice. Sia $f(x)$ il polinomio minimo di c su B , descritto come:

$$f(x) = b_0 + b_1x + \dots + b_nx^n, \quad n = [B(c) : B].$$

Dacché B è un'estensione algebrica di A , ogni coefficiente b_i di $f(x)$ è algebrico su A , ossia $[A(b_i) : A] \neq \infty$. Allora, per il *Teorema 7.20*, $[A(b_0, \dots, b_n) : A] \neq \infty$.

Anche $[A(c, b_0, \dots, b_n) : A(b_0, \dots, b_n)] \neq \infty$, dal momento che c è soluzione di $f(x) \in A(b_0, \dots, b_n)[x]$.

Allora, per il *Teorema delle torri algebriche*, $[A(c, b_0, \dots, b_n) : A] = [A(c, b_0, \dots, b_n) : A(b_0, \dots, b_n)][A(b_0, \dots, b_n) : A] \neq \infty$. Quindi $A(c, b_0, \dots, b_n)$ è un'estensione finita di A .

Poiché $A \subseteq A(c) \subseteq A(c, b_0, \dots, b_n)$ è una catena di estensione di campi, per la *Proposizione 7.16*, $A(c)$ è un'estensione finita di A , ed in quanto tale, per la *Proposizione 7.19*, è anche algebrica. Quindi c è algebrico su A , da cui la tesi. \square

§8 Campi di spezzamento

Teorema 8.1

Sia A un campo, e sia $f(x) \in A[x]$. Allora esiste sempre un'estensione di A in cui siano contenute tutte le radici di $f(x)$.

Dimostrazione. Si dimostra il teorema applicando il principio di induzione sul grado di $f(X)$.

(*passo base*) Sia $\deg f(x) = 0$. Allora A stesso è un campo in cui sono contenute tutte le radici, dacché esse non esistono.

(*passo induttivo*) Sia $\deg f(x) = n$. Sia $f_1(x)$ un irriducibile di $f(x)$ e sia $\gamma(x) \in A[x]$ tale che $f(x) = f_1(x)\gamma(x)$. Allora, per il [Teorema 6.6](#) $A[x]/(f_1(x))$ è un campo, in cui, per la [Proposizione 6.7](#), $f_1(x)$ ammette radice.

Poiché $\deg \gamma(x) < n$, per il passo induttivo esiste un campo C che estende $A[x]/(f_1(x))$ in cui risiedono tutte le sue radici. Dacché C contiene $A[x]/(f_1(x))$, sia le radici di $f_1(x)$ che di $\gamma(x)$ risiedono in C . Tuttavia queste sono tutte le radici di $f(x)$, si conclude che C , che è un'estensione di $A[x]/(f_1(x))$, e quindi anche di A , è il campo ricercato. \square

Pertanto ora è possibile enunciare la definizione di *campo di spezzamento*.

Definizione 8.2. Si definisce **campo di spezzamento** di un polinomio $f(x) \in A[x]$ un campo C con le seguenti caratteristiche:

- $f(x)$ si fattorizza in $C[x]$ come prodotto di irriducibili di primo grado (i.e. in $C[x]$ risiedono tutte le radici di $f(x)$),
- Se B è un campo tale che $A \subseteq B \subsetneq C$, allora $f(x)$ non si fattorizza in $B[x]$ come prodotto di irriducibili di primo grado.

Osservazione. Per il [Teorema 8.1](#) esiste sempre un campo di spezzamento di un polinomio, dunque la definizione data è una buona definizione.

Osservazione. In generale i campi di spezzamento non sono uguali, sebbene siano tutti isomorfi tra loro^a.

^aPer la dimostrazione di questo risultato si rimanda a TODO

Teorema 8.3

Sia A un campo e sia $B \supseteq A$ un campo di spezzamento di $f(x) \in A[x]$ su A , con $f(x)$ non costante. Sia $\deg f(x) = n$. Allora $[B : A] \leq n!$.

