I prodotti di uno spazio vettoriale

Dispense del corso di Geometria 1
(ancora in corso di correzione e revisione)

Gabriel Antonio Videtta

A.A. 2022/2023

UNIVERSITÀ DI PISA

Indice

1 Introduzione al prodotto scalare

Nota. Nel corso del documento, per V, qualora non specificato, si intenderà uno spazio vettoriale di dimensione finita n.

1.1 Prime definizioni

1.1.1 Prodotto scalare e vettori ortogonali rispetto a φ

Definizione (prodotto scalare)**.** Un **prodotto scalare** su V è una forma bilineare simmetrica φ con argomenti in V.

Esempio. Sia $\varphi : M(n, \mathbb{K}) \times M(n, \mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ tale che $\varphi(A, B) = \operatorname{tr}(AB)$.

▶ $\varphi(A + A', B) = \operatorname{tr}((A + A')B) = \operatorname{tr}(AB + A'B) = \operatorname{tr}(AB) + \operatorname{tr}(A'B) = \varphi(A, B) + \varphi(A', B)$ (linearità nel primo argomento),
▶ $\varphi(\alpha A, B) = \operatorname{tr}(\alpha AB) = \alpha \operatorname{tr}(AB) = \alpha\varphi(A, B)$ (omogeneità nel primo argomento),
▶ $\varphi(A, B) = \operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA) = \varphi(B, A)$ (simmetria),
▶ poiché φ è simmetrica, φ è lineare e omogenea anche nel secondo argomento, e quindi è una forma bilineare simmetrica, ossia un prodotto scalare su $M(n, \mathbb{K})$.

Definizione (vettori ortogonali)**.** Due vettori $\underline{v}$, $\underline{w} \in V$ si dicono **ortogonali** rispetto al prodotto scalare φ, ossia $\underline{v} \perp \underline{w}$, se $\varphi(\underline{v}, \underline{w}) = 0$.

Definizione (somma diretta ortogonale)**.** Siano U e $W \subseteq V$ due sottospazi di V in somma diretta. Allora si dice che U e W sono in **somma diretta ortogonale** rispetto al prodotto scalare φ di V, ossia che $U \oplus W = U \oplus^{\perp} W$, se $\varphi(\underline{u}, \underline{w}) = 0 \;\forall\, \underline{u} \in U$, $\underline{w} \in W$.

Definizione. Si definisce prodotto scalare *canonico* di $\mathbb{K}^n$ la forma bilineare simmetrica $\varphi = \langle \cdot, \cdot \rangle$ con argomenti in $\mathbb{K}^n$ tale che:

$$\varphi(\underline{v}, \underline{w}) = \langle \underline{v}, \underline{w} \rangle = \underline{v}^\top \underline{w}, \quad \forall\, \underline{v}, \underline{w} \in V.$$

Osservazione. Si può facilmente osservare che il prodotto scalare canonico di $\mathbb{K}^n$ è effettivamente un prodotto scalare.

▶ $\varphi(\underline{v_1} + \underline{v_2}, \underline{w}) = (\underline{v_1} + \underline{v_2})^\top \underline{w} = (\underline{v_1}^\top + \underline{v_2}^\top)\underline{w} = \underline{v_1}^\top \underline{w} + \underline{v_2}^\top \underline{w} = \varphi(\underline{v_1}, \underline{w}) + \varphi(\underline{v_2}, \underline{w})$ (linearità nel primo argomento),
▶ $\varphi(\alpha\underline{v}, \underline{w}) = (\alpha\underline{v})^\top \underline{w} = \alpha\underline{v}^\top \underline{w} = \alpha\varphi(\underline{v}, \underline{w})$ (omogeneità nel primo argomento),
▶ $\varphi(\underline{v}, \underline{w}) = \underline{v}^\top \underline{w} = (\underline{v}^\top \underline{w})^\top = \underline{w}^\top \underline{v} = \varphi(\underline{w}, \underline{v})$ (simmetria),
▶ poiché φ è simmetrica, φ è lineare e omogenea anche nel secondo argomento, e quindi è una forma bilineare simmetrica, ossia un prodotto scalare su $\mathbb{K}^n$.

Esempio. Altri esempi di prodotto scalare sono i seguenti:

- $\varphi(A, B) = \mathrm{tr}(A^\top B)$ per $M(n, \mathbb{K})$,
- $\varphi(p(x), q(x)) = p(a)q(a)$ per $\mathbb{K}[x]$, con $a \in \mathbb{K}$,
- $\varphi(p(x), q(x)) = \sum_{i=1}^{n} p(x_i)q(x_i)$ per $\mathbb{K}[x]$, con x_1, ..., x_n distinti,
- $\varphi(p(x), q(x)) = \int_a^b p(x)q(x)dx$ per lo spazio delle funzioni integrabili su $\mathbb{R}$, con a, b in $\mathbb{R}$,
- $\varphi(\underline{x}, \underline{y}) = \underline{x}^\top A \underline{y}$ per $\mathbb{K}^n$, con $A \in M(n, \mathbb{K})$ simmetrica, detto anche **prodotto scalare indotto dalla matrice** A, ed indicato con φ_A.

1.1.2 Prodotto definito o semidefinito

Definizione. Sia[1] $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Allora un prodotto scalare φ si dice **definito positivo** ($\varphi > 0$) se $\underline{v} \in V$, $\underline{v} \neq \underline{0} \implies \varphi(\underline{v}, \underline{v}) > 0$. Analogamente φ è **definito negativo** ($\varphi < 0$) se $\underline{v} \neq \underline{0} \implies \varphi(\underline{v}, \underline{v}) < 0$. In generale si dice che φ è **definito** se è definito positivo o definito negativo.

Infine, φ è **semidefinito positivo** ($\varphi \geq 0$) se $\varphi(\underline{v}, \underline{v}) \geq 0$ $\forall \underline{v} \in V$ (o **semidefinito negativo**, e quindi $\varphi \leq 0$, se invece $\varphi(\underline{v}, \underline{v}) \leq 0$ $\forall \underline{v} \in V$). Analogamente ai prodotti definiti, si dice che φ è **semidefinito** se è semidefinito positivo o semidefinito negativo.

Esempio. Il prodotto scalare canonico di $\mathbb{R}^n$ è definito positivo: infatti $\varphi((x_1, ..., x_n), (x_1, ..., x_n)) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 > 0$, se $(x_1, ..., x_n) \neq \underline{0}$.