Dimostrazione. Siano $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ le radici di $f(x)$. Allora $[\mathbb{K}(\lambda_1) : \mathbb{K}] \leq n$, dacché λ_1 è radice di $f(x)$.

Sia ora $f(x) = (x - \lambda_1)g(x)$, con $\deg g(x) = n - 1$. Sicuramente λ_2 è radice di $g(x)$, pertanto $[\mathbb{K}(\lambda_1, \lambda_2) : \mathbb{K}(\lambda_1)] \leq n - 1$. Reiterando il ragionamento si può applicare infine il [Teorema delle torri algebriche](#):

$$[\mathbb{K}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) : \mathbb{K}] = [\mathbb{K}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) : \mathbb{K}(\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1})] \cdots [\mathbb{K}(\lambda_1) : \mathbb{K}] \leq 1 \cdot 2 \cdots n = n!,$$

da cui la tesi. □

§9 Teorema fondamentale dell'Algebra e radici reali in $\mathbb{Q}[x]$

Si enuncia adesso il *Teorema fondamentale dell'Algebra*, senza tuttavia fornirne una dimostrazione¹⁰.

Teorema 9.1 (*Teorema fondamentale dell'Algebra*)

Un polinomio non costante $f(x) \in \mathbb{C}[x]$ ammette sempre almeno una radice in \mathbb{C} .

Corollario 9.2

Sia $f(x) \in \mathbb{C}[x]$ di grado $n \geq 1$. Allora $f(x)$ ammette esattamente n radici, contate con la giusta molteplicità.

Dimostrazione. Sia ζ_1 una radice complessa di $f(x)$, la cui esistenza è garantita dal *Teorema fondamentale dell'Algebra*. Si divida $f(x)$ per $(x - \zeta_1)$ e se ne prende il quoziente $q_1(x)$, mentre si ignori il resto, che per la *Proposizione 6.2*, è nullo.

Si reiteri il procedimento utilizzando $q_1(x)$ al posto di $f(x)$ fino a quando il grado del quoziente non è nullo, e si chiami infine questo quoziente di grado nullo α . Infatti, poiché i gradi dei quozienti diminuiscono di 1 ad ogni iterazione, è garantito che l'algoritmo termini esattamente dopo n iterazioni. Pertanto, $f(x)$ a priori ha almeno n radici.

In questo modo, numerando le radici, si può scrivere $f(x)$ come:

$$f(x) = \alpha(x - \zeta_1)(x - \zeta_2) \cdots (x - \zeta_n). \quad (5)$$

Dal momento che $x - \zeta_i$ è irriducibile $\forall 1 \leq i \leq n$ e dacché $\mathbb{K}[x]$, in quanto anello euclideo, è un UFD, si dimostra che (5) è l'unica fattorizzazione di $f(x)$, a meno di associati. Pertanto $f(x)$ ammette esattamente n radici. \square

¹⁰Per la dimostrazione si rimanda a [DM, pp. 142-143], avvisando della sua estrema tecnicità. Una dimostrazione a tema strettamente algebrico è dovuta invece al matematico francese Laplace (1749 – 1827), per la quale si rimanda a [2, pp. 120-122].

§10 Introduzione alla teoria dei campi

§10.1 La caratteristica di un campo

Si consideri il seguente omomorfismo:

$$\psi : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{K},$$

completamente determinato dalla condizione $\psi(1) = 1$, dacché \mathbb{Z} è generato da 1. Si studia innanzitutto il caso in cui $\text{Ker } \psi = (0)$. In questo caso, ψ è un monomorfismo, e per il [Corollario 1.38](#), $\mathbb{Z} \cong \text{Imm } \psi$.

Pertanto, \mathbb{K} ammetterebbe come sottoanello una copia isomorfa di \mathbb{Z} . Inoltre, poiché \mathbb{K} è un campo, deve anche ammetterne gli inversi, e quindi ammetterebbe come sottocampo una copia isomorfa di \mathbb{Q} . La seguente definizione classificherà questi tipi di campo.

Definizione 10.1. Si dice che un campo \mathbb{K} è di **caratteristica zero** ($\text{char } \mathbb{K} = 0$), quando $\text{Ker } \psi = (0)$.

Altrimenti, se $\text{Ker } \psi \neq (0)$, dacché \mathbb{Z} è un anello euclideo, $\text{Ker } \psi$ deve essere monogenerato da un intero n , ossia $\text{Ker } \psi = (n)$.

Tuttavia non tutti gli interi sono ammissibili. Sia infatti n non primo, allora $n = ab$ con $a, b \neq \pm 1$. Si nota innanzitutto che $\psi(a) \neq 0$, se infatti fosse nullo, n dovrebbe dividere a , impossibile dal momento che $|a| < |n|$, [❌](#). Analogamente anche $\psi(b) \neq 0$.

Se n fosse generatore di $\text{Ker } \psi$ si ricaverebbe allora che:

$$\underbrace{\psi(a)}_{\neq 0} \underbrace{\psi(b)}_{\neq 0} = \psi(n) = 0,$$

che è assurdo, dal momento che \mathbb{K} , in quanto campo, è anche un dominio. Quindi n deve essere un numero primo. In particolare, allora, per il [Primo teorema d'isomorfismo](#), $\mathbb{Z}_p = \mathbb{Z}/(p) \cong \text{Imm } \psi$, ossia \mathbb{K} contiene una copia isomorfa di \mathbb{Z}_p , a cui ci riferiremo semplicemente con \mathbb{F}_p .

Allora, poiché sia \mathbb{K} che \mathbb{F}_p sono campi, \mathbb{K} è uno spazio vettoriale su \mathbb{F}_p . Si può dunque classificare quest'ultimo tipo di campi con la seguente definizione:

Definizione 10.2. Si dice che un campo \mathbb{K} è di **caratteristica p** ($\text{char } \mathbb{K} = p$) quando $\text{Ker } \psi = (p)$, con p primo.

Osservazione. La caratteristica di un campo **non** distingue i campi finiti dai campi infiniti. Esistono infatti campi infiniti di caratteristica p , come il campo delle funzioni razionali su \mathbb{Z}_p :

$$\mathbb{Z}_p(x) = \left\{ \frac{f(x)}{g(x)} \mid f(x), g(x) \in \mathbb{Z}_p[x], g(x) \neq 0 \right\}.$$

Infatti $\psi(p) = p\psi(1) = 0$.

§10.2 Prime proprietà dei campi di caratteristica p

Come si è appena visto, un campo \mathbb{K} di caratteristica p contiene al suo interno un sottocampo \mathbb{F}_p isomorfo a \mathbb{Z}_p , ed è per questo uno spazio vettoriale su di esso. A partire da questa informazione si può dimostrare la seguente proposizione.

Proposizione 10.3

Sia \mathbb{K} un campo di caratteristica p . Allora, per ogni elemento v di \mathbb{K} , $pv = 0$.

Dimostrazione. Considerando ogni elemento di \mathbb{K} come vettore e p come scalare, si ricava che:

$$pv = \underbrace{(1 + \dots + 1)}_{p \text{ volte}} v = \underbrace{(\psi(1) + \dots + \psi(1))}_{p \text{ volte}} v = \psi(p)v = 0v = 0.$$

□

Mentre, partendo da questa proposizione, si può dimostrare il seguente teorema.

Teorema 10.4 (Teorema del binomio ingenuo)

Siano a e b elementi di un campo di caratteristica p . Allora $(a + b)^p = a^p + b^p$.