Al contrario, il prodotto scalare $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tale che $\varphi((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = x_1y_1 - x_2y_2$ non è definito positivo: $\varphi((x, y), (x, y)) = 0$, $\forall$ $(x, y) \mid x^2 = y^2$, ossia se $y = x$ o $y = -x$.

1.2 Il radicale di un prodotto scalare

1.2.1 La forma quadratica q associata a φ e vettori (an)isotropi

Definizione. Ad un dato prodotto scalare φ di V si associa una mappa $q : V \to \mathbb{K}$, detta **forma quadratica**, tale che $q(\underline{v}) = \varphi(\underline{v}, \underline{v})$.

Osservazione. Si osserva che q non è lineare in generale: infatti $q(\underline{v} + \underline{w}) \neq q(\underline{v}) + q(\underline{w})$ in $\mathbb{R}^n$.

Definizione (vettore (an)isotropo)**.** Un vettore $\underline{v} \in V$ si dice **isotropo** rispetto al prodotto scalare φ se $q(\underline{v}) = \varphi(\underline{v}, \underline{v}) = 0$. Al contrario, $\underline{v}$ si dice **anisotropo** se non è isotropo, ossia se $q(\underline{v}) \neq 0$.

Definizione (cono isotropo)**.** Si definisce **cono isotropo** di V rispetto al prodotto scalare φ il seguente insieme:

[1] In realtà, la definizione è facilmente estendibile a qualsiasi campo, purché esso sia ordinato.

$$\mathrm{CI}(\varphi) = \{\underline{v} \in V \mid \varphi(\underline{v}, \underline{v}) = 0\},$$

ossia l'insieme dei vettori isotropi di V.

Esempio. Rispetto al prodotto scalare $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ tale che $\varphi((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)) = x_1y_1 + x_2y_2 - x_3y_3$, i vettori isotropi sono i vettori della forma (x, y, z) tali che $x^2 + y^2 = z^2$, e quindi $\mathrm{CI}(\varphi)$ è l'insieme dei vettori stanti sul cono di equazione $x^2 + y^2 = z^2$.

1.2.2 Matrice associata a φ e relazione di congruenza

Osservazione. Come già osservato in generale per le applicazioni multilineari, il prodotto scalare è univocamente determinato dai valori che assume nelle coppie $\underline{v_i}, \underline{v_j}$ estraibili da una base $\mathcal{B}$. Infatti, se $\mathcal{B} = (\underline{v_1}, ..., \underline{v_k})$, $\underline{v} = \sum_{i=1}^k \alpha_i \underline{v_i}$ e $\underline{w} = \sum_{i=1}^k \beta_i \underline{v_i}$, allora:

$$\varphi(\underline{v}, \underline{w}) = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k \alpha_i \beta_j \, \varphi(\underline{v_i}, \underline{v_j}).$$

Definizione. Sia φ un prodotto scalare di V e sia $\mathcal{B} = (\underline{v_1}, ..., \underline{v_n})$ una base ordinata di V. Allora si definisce la **matrice associata** a φ come la matrice:

$$M_{\mathcal{B}}(\varphi) = (\varphi(\underline{v_i}, \underline{v_j}))_{i,\, j=1-n} \in M(n, \mathbb{K}).$$

Osservazione.
▶ $M_{\mathcal{B}}(\varphi)$ è simmetrica, infatti $\varphi(\underline{v_i}, \underline{v_j}) = \varphi(\underline{v_j}, \underline{v_i})$, dal momento che il prodotto scalare è simmetrico,
▶ $\varphi(\underline{v}, \underline{w}) = [\underline{v}]_{\mathcal{B}}^\top M_{\mathcal{B}}(\varphi)[\underline{w}]_{\mathcal{B}}$.

Teorema 1.1. (di cambiamento di base per matrici di prodotti scalari) Siano $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$ due basi ordinate di V. Allora, se φ è un prodotto scalare di V e $P = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}(\mathrm{Id}_V)$, vale la seguente identità:

$$\underbrace{M_{\mathcal{B}'}(\varphi)}_{A'} = P^\top \underbrace{M_{\mathcal{B}}}_{A} P.$$

Dimostrazione. Siano $\mathcal{B} = (\underline{v_1}, ..., \underline{v_n})$ e $\mathcal{B}' = (\underline{w}_1, ..., \underline{w}_n)$. Allora $A'_{ij} = \varphi(\underline{w}_i, \underline{w}_j) = [\underline{w}_i]_{\mathcal{B}}^\top A[\underline{w}_j]_{\mathcal{B}} = (P^i)^\top AP^j = P_i^\top (AP)^j = (P^\top AP)_{ij}$, da cui la tesi. □

Definizione. Si definisce **congruenza** la relazione di equivalenza $\cong$ (denotata anche come $\equiv$) definita nel seguente modo su $A, B \in M(n, \mathbb{K})$:

$$A \cong B \overset{\text{def}}{\iff} \exists\, P \in GL(n, \mathbb{K}) \mid A = P^\top AP.$$

Osservazione. Si può facilmente osservare che la congruenza è in effetti una relazione di equivalenza.

▶ $A = I^\top AI \implies A \cong A$ (riflessione),
▶ $A \cong B \implies A = P^\top BP \implies B = (P^\top)^{-1}AP^{-1} = (P^{-1})^\top AP^{-1} \implies B \cong A$ (simmetria),
▶ $A \cong B$, $B \cong C \implies A = P^\top BP$, $B = Q^\top CQ$, quindi $A = P^\top Q^\top CQP = (QP)^\top C(QP) \implies A \cong C$ (transitività).

Osservazione. Si osservano alcune proprietà della congruenza.

▶ Per il teorema di cambiamento di base del prodotto scalare, due matrici associate a uno stesso prodotto scalare sono sempre congruenti (esattamente come due matrici associate a uno stesso endomorfismo sono sempre simili).
▶ Se A e B sono congruenti, $A = P^\top BP \implies \mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(P^\top BP) = \mathrm{rg}(BP) = \mathrm{rg}(B)$, dal momento che P e $P^\top$ sono invertibili; quindi il rango è un invariante per congruenza. Allora si può ben definire il rango $\mathrm{rg}(\varphi)$ di un prodotto scalare come il rango della matrice associata di φ in una qualsiasi base di V.
▶ Se A e B sono congruenti, $A = P^\top BP \implies \det(A) = \det(P^\top BP) = \det(P^\top)\det(B)\det(P) = \det(P)^2\det(B)$. Quindi, per $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, il segno del determinante è un altro invariante per congruenza.