Dimostrazione. Per dimostrare la tesi si applica la formula del binomio di Newton nel seguente modo:

$$(a + b)^p = \sum_{i=0}^p \binom{p}{i} a^{p-i} b^i.$$

Tuttavia, dal momento che p è un fattore di tutti i binomiali per $1 \leq i \leq p - 1$, tutti i termini computati con queste i sono nulli per la *Proposizione 10.3*. Si desume così l'identità della tesi. □

§10.3 L'omomorfismo di Frobenius

Definizione 10.5. Dato un campo \mathbb{K} di caratteristica p , si definisce **omomorfismo di Frobenius** per il campo \mathbb{K} la funzione:

$$\mathcal{F} : \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}, a \mapsto a^p.$$

Osservazione. In effetti, l'omomorfismo di Frobenius è un omomorfismo.

Infatti, $\mathcal{F}(1) = 1^p = 1$. Inoltre tale funzione rispetta la linearità per il *Teorema del binomio ingenuo*:

$$\mathcal{F}(a + b) = (a + b)^p = a^p + b^p = \mathcal{F}(a) + \mathcal{F}(b),$$

e chiaramente anche la moltiplicatività:

$$\mathcal{F}(ab) = (ab)^p = a^p b^p = \mathcal{F}(a)\mathcal{F}(b).$$

Proposizione 10.6

L'omomorfismo di Frobenius di un campo \mathbb{K} di caratteristica p è un monomorfismo.

Dimostrazione. Si prenda in considerazione $\text{Ker } \mathcal{F}$. Esso è sicuramente un ideale diverso da \mathbb{K} , dacché $1 \notin \text{Ker } \mathcal{F}$. Tuttavia, se $\text{Ker } \mathcal{F} \neq (0)$, $\text{Ker } \mathcal{F}$, dal momento che \mathbb{K} , in quanto campo, è un anello euclideo, e quindi un PID, è monogenerato da un invertibile.

Se però così fosse, $\text{Ker } \mathcal{F}$ coinciderebbe con il campo \mathbb{K} stesso, \nexists . Quindi $\text{Ker } \mathcal{F} = (0)$, da cui la tesi. \square

Proposizione 10.7

Sia \mathbb{K} un campo finito di caratteristica p . Allora l'omomorfismo di Frobenius è un automorfismo.

Dimostrazione. Dalla *Proposizione 10.6* è noto che \mathcal{F} sia già un monomorfismo. Dal momento che il dominio e il codominio sono lo stesso e constano entrambi dunque di un numero finito di elementi, se \mathcal{F} non fosse surgettivo, vi sarebbe un elemento di \mathbb{K} a cui non è associato nessun elemento di \mathbb{K} mediante \mathcal{F} .

Per il principio dei casseti, allora, spartendo $|\mathbb{K}|$ elementi in $|\mathbb{K}| - 1$ elementi, vi sarebbe almeno un elemento dell'immagine a cui sarebbero associati due elementi del dominio. Tuttavia questo è assurdo dal momento che \mathcal{F} è un monomorfismo. Quindi \mathcal{F} è un epimorfismo.

Dacché \mathcal{F} è contemporaneamente un endomorfismo, un monomorfismo e un epimorfismo, è allora anche un automorfismo. \square

Proposizione 10.8

Sia \mathbb{K} un campo di caratteristica p e si definisca l'insieme dei punti fissi del suo omomorfismo di Frobenius:

$$\text{Fix}(\mathcal{F}^n) = \{a \in \mathbb{K} \mid \mathcal{F}^n(a) = a\}.$$

Allora $\text{Fix}(\mathcal{F}^n)$ è un sottocampo di \mathbb{K} .

Dimostrazione. Affinché $\text{Fix}(\mathcal{F}^n)$ sia un sottocampo di \mathbb{K} , la sua somma e la sua moltiplicazione devono essere ben definite, e ogni suo elemento deve ammettere un inverso sia additivo che moltiplicativo.

Siano allora $a, b \in \text{Fix}(\mathcal{F}^n)$. \mathcal{F}^n è un omomorfismo, in quanto è composizione di omomorfismi (in particolare, dello stesso omomorfismo \mathcal{F}). Sfruttando le proprietà degli omomorfismi si dimostra dunque che $a + b \in \text{Fix}(\mathcal{F}^n)$:

$$\mathcal{F}^n(a + b) = \mathcal{F}^n(a) + \mathcal{F}^n(b) = a + b,$$

e che $ab \in \text{Fix}(\mathcal{F}^n)$:

$$\mathcal{F}^n(ab) = \mathcal{F}^n(a)\mathcal{F}^n(b) = ab.$$

Analogamente si dimostra che $-a \in \text{Fix}(\mathcal{F}^n)$:

$$\mathcal{F}^n(-a) = -\mathcal{F}^n(a) = -a,$$

e che $a^{-1} \in \text{Fix}(\mathcal{F}^n)$:

$$\mathcal{F}^n(a^{-1}) = \mathcal{F}^n(a)^{-1} = a^{-1}.$$

□

§10.4 Classificazione dei campi finiti

Teorema 10.9

Ogni campo finito \mathbb{K} di caratteristica p consta di p^n elementi, con $n \in \mathbb{N}^+$.

Dimostrazione. Come già detto precedentemente, \mathbb{K} è uno spazio vettoriale su una copia isomorfa di \mathbb{Z}_p , \mathbb{F}_p .

Si consideri allora il grado $[\mathbb{K} : \mathbb{F}_p]$. Sicuramente questo grado non è infinito, dal momento che \mathbb{K} non ha infiniti elementi. Quindi $[\mathbb{K} : \mathbb{F}_p] = n \in \mathbb{N}$.

Sia dunque (k_1, k_2, \dots, k_n) una base di \mathbb{K} su \mathbb{F}_p . Ogni elemento a di \mathbb{K} si potrà dunque scrivere come:

$$a = \alpha_1 k_1 + \dots + \alpha_n k_n, \quad \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{F}_p,$$

e dunque vi saranno in totale p^n elementi, dove ogni p è contato dal numero di elementi che è possibile associare ad ogni coefficiente, ossia $|\mathbb{F}_p| = p$, per il numero di elementi appartenenti alla base, ossia $[\mathbb{K} : \mathbb{F}_p] = n$, da cui la tesi. □

Teorema 10.10

Per ogni $n \in \mathbb{N}^+$ e per ogni numero primo p esiste un campo finito con p^n elementi.

Dimostrazione. Si consideri il polinomio $x^{p^n} - x$ su \mathbb{Z}_p e un suo campo di spezzamento A . $\text{Fix}(\mathcal{F}^n)$, per la *Proposizione 10.8*, è un sottocampo, e contiene esattamente le radici di $x^{p^n} - x$, che in A si spezza in fattori lineari, per definizione.

La derivata di $x^{p^n} - x$ è $p^n x^{p^n-1} - 1 \equiv -1$, dacché A è uno spazio vettoriale su \mathbb{Z}_p , e pertanto vale ancora la *Proposizione 10.3*. Dal momento che -1 e $x^{p^n} - x$ non hanno fattori lineari in comune, per il *Criterio della derivata*, $x^{p^n} - x$ non ammette radici multiple.

Allora $\text{Fix}(\mathcal{F}^n)$ è un campo con p^n elementi, ossia tutte le radici di $x^{p^n} - x$ (e coincide quindi con il campo di spezzamento A), da cui la tesi. □

§11 Teoremi rilevanti sui campi finiti

§11.1 Campo di spezzamento di un irriducibile in \mathbb{F}_p

Teorema 11.1

Sia $f(x)$ un polinomio irriducibile in \mathbb{F}_p e sia n il suo grado. Allora \mathbb{F}_{p^n} è il suo campo di spezzamento.

Dimostrazione. Dacché $f(x)$ è irriducibile, $\mathbb{F}_p/(f(x))$ è un campo con p^n elementi, ed è quindi isomorfo a \mathbb{F}_{p^n} .