1.2.3 Studio del radicale $V^\perp$ attraverso $M_\mathcal{B}(\varphi)$

Definizione. Si definisce il **radicale** di un prodotto scalare φ come lo spazio:

$$V^\perp = \mathrm{Rad}(\varphi) = \{\underline{v} \in V \mid \varphi(\underline{v}, \underline{w}) = 0 \; \forall\, \underline{w} \in V\}$$

Osservazione. Il radicale del prodotto scalare canonico su $\mathbb{R}^n$ ha dimensione nulla, dal momento che $\forall\, \underline{v} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\underline{0}\}$, $q(\underline{v}) = \varphi(\underline{v}, \underline{v}) > 0 \implies \underline{v} \notin V^\perp$. In generale ogni prodotto scalare definito positivo (o negativo) è non degenere, dal momento che ogni vettore non nullo non è isotropo, e dunque non può appartenere a $V^\perp$.

Definizione. Un prodotto scalare si dice **degenere** se il radicale dello spazio su tale prodotto scalare ha dimensione non nulla.

Osservazione. Sia $\alpha_\varphi : V \to V^*$ la mappa[2] tale che $\alpha_\varphi(\underline{v}) = p$, dove $p(\underline{w}) = \varphi(\underline{v}, \underline{w})$ $\forall\, \underline{v}$, $\underline{w} \in V$.

Si osserva che α_φ è un'applicazione lineare. Infatti, $\forall\, \underline{v}$, $\underline{w}$, $\underline{u} \in V$, $\alpha_\varphi(\underline{v} + \underline{w})(\underline{u}) = \varphi(\underline{v}+\underline{w}, \underline{u}) = \varphi(\underline{v}, \underline{u}) + \varphi(\underline{w}, \underline{u}) = \alpha_\varphi(\underline{v})(\underline{u}) + \alpha_\varphi(\underline{w})(\underline{u}) \implies \alpha_\varphi(\underline{v}+\underline{w}) = \alpha_\varphi(\underline{v}) + \alpha_\varphi(\underline{w})$. Inoltre $\forall\, \underline{v}$, $\underline{w} \in V$, $\lambda \in \mathbb{K}$, $\alpha_\varphi(\lambda\underline{v})(\underline{w}) = \varphi(\lambda\underline{v}, \underline{w}) = \lambda\varphi(\underline{v}, \underline{w}) = \lambda\alpha_\varphi(\underline{v})(\underline{w}) \implies \alpha_\varphi(\lambda\underline{v}) = \lambda\alpha_\varphi(\underline{v})$.
Si osserva inoltre che $\mathrm{Ker}\,\alpha_\varphi$ raccoglie tutti i vettori $\underline{v} \in V$ tali che $\varphi(\underline{v}, \underline{w}) = 0 \; \forall\, \underline{w} \in W$, ossia esattamente i vettori di $V^\perp$, per cui si conclude che $V^\perp = \mathrm{Ker}\,\alpha_\varphi$ (per cui $V^\perp$ è effettivamente uno spazio vettoriale). Se V ha dimensione finita, $\dim V = \dim V^*$, e si

[2] In letteratura questa mappa, se invertibile, è nota come *isomorfismo musicale*, ed è in realtà indicata come $\flat$.

può allora concludere che $\dim V^\perp > 0 \iff \operatorname{Ker} \alpha_\varphi \neq \{\underline{0}\} \iff \alpha_\varphi$ non è invertibile (infatti lo spazio di partenza e di arrivo di α_φ hanno la stessa dimensione). In particolare, α_φ non è invertibile se e solo se $\det(\alpha_\varphi) = 0$.

Sia $\mathcal{B} = (\underline{v_1}, ..., \underline{v_n})$ una base ordinata di V. Si consideri allora la base ordinata del duale costruita su $\mathcal{B}$, ossia $\mathcal{B}^* = (\underline{v_1^*}, ..., \underline{v_n^*})$. Allora $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}^*}(\alpha_\varphi)^i = [\alpha_\varphi(\underline{v_i})]_{\mathcal{B}^*} = \begin{pmatrix} \varphi(\underline{v_i}, \underline{v_1}) \\ \vdots \\ \varphi(\underline{v_i}, \underline{v_n}) \end{pmatrix} \underbrace{=}_{\varphi \text{ è simmetrica}} \begin{pmatrix} \varphi(\underline{v_1}, \underline{v_i}) \\ \vdots \\ \varphi(\underline{v_n}, \underline{v_i}) \end{pmatrix} = M_{\mathcal{B}}(\varphi)^i$. Quindi $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}^*}(\alpha_\varphi) = M_{\mathcal{B}}(\varphi)$.

Si conclude allora che φ è degenere se e solo se $\det(M_{\mathcal{B}}(\varphi)) = 0$ e che $V^\perp \cong \operatorname{Ker} M_{\mathcal{B}}(\varphi)$ mediante l'isomorfismo del passaggio alle coordinate.

1.2.4 Condizioni per la (semi)definitezza di un prodotto scalare

Proposizione 1.1. Sia $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Allora φ è definito $\iff \mathrm{CI}(\varphi) = \{\underline{0}\}$.

Dimostrazione. Si dimostrano le due implicazioni separatamente.

($\implies$) Se φ è definito, allora $\varphi(\underline{v}, \underline{v})$ è sicuramente diverso da zero se $\underline{v} \neq \underline{0}$. Pertanto $\mathrm{CI}(\varphi) = \{\underline{0}\}$.

($\impliedby$) Sia φ non definito. Se non esistono $\underline{v} \neq \underline{0}$, $\underline{w} \neq \underline{0} \in V$ tali che $q(\underline{v}) > 0$ e che $q(\underline{w}) < 0$, allora φ è necessariamente semidefinito. In tal caso, poiché φ non è definito, deve anche esistere $\underline{u} \in V$, $\underline{u} \neq \underline{0} \mid q(\underline{u}) = 0 \implies \mathrm{CI}(\varphi) \neq \{\underline{0}\}$.