Sia $\alpha = x + (f(x))$ una radice di $f(x)$ in \mathbb{F}_{p^n} . Dal momento che $f(x)$ è irriducibile in \mathbb{F}_p , esso è il polinomio minimo di α . Tuttavia, poiché $\alpha \in \mathbb{F}_{p^n}$, α è anche radice di $x^{p^n} - x$. Pertanto si deduce che $f(x)$ divide $x^{p^n} - x$.

Dunque, poiché $x^{p^n} - x$ in \mathbb{F}_{p^n} è prodotto di fattori lineari, tutte le radici di $f(x)$ sono già in \mathbb{F}_{p^n} .

Inoltre, \mathbb{F}_{p^n} è il più piccolo sottocampo contenente α , dacché $\mathbb{F}_{p^n} \cong \mathbb{F}_p/(f(x)) \cong \mathbb{F}_p(\alpha)$. Quindi si deduce che \mathbb{F}_{p^n} è un campo di spezzamento per $f(x)$, ossia la tesi. \square

Lemma 11.2

Sia $f(x)$ un irriducibile di grado n su $\mathbb{F}_p[x]$ e sia α una sua radice in \mathbb{F}_{p^n} . Allora $f(\mathcal{F}^k(\alpha)) = 0, \forall k \geq 0$ ^a.

^a \mathcal{F} è l'omomorfismo di Frobenius, definito come $\mathcal{F} : \mathbb{F}_p \rightarrow \mathbb{F}_p, a \mapsto a^p$.

Dimostrazione. Sia $f(x) = a_n x^n + \dots + a_0$ a coefficienti in \mathbb{F}_p . Si dimostra la tesi applicando il principio di induzione su k .

(passo base) $f(\mathcal{F}^0(\alpha)) = f(\alpha) = 0$.

(passo induttivo) Per l'ipotesi induttiva, $f(\mathcal{F}^{k-1}(\alpha)) = 0$. Allora, si verifica algebricamente che:

$$\begin{aligned} f(\mathcal{F}^k(\alpha)) &= a_n (\mathcal{F}^k(\alpha))^n + \dots + a_0 = \mathcal{F}(a_n) \mathcal{F}((\mathcal{F}^{k-1}(\alpha))^n) + \dots + \mathcal{F}(a_0) = \\ &= \mathcal{F}(f(\mathcal{F}^{k-1}(\alpha))) = \mathcal{F}(0) = 0, \end{aligned}$$

dove si è usato che $\mathcal{F}(a_i) = a_i, \forall 0 \leq i \leq n$, dacché ogni elemento di \mathbb{F}_p è radice di $x^p - x$. \square

Teorema 11.3

Sia $f(x)$ un irriducibile di grado n su $\mathbb{F}_p[x]$ e sia α una sua radice in \mathbb{F}_{p^n} . Allora vale la seguente fattorizzazione in \mathbb{F}_{p^n} :

$$f(x) = \prod_{i=0}^{n-1} (x - \alpha^{p^i}) = \prod_{i=0}^{n-1} (x - \mathcal{F}^i(\alpha)),$$

dove ogni fattore non è associato.

Dimostrazione. Si verifica innanzitutto che vale chiaramente che $\alpha^{p^i} = \mathcal{F}^i(\alpha)$. Dal momento che α è radice, allora ogni α^{p^i} lo è, per il *Lemma 11.2*.

Affinché tutti i fattori della moltiplicazione non siano associati è sufficiente dimostrare che n è il più piccolo esponente j per cui $\mathcal{F}^j(\alpha) = \alpha$. Infatti, siano $\mathcal{F}^i(\alpha) = \mathcal{F}^j(\alpha)$ con $0 \leq j < i < n$, allora, applicando più volte \mathcal{F} , si ricava che:

$$\mathcal{F}^n(\alpha) = \mathcal{F}^{j+n-i}(\alpha) \implies \mathcal{F}^{j+n-i}(\alpha) = \alpha,$$

che è assurdo, dacché $j < i < n \implies j + n - i < n$, \nexists .

Innanzitutto, si verifica che $\mathcal{F}^n(\alpha) = \alpha^{p^n} = \alpha$, dacché $\alpha \in \mathbb{F}_{p^n}$. Infine, sia t il più piccolo esponente j per cui $\mathcal{F}^j(\alpha) = \alpha$. Se j fosse minore di n , α sarebbe radice di $x^{p^t} - x$. Tuttavia questo è assurdo, dal momento che così α apparterebbe a $\mathbb{F}_{p^t} \neq \mathbb{F}_{p^n}$, quando invece il più piccolo campo che lo contiene è $\mathbb{F}_p(\alpha) \cong \mathbb{F}_p[x]/(f(x)) \cong \mathbb{F}_{p^n}$, \nexists . \square

§11.2 L'inclusione $\mathbb{F}_{p^m} \subseteq \mathbb{F}_{p^n}$ e il polinomio $x^{p^n} - x$

Lemma 11.4

Sia α una radice di $x^{p^d} - x$ con $d \mid n$. Allora α è anche una radice di $x^{p^n} - x$.

Dimostrazione. Sia $s \in \mathbb{N}$ tale che $n = ds$. Si verifica la tesi applicando il principio di induzione su $k \in \mathbb{N}$.

(*passo base*) Per ipotesi, $\alpha^{p^d} = \alpha$.

(*passo induttivo*) Per ipotesi induttiva, $\alpha^{p^{(k-1)d}} = \alpha$. Allora si ricava che:

$$\alpha^{p^{(k-1)d}} = \alpha \implies \alpha^{p^{kd}} = \alpha^{p^d} = \alpha.$$

In particolare, $\alpha^{p^n} = \alpha^{p^{ds}} = \alpha$, da cui la tesi. \square

Teorema 11.5

$\mathbb{F}_{p^m} \subseteq \mathbb{F}_{p^n}$ se e solo se $m \mid n$.

Dimostrazione. Si dimostrano le due implicazioni separatamente.

(\implies) Dal momento che $\mathbb{F}_{p^m} \subseteq \mathbb{F}_{p^n}$, si ricava la seguente catena di estensioni:

$$\mathbb{F}_p \subseteq \mathbb{F}_{p^m} \subseteq \mathbb{F}_{p^n},$$

dalla quale, applicando il *Teorema delle Torri Algebriche*, si desume la seguente equazione:

$$\underbrace{[\mathbb{F}_{p^n} : \mathbb{F}_p]}_n = [\mathbb{F}_{p^n} : \mathbb{F}_{p^m}] \underbrace{[\mathbb{F}_{p^m} : \mathbb{F}_p]}_d,$$

e quindi che m divide n .

(\impliedby) Sia $m \mid n$. Si consideri $\alpha \in \mathbb{F}_{p^m}$. α è sicuramente radice di $x^{p^m} - x$, e poiché m divide n , è anche radice di $x^{p^n} - x$, per il *Lemma 11.4*. Allora α appartiene al campo di spezzamento di $x^{p^n} - x$ su \mathbb{F}_p , ossia \mathbb{F}_{p^n} . Pertanto $\mathbb{F}_{p^m} \subseteq \mathbb{F}_{p^n}$. □

Corollario 11.6

$\forall 1 \leq i \leq n$. Allora, detta m_i il grado di $g_i(x)$, il campo di spezzamento di $f(x)$ è \mathbb{F}_{p^k} , dove $k = \text{mcm}(m_1, m_2, \dots, m_n)$.

Dimostrazione. Il campo di spezzamento di $f(x)$ è il più piccolo campo rispetto all'inclusione che ne contenga tutte le radici, ossia il più piccolo campo che contenga $\mathbb{F}_{p^{m_1}}, \mathbb{F}_{p^{m_2}}, \dots, \mathbb{F}_{p^{m_n}}$. Si dimostra che tale campo è proprio \mathbb{F}_{p^k} .