Se invece tali $\underline{v}$, $\underline{w}$ esistono, questi sono anche linearmente indipendenti. Se infatti non lo fossero, uno sarebbe il multiplo dell'altro, e quindi le loro due forme quadratiche sarebbero concordi di segno, $\lightning$. Si consideri allora la combinazione lineare $\underline{v} + \lambda \underline{w}$ al variare di $\lambda \in \mathbb{R}$, imponendo che essa sia isotropa:

$$q(\underline{v} + \lambda \underline{w}) = 0 \iff \lambda^2 q(\underline{w}) + 2\lambda q(\underline{v}, \underline{w}) + q(\underline{v}) = 0.$$

Dal momento che $\frac{\Delta}{4} = \overbrace{q(\underline{v}, \underline{w})^2}^{\geq 0} - \overbrace{q(\underline{w}) q(\underline{v})}^{>0}$ è sicuramente maggiore di zero, tale equazione ammette due soluzioni reali λ_1, λ_2. In particolare λ_1 è tale che $\underline{v} + \lambda_1 \underline{w} \neq \underline{0}$, dal momento che $\underline{v}$ e $\underline{w}$ sono linearmente indipendenti. Allora $\underline{v} + \lambda_1 \underline{w}$ è un vettore isotropo non nullo di $V \implies \mathrm{CI}(\varphi) \neq \{\underline{0}\}$.

Si conclude allora, tramite la contronominale, che se $\mathrm{CI}(\varphi) = \{\underline{0}\}$, φ è necessariamente definito. $\square$

Proposizione 1.2. Sia $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Allora φ è semidefinito $\iff \mathrm{CI}(\varphi) = V^\perp$.

Dimostrazione. Si dimostrano le due implicazioni separatamente.

$(\implies)$ Sia φ semidefinito. Chiaramente $V^\perp \subseteq \mathrm{CI}(\varphi)$. Si assuma per assurdo che $V^\perp \subsetneq \mathrm{CI}(\varphi)$. Sia allora $\underline{v}$ tale che $\underline{v} \in \mathrm{CI}(\varphi)$ e che $\underline{v} \notin V^\perp$. Poiché $\underline{v} \notin V^\perp$, esiste un vettore $\underline{w} \in V$ tale che $\varphi(\underline{v}, \underline{w}) \neq 0$. Si osserva che $\underline{v}$ e $\underline{w}$ sono linearmente indipendenti tra loro. Se infatti non lo fossero, esisterebbe $\mu \in \mathbb{R}$ tale che $\underline{w} = \mu \underline{v} \implies \varphi(\underline{v}, \underline{w}) = \mu\, \varphi(\underline{v}, \underline{v}) = 0$, $\lightning$.

Si consideri allora la combinazione lineare $\underline{v} + \lambda \underline{w}$. Si consideri φ semidefinito positivo. In tal caso si può imporre che la valutazione di q in $\underline{v} + \lambda \underline{w}$ sia strettamente negativa:

$$q(\underline{v} + \lambda \underline{w}) < 0 \iff \overbrace{q(\underline{v})}^{=0} + \lambda^2 q(\underline{w}) + 2\lambda\, \varphi(\underline{v}, \underline{w}) < 0.$$

In particolare, dal momento che $\frac{\Delta}{4} = \varphi(\underline{v}, \underline{w})^2 > 0$, tale disequazione ammette una soluzione $\lambda_1 \neq 0$. Inoltre $\underline{v} + \lambda_1 \underline{w} \neq \underline{0}$, dal momento che $\underline{v}$ e $\underline{w}$ sono linearmente indipendenti. Allora si è trovato un vettore non nullo per cui la valutazione in esso di q è negativa, contraddicendo l'ipotesi di semidefinitezza positiva di φ, $\lightning$. Analogamente si dimostra la tesi per φ semidefinito negativo.

$(\impliedby)$ Sia φ non semidefinito. Allora devono esistere $\underline{v}$, $\underline{w} \in V$ tali che $q(\underline{v}) > 0$ e che $q(\underline{w}) < 0$. In particolare, $\underline{v}$ e $\underline{w}$ sono linearmente indipendenti tra loro, dal momento che se non lo fossero, uno sarebbe multiplo dell'altro, e le valutazioni in essi di q sarebbero concordi di segno, $\lightning$. Si consideri allora la combinazione lineare $\underline{v} + \lambda \underline{w}$, imponendo che q si annulli in essa:

$$q(\underline{v} + \lambda \underline{w}) = 0 \iff \lambda^2 q(\underline{w}) + 2\lambda q(\underline{v}, \underline{w}) + q(\underline{v}) = 0.$$

In particolare, dal momento che $\frac{\Delta}{4} = \varphi(\underline{v}, \underline{w})^2 > 0$, tale disequazione ammette una soluzione $\lambda_1 \neq 0$. Allora, per tale λ_1, $\underline{v} + \lambda_1 \underline{w} \in \mathrm{CI}(\varphi)$. Tuttavia $\varphi(\underline{v} + \lambda_1 \underline{w}, \underline{v} - \lambda_1 \underline{w}) = q(\underline{v}) - \underbrace{\lambda_1^2 q(\underline{w})}_{<0} > 0 \implies \underline{v} + \lambda_1 \underline{w} \notin V^\perp \implies \mathrm{CI}(\varphi) \supsetneq V^\perp$.

Si conclude allora, tramite la contronominale, che se $\mathrm{CI}(\varphi) = V^\perp$, φ è necessariamente semidefinito. $\square$

1.3 Formula delle dimensioni e di polarizzazione rispetto a φ

Definizione (sottospazio ortogonale a W)**.** Sia $W \subseteq V$ un sottospazio di V. Si identifica allora come **sottospazio ortogonale a** W il sottospazio $W^\perp = \{\underline{v} \in V \mid \varphi(\underline{v}, \underline{w})\ \forall\, \underline{w} \in W\}$.

Proposizione 1.3 (formula delle dimensioni del prodotto scalare)**.** Sia $W \subseteq V$ un sottospazio di V. Allora vale la seguente identità:

$$\dim W + \dim W^\perp = \dim V + \dim(W \cap V^\perp).$$

Dimostrazione. Si consideri l'applicazione lineare a_φ introdotta precedentemente. Si osserva che $W^\perp = \operatorname{Ker}(i^\top \circ a_\varphi)$, dove $i : W \to V$ è tale che $i(\underline{w}) = \underline{w}$. Allora, per la formula delle dimensioni, vale la seguente identità:

$$\dim V = \dim W^\perp + \operatorname{rg}(i^\top \circ a_\varphi). \tag{1.1}$$

Sia allora $f = i^\top \circ a_\varphi$. Si consideri ora l'applicazione $g = a_\varphi \circ i : W \to V^*$. Sia ora $\mathcal{B}_W$ una base di W e $\mathcal{B}_V$ una base di V. Allora le matrici associate di f e di g sono le seguenti:

(i) $M^{\mathcal{B}_V}_{\mathcal{B}_W^*}(f) = M^{\mathcal{B}_V}_{\mathcal{B}_W^*}(i^\top \circ a_\varphi) = \underbrace{M^{\mathcal{B}_V^*}_{\mathcal{B}_W^*}(i^\top)}_{A}\underbrace{M^{\mathcal{B}_V}_{\mathcal{B}_V^*}(a_\varphi)}_{B} = AB,$

(ii) $M^{\mathcal{B}_W}_{\mathcal{B}_V^*}(g) = M^{\mathcal{B}_W}_{\mathcal{B}_V^*}(a_\varphi \circ i) = \underbrace{M^{\mathcal{B}_V}_{\mathcal{B}_V^*}(a_\varphi)}_{B}\underbrace{M^{\mathcal{B}_W}_{\mathcal{B}_V}(i)}_{A^\top} = BA^\top \overbrace{=}^{B^\top = B} (AB)^\top.$

Poiché $\operatorname{rg}(A) = \operatorname{rg}(A^\top)$, si deduce che $\operatorname{rg}(f) = \operatorname{rg}(g) \implies \operatorname{rg}(i^\top \circ a_\varphi) = \operatorname{rg}(a_\varphi \circ i) = \operatorname{rg}(a_\varphi|_W) = \dim W - \dim \operatorname{Ker} a_\varphi|_W$, ossia che:

$$\operatorname{rg}(i^\top \circ a_\varphi) = \dim W - \dim(W \cap \underbrace{\operatorname{Ker} a_\varphi}_{V^\perp}) = \dim W - \dim(W \cap V^\perp). \tag{1.2}$$

Si conclude allora, sostituendo l'equazione (1.2) nell'equazione (1.1), che $\dim V = \dim W^\top + \dim W - \dim(W \cap V^\perp)$, ossia la tesi. ☐

Dimostrazione alternativa. Si consideri nuovamente l'applicazione lineare α_φ introdotta precedentemente. Si osserva innanzitutto che[3] $W^\perp = \alpha_\varphi^{-1}(\operatorname{Ann}(W))$. Allora vale la seguente identità:

$$\alpha_\varphi(W^\perp) = \operatorname{Ann}(W) \cap \operatorname{Im} \alpha_\varphi. \tag{1.3}$$

Si mostra che $\operatorname{Im} \alpha_\varphi = \operatorname{Ann}(V^\perp)$. Chiaramente $\operatorname{Im} \alpha_\varphi \subseteq \operatorname{Ann}(V^\perp)$: siano infatti $\underline{v} \in V$ e $\underline{w} \in V^\perp$, allora $\alpha_\varphi(\underline{v})(\underline{w}) = \varphi(\underline{v}, \underline{w}) = 0$. Inoltre $\dim \operatorname{Im} \alpha_\varphi = \operatorname{rg} \alpha_\varphi = n - \dim \operatorname{Ker} \alpha_\varphi = \dim V - \dim V^\perp = \dim \operatorname{Ann}(V^\perp)$, da cui segue l'uguaglianza dei due sottospazi. Allora l'equazione (1.3) si può riscrivere[4] come:

$$\alpha_\varphi(W^\perp) = \operatorname{Ann}(W) \cap \operatorname{Ann}(V^\perp) = \operatorname{Ann}(W + V^\perp)$$

da cui segue che:

$$\dim W^\perp - \dim(V^\perp \cap W^\perp) = \dim V - \dim(W + V^\perp),$$

[3] α_φ^{-1} in questo caso non indica un'eventuale applicazione inversa di α_φ, ma indica l'insieme delle eventuali controimmagini degli elementi su cui è applicata.

[4] Si è utilizzata l'identità $\operatorname{Ann}(U) \cap \operatorname{Ann}(W) = \operatorname{Ann}(U + W)$, dove U e W sono due sottospazi di V, nonché che $\operatorname{Ker} \alpha_\varphi = V^\perp$.

e quindi, applicando la formula di Grassmann, che[5]:

$$\dim W^\perp - \dim V^\perp = \dim V - \dim W - \dim V^\perp + \dim(W \cap V^\perp),$$

ossia la tesi. □

Osservazione. Si identifica $\underline{w}^\perp$ come il sottospazio di tutti i vettori di V ortogonali a $\underline{w}$. In particolare, se $W = \mathrm{Span}(\underline{w})$ è il sottospazio generato da $\underline{w} \neq \underline{0}$, $\underline{w} \in V$, allora $W^\perp = \underline{w}^\perp$. Inoltre valgono le seguenti equivalenze: $\underline{w} \notin W^\perp \iff \mathrm{Rad}(\varphi|_W) = W \cap W^\perp = \{\underline{0}\} \iff \underline{w}$ non è isotropo $\iff V = W \oplus^\perp W^\perp$.

In generale, se W è un sottospazio qualsiasi di V tale che $W \cap W^\perp = \{\underline{0}\}$, vale che $V = W \oplus^\perp W^\perp$.

Proposizione 1.4 (formula di polarizzazione)**.** Se $\mathrm{char}\,\mathbb{K} \neq 2$, un prodotto scalare è univocamente determinato dalla sua forma quadratica q. In particolare vale la seguente identità:

$$\varphi(\underline{v}, \underline{w}) = \frac{q(\underline{v} + \underline{w}) - q(\underline{v}) - q(\underline{w})}{2}.$$

1.4 Il teorema di Lagrange e basi ortogonali

Definizione. Si definisce **base ortogonale** di V una base $\underline{v_1}$, ..., $\underline{v_n}$ tale per cui $\varphi(\underline{v_i}, \underline{v_j}) = 0 \impliedby i \neq j$, ossia una base per cui la matrice associata del prodotto scalare è diagonale.

Teorema 1.2 (di Lagrange)**.** Ogni spazio vettoriale V su $\mathbb{K}$ tale per cui $\mathrm{char}\,\mathbb{K} \neq 2$ ammette una base ortogonale.

Dimostrazione. Si dimostra il teorema per induzione su $n := \dim V$. Per $n \leq 1$, la tesi è triviale (se esiste una base, tale base è già ortogonale). Sia allora il teorema vero per $i \leq n$. Se V ammette un vettore non isotropo $\underline{w}$, sia $W = \mathrm{Span}(\underline{w})$ e si consideri la decomposizione $V = W \oplus W^\perp$. Poiché $W^\perp$ ha dimensione $n - 1$, per ipotesi induttiva ammette una base ortogonale. Inoltre, tale base è anche ortogonale a W, e quindi l'aggiunta di $\underline{w}$ a questa base ne fa una base ortogonale di V. Se invece V non ammette vettori non isotropi, ogni forma quadratica è nulla, e quindi il prodotto scalare è nullo per la *formula di polarizzazione*. Allora in questo caso ogni base è una base ortogonale, completando il passo induttivo, e dunque la dimostrazione. □

1.4.1 L'algoritmo di ortogonalizzazione di Gram-Schmidt

Definizione (coefficiente di Fourier)**.** Siano $\underline{v} \in V$ e $\underline{w} \in V \setminus \mathrm{CI}(\varphi)$. Allora si definisce il **coefficiente di Fourier** di $\underline{v}$ rispetto a $\underline{w}$ come il rapporto $C(\underline{w}, \underline{v}) = \frac{\varphi(\underline{v},\underline{w})}{\varphi(\underline{w},\underline{w})}$.

[5] Ricordiamo che $V^\perp \subseteq W^\perp$ per ogni sottospazio W di V, e quindi che $\dim(V^\perp \cap W^\perp) = \dim V^\perp$.

Algoritmo 1.1 (algoritmo di ortogonalizzazione di Gram-Schmidt)**.** Se $\mathrm{CI}(\varphi) = \{\underline{0}\}$ (e quindi nel caso di $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, dalla *Proposizione 1.1*, se φ è definito) ed è data una base $\mathcal{B} = \{\underline{v_1}, \ldots, \underline{v_n}\}$ per V, è possibile applicare l'**algoritmo di ortogonalizzazione di Gram-Schmidt** per ottenere da $\mathcal{B}$ una nuova base $\mathcal{B}' = \{\underline{v_1}', \ldots, \underline{v_n}'\}$ con le seguenti proprietà:

(i) $\mathcal{B}'$ è una base ortogonale,

(ii) $\mathcal{B}'$ mantiene la stessa bandiera di $\mathcal{B}$ (ossia $\mathrm{Span}(\underline{v_1}, \ldots, \underline{v_i}) = \mathrm{Span}(\underline{v_1}', \ldots, \underline{v_i}')$ per ogni $1 \leq i \leq n$).

L'algoritmo si applica nel seguente modo: si prenda in considerazione $\underline{v_1}$ e si sottragga ad ogni altro vettore della base il vettore $C(\underline{v_1}, \underline{v_i})\,\underline{v_1} = \frac{\varphi(\underline{v_1}, \underline{v_i})}{\varphi(\underline{v_1}, \underline{v_1})}\underline{v_1}$, rendendo ortogonale ogni altro vettore della base con $\underline{v_1}$. Si sta quindi applicando la mappa $\underline{v_i} \mapsto \underline{v_i} - \frac{\varphi(\underline{v_1}, \underline{v_i})}{\varphi(\underline{v_1}, \underline{v_1})}\underline{v_i} = \underline{v_i}^{(1)}$. Si verifica infatti che $\underline{v_1}$ e $\underline{v_i}^{(1)}$ sono ortogonali per $2 \leq i \leq n$:

$$\varphi(\underline{v_1}, \underline{v_i}^{(1)}) = \varphi(\underline{v_1}, \underline{v_i}) - \varphi\left(\underline{v_1}, \frac{\varphi(\underline{v_1}, \underline{v_i})}{\varphi(\underline{v_1}, \underline{v_1})}\underline{v_i}\right) = \varphi(\underline{v_1}, \underline{v_i}) - \varphi(\underline{v_1}, \underline{v_i}) = 0.$$

Poiché $\underline{v_1}$ non è isotropo, si deduce che vale la decomposizione $V = \mathrm{Span}(\underline{v_1}) \oplus \mathrm{Span}(\underline{v_1})^\perp$. In particolare $\dim \mathrm{Span}(\underline{v_1})^\perp = n-1$: essendo allora i vettori $\underline{v_2}^{(1)}, \ldots, \underline{v_n}^{(1)}$ linearmente indipendenti e appartenenti a $\mathrm{Span}(\underline{v_1})^\perp$, ne sono una base. Si conclude quindi che vale la seguente decomposizione:

$$V = \mathrm{Span}(\underline{v_1}) \oplus^\perp \mathrm{Span}(\underline{v_2}^{(1)}, \ldots, \underline{v_n}^{(1)}).$$

Si riapplica dunque l'algoritmo di Gram-Schmidt prendendo come spazio vettoriale lo spazio generato dai vettori a cui si è applicato precedentemente l'algoritmo, ossia $V' = \mathrm{Span}(\underline{v_2}^{(1)}, \ldots, \underline{v_n}^{(1)})$, fino a che non si ottiene $V' = \{\underline{0}\}$.

Esempio. Si consideri $V = (\mathbb{R}^3, \langle\cdot,\cdot\rangle)$, ossia $\mathbb{R}^3$ dotato del prodotto scalare standard. Si applica l'algoritmo di ortogonalizzazione di Gram-Schmidt sulla seguente base:

$$\mathcal{B} = \left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\underline{v_1} = \underline{e_1}}, \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\underline{v_2}}, \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\underline{v_3}} \right\}.$$

Alla prima iterazione dell'algoritmo si ottengono i seguenti vettori:

- $\underline{v_2}^{(1)} = \underline{v_2} - \frac{\varphi(\underline{v_1}, \underline{v_2})}{\varphi(\underline{v_1}, \underline{v_1})}\underline{v_1} = \underline{v_2} - \underline{v_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \underline{e_2}$,

- $\underline{v_3}^{(1)} = \underline{v_3} - \frac{\varphi(\underline{v_1}, \underline{v_3})}{\varphi(\underline{v_1}, \underline{v_1})}\underline{v_1} = \underline{v_3} - \underline{v_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$

Si considera ora $V' = \mathrm{Span}(\underline{v_2}^{(1)}, \underline{v_3}^{(1)})$. Alla seconda iterazione dell'algoritmo si ottiene allora il seguente vettore:

- $\underline{v_3}^{(2)} = \underline{v_3}^{(1)} - \frac{\varphi(\underline{v_2}^{(1)}, \underline{v_3}^{(1)})}{\varphi(\underline{v_2}^{(1)}, \underline{v_2}^{(1)})}\underline{v_2}^{(1)} = \underline{v_3}^{(1)} - \underline{v_2}^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \underline{e_3}.$

Quindi la base ottenuta è $\mathcal{B}' = \{\underline{e_1}, \underline{e_2}, \underline{e_3}\}$, ossia la base canonica di $\mathbb{R}^3$.

1.5 Il teorema di Sylvester

1.5.1 Caso complesso

Nota. D'ora in poi, nel corso del documento, si assumerà $\mathrm{char}\,\mathbb{K} \neq 2$.

Teorema 1.3 (di Sylvester, caso complesso)**.** Sia $\mathbb{K}$ un campo i cui elementi sono tutti quadrati di un altro elemento del campo (e.g. $\mathbb{C}$). Allora esiste una base ortogonale $\mathcal{B}$ tale per cui:

$$M_{\mathcal{B}}(\varphi) = \left(\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right).$$

Dimostrazione. Per il teorema di Lagrange, esiste una base ortogonale $\mathcal{B}'$ di V. Si riordini allora la base $\mathcal{B}'$ in modo tale che la forma quadratica valutata nei primi elementi sia sempre diversa da zero. Allora, poiché ogni elemento di $\mathbb{K}$ è per ipotesi quadrato di un altro elemento di $\mathbb{K}$, si sostituisca $\mathcal{B}'$ con una base $\mathcal{B}$ tale per cui, se $q(\underline{v_i}) = 0$, $\underline{v_i} \mapsto \underline{v_i}$, e altrimenti $\underline{v_i} \mapsto \frac{\underline{v_i}}{\sqrt{q(\underline{v_i})}}$. Allora $\mathcal{B}$ è una base tale per cui la matrice associata del prodotto scalare in tale base è proprio come desiderata nella tesi, dove r è il numero di elementi tali per cui la forma quadratica valutata in essi sia diversa da zero. □

Osservazione.
▶ Si può immediatamente concludere che il rango è un invariante completo per la congruenza in un campo $\mathbb{K}$ in cui tutti gli elementi sono quadrati, ossia che $A \cong B \iff \mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(B)$, se A e B sono matrici simmetriche con elementi in $\mathbb{K}$.

Ogni matrice simmetrica rappresenta infatti un prodotto scalare, ed è pertanto congruente ad una matrice della forma desiderata nell'enunciato del teorema di Sylvester complesso. Poiché il rango è un invariante della congruenza, si ricava che r nella forma della matrice di Sylvester, rappresentando il rango, è anche il rango di ogni sua matrice congruente.

In particolare, se due matrici simmetriche hanno lo stesso rango, allora sono congruenti alla stessa matrice di Sylvester, e quindi, essendo la congruenza una relazione di equivalenza, sono congruenti a loro volta tra di loro.

► Due matrici simmetriche in $\mathbb{K}$ con stesso rango, allora, non solo sono SD-equivalenti, ma sono anche congruenti.

► Ogni base ortogonale deve quindi avere lo stesso numero di vettori isotropi, dal momento che tale numero rappresenta la dimensione del radicale $V^\perp$.

1.5.2 Caso reale e segnatura di φ

Definizione (segnatura di un prodotto scalare)**.** Data una base ortogonale $\mathcal{B}$ di V rispetto al prodotto scalare φ, si definiscono i seguenti indici:

$$\begin{aligned} \iota_+(\varphi) &= \max\{\dim W \mid W \subseteq V \text{ e } \varphi|_W > 0\}, && \textbf{(indice di positività)} \\ \iota_-(\varphi) &= \max\{\dim W \mid W \subseteq V \text{ e } \varphi|_W < 0\}, && \textbf{(indice di negatività)} \\ \iota_0(\varphi) &= \dim V^\perp. && \textbf{(indice di nullità)} \end{aligned}$$

Quando il prodotto scalare φ è noto dal contesto, si semplifica la notazione scrivendo solo ι_+, ι_- e ι_0. In particolare, la terna $\sigma(\varphi) = \sigma = (i_+, i_-, i_0)$ è detta **segnatura** del prodotto φ.

Teorema 1.4 (di Sylvester, caso reale)**.** Sia $\mathbb{K}$ un campo ordinato i cui elementi positivi sono tutti quadrati (e.g. $\mathbb{R}$). Allora esiste una base ortogonale $\mathcal{B}$ tale per cui:

$$M_\mathcal{B}(\varphi) = \left(\begin{array}{c|c|c} I_{\iota_+} & 0 & 0 \\ \hline 0 & -I_{\iota_-} & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \cdot I_{\iota_0} \end{array}\right).$$

Inoltre, per ogni base ortogonale, esistono esattamente ι_+ vettori della base con forma quadratica positiva, ι_- con forma negativa e ι_0 con forma nulla.

Dimostrazione. Per il teorema di Lagrange, esiste una base ortogonale $\mathcal{B}'$ di V. Si riordini la base in modo tale che la forma quadratica valutata nei primi elementi sia strettamente positiva, che nei secondi elementi sia strettamente negativa e che negli ultimi sia nulla. Si sostituisca $\mathcal{B}'$ con una base $\mathcal{B}$ tale per cui, se $q(\underline{v_i}) > 0$, allora $\underline{v_i} \mapsto \frac{\underline{v_i}}{\sqrt{q(\underline{v_i})}}$; se $q(\underline{v_i}) < 0$, allora $\underline{v_i} \mapsto \frac{\underline{v_i}}{\sqrt{-q(\underline{v_i})}}$; altrimenti $\underline{v_i} \mapsto \underline{v_i}$. Si è allora trovata una base la cui matrice associata del prodotto scalare è come desiderata nella tesi.

Sia ora $\mathcal{B}$ una qualsiasi base ortogonale di V. Siano inoltre a il numero di vettori della base con forma quadratica positiva, b il numero di vettori con forma negativa e c quello dei vettori con forma nulla. Si consideri $W_+ = \text{Span}(\underline{v_1}, ..., \underline{v_a})$, $W_- = \text{Span}(\underline{v_{a+1}}, ..., \underline{v_b})$, $W_0 = \text{Span}(\underline{v_{b+1}}, ..., \underline{v_c})$.

Sia $M = M_{\mathcal{B}}(\varphi)$. Si osserva che $c = n - \text{rg}(M) = \dim \text{Ker}(M) = \dim V^\perp = \iota_0$. Inoltre $\forall \underline{v} \in W_+$, dacché $\mathcal{B}$ è ortogonale, $q(\underline{v}) = q(\sum_{i=1}^a \alpha_i \underline{v_i}) = \sum_{i=1}^a \alpha_i^2 q(\underline{v_i}) > 0$, e quindi $\varphi|_{W_+} > 0$, da cui $\iota_+ \geq a$. Analogamente $\iota_- \geq b$.

Si mostra ora che è impossibile che $\iota_+ > a$. Se così infatti fosse, sia W tale che $\dim W = \iota_+$ e che $\varphi|_W > 0$. $\iota_+ + b + c$ sarebbe maggiore di $a + b + c = n := \dim V$. Quindi, per la formula di Grassman, $\dim(W + W_- + W_0) = \dim W + \dim(W_- + W_0) - \dim(W \cap (W_- + W_0)) \implies \dim(W \cap (W_- + W_0)) = \dim W + \dim(W_- + W_0) - \dim(W + W_- + W_0) > 0$, ossia esisterebbe $\underline{v} \neq \{\underline{0}\} \mid \underline{v} \in W \cap (W_- + W_0)$. Tuttavia questo è assurdo, dacché dovrebbe valere sia $q(\underline{v}) > 0$ che $q(\underline{v}) < 0$, $\lightning$. Quindi $\iota_+ = a$, e analogamente $\iota_- = b$. $\square$

Definizione. Si dice **base di Sylvester** una base di V tale per cui la matrice associata di φ sia esattamente nella forma vista nell'enunciato del teorema di Sylvester. Analogamente si definisce tale matrice come **matrice di Sylvester**.

Osservazione.
► Come conseguenza del teorema di Sylvester reale, si osserva che la segnatura di una matrice simmetrica reale è invariante per cambiamento di base, se la base è ortogonale.

► La segnatura è un invariante completo per la congruenza nel caso reale. Se infatti due matrici hanno la stessa segnatura, queste sono entrambe congruenti alla stessa matrice di Sylvester, e quindi, essendo la congruenza una relazione di equivalenza, sono congruenti tra loro. Analogamente vale il viceversa, dal momento che ogni base ortogonale di due matrici congruenti deve contenere gli stessi numeri ι_+, ι_- e ι_0 di vettori di base con forma quadratica positiva, negativa e nulla.

► Vale che φ è definito positivo $\iff \sigma = (n, 0, 0)$. Infatti, per il teorema di Sylvester reale, $i_+ = n \iff$ la dimensione del massimo sottospazio di V su cui φ è definito positivo è $n \iff \varphi$ è definito positivo. Analogamente φ è definito negativo $\iff \sigma = (0, n, 0)$.

► Nello stesso spirito dei prodotti definiti, φ è semidefinito positivo $\iff \iota_- = 0$. Infatti valgono le seguenti equivalenze: φ è semidefinito positivo $\iff$ non esiste un vettore $\underline{v} \in V$, $\underline{v} \neq \underline{0}$ tale che $q(\underline{v}) < 0 \iff \iota_- = 0$. Analogamente φ è semidefinito negativo $\iff \iota_+ = 0$.

► Se $\underline{w_1}$, ..., $\underline{w_k}$ sono tutti i vettori di una base ortogonale $\mathcal{B}$ con forma quadratica nulla, si osserva che $W = \text{Span}(\underline{w_1}, ..., \underline{w_k})$ altro non è che $V^\perp$ stesso.

Infatti, come visto anche nella dimostrazione del teorema di Sylvester reale, vale che $\dim W = \dim \text{Ker}(M_{\mathcal{B}}(\varphi)) = \dim V^\perp$. Sia allora la base $\mathcal{B} = \{\underline{w_1}, \ldots, \underline{w_k}, \underline{v_{k+1}}, \ldots, \underline{v_n}\}$

un'estensione di $\{\underline{w_1}, \ldots, \underline{w_k}\}$. Se $\underline{w} \in W$ e $\underline{v} \in V$, $\varphi(\underline{w}, \underline{v}) = \varphi(\sum_{i=1}^k \alpha_i \underline{w_i}, \sum_{i=1}^k \beta_i \underline{w_i} + \sum_{i=k+1}^n \beta_i \underline{v_i}) = \sum_{i=1}^k \alpha_i \beta_i q(\underline{w_i}) = 0$ (dove α_i e $\beta_i \in \mathbb{K}$ rappresentano la i-esima coordinata di $\underline{w}$ e $\underline{v}$ nella base $\mathcal{B}$), e quindi $W \subseteq V^\perp$. Si conclude allora, tramite l'uguaglianza dimensionale, che $W = V^\perp$.

▶ Poiché $\dim \operatorname{Ker}(\varphi) = \iota_0$, vale in particolare che $\operatorname{rg}(\varphi) = n - \iota_0 = \iota_+ + \iota_-$ (infatti vale che $n = \iota_+ + \iota_- + \iota_0$, dal momento che n rappresenta il numero di elementi di una base ortogonale).

▶ Se $V = U \oplus^\perp W$, allora $\iota_+(\varphi) = \iota_+(\varphi|_U) + \iota_+(\varphi|_W)$. Analogamente vale la stessa cosa per gli altri indici. Infatti, prese due basi ortogonali $\mathcal{B}_U$, $\mathcal{B}_W$ di U e W, la loro unione $\mathcal{B}$ è una base ortogonale di V. Pertanto il numero di vettori della base $\mathcal{B}$ con forma quadratica positiva è esattamente $\iota_+(\varphi|_U) + \iota_+(\varphi|_W)$.

▶ In generale, se W è un sottospazio di V, vale che $\iota_+(\varphi) \geq \iota_+(\varphi|_W)$. Infatti, se U è un sottospazio di W di dimensione $\iota