Innanzitutto \mathbb{F}_{p^k} , per il *Teorema 11.5*, contiene tutti i campi di spezzamento dei fattori irriducibili di $f(x)$, dacché m_i divide $k \forall 1 \leq i \leq n$.

Sia supponga esista adesso un altro campo $\mathbb{F}_{p^t} \subseteq \mathbb{F}_{p^k}$ con tutte le radici. Sicuramente $t \mid k$, per il *Teorema 11.5*. Inoltre, dal momento che dovrebbe includere ogni campo $\mathbb{F}_{p^{m_i}}$, sempre per il *Teorema 11.5*, m_i divide $t \forall 1 \leq i \leq n$.

Allora t è un multiplo comune di tutti i m_i , e quindi k , in quanto minimo comune multiplo, lo divide. Si conclude allora che $t = k$, e quindi che \mathbb{F}_{p^k} è un campo di spezzamento di $f(x)$. □

Teorema 11.7

$x^{p^n} - x$ è il prodotto di tutti i polinomi irriducibili in \mathbb{F}_p di grado divisore di n .

Dimostrazione. La proposizione è equivalente a affermare che ogni polinomio irriducibile in \mathbb{F}_p ha grado divisore di n se e solo se divide $x^{p^n} - x$. Si dimostrano le due implicazioni separatamente.

(\implies) Sia $f(x)$ un polinomio irriducibile in \mathbb{F}_p di grado d , con $d \mid n$. Si consideri allora il campo $\mathbb{F}_{p^d} \cong \mathbb{F}_p/(f(x))$, e sia α una radice di $f(x)$ in tale campo.

Per il *Lemma 11.4* si verifica che α è anche una radice di $x^{p^n} - x$. Poiché $f(x)$ è irriducibile, esso è il polinomio minimo di α , e quindi si deduce che $f(x)$ divide $x^{p^n} - x$.

(\Leftarrow) Sia $f(x)$ un polinomio irriducibile in \mathbb{F}_p di grado d che divide $x^{p^n} - x$. Si consideri allora il campo $\mathbb{F}_{p^d} \cong \mathbb{F}_p/(f(x))$, e sia α una radice di $f(x)$ in tale campo. Allora $\mathbb{F}_{p^d} \cong \mathbb{F}_p(\alpha)$, dacché $f(x)$, in quanto irriducibile, è il polinomio minimo di α .

Dacché $f(x)$ divide $x^{p^n} - x$, α è anche una radice di $x^{p^n} - x$, e quindi che $\alpha \in \mathbb{F}_{p^n}$. Dal momento che chiaramente anche $\mathbb{F}_p \subseteq \mathbb{F}_{p^n}$, si deduce che $\mathbb{F}_{p^d} \cong \mathbb{F}_p(\alpha) \subseteq \mathbb{F}_{p^n}$. Allora, per il *Teorema 11.5*, d divide n . \square

§12 Riferimenti bibliografici

- [DM] P. Di Martino e R. Dvornicich. *Algebra*. Didattica e Ricerca. Manuali. Pisa University Press, 2013. ISBN: 9788867410958.
- [H] I.N. Herstein. *Algebra*. Editori Riuniti University Press, 2010. ISBN: 9788864732107.
- [1] M. A. Jodeit. «Uniqueness in the Division Algorithm». In: *The American Mathematical Monthly* 74.7 (1967), pp. 835–836. ISSN: 00029890, 19300972. URL: <http://www.jstor.org/stable/2315810>.
- [2] R. Remmert. «The Fundamental Theorem of Algebra». In: *Numbers*. New York, NY: Springer New York, 1991, pp. 97–122. ISBN: 978-1-4612-1005-4. DOI: [10.1007/978-1-4612-1005-4_5](https://doi.org/10.1007/978-1-4612-1005-4_5). URL: https://doi.org/10.1007/978-1-4612-1005-4_5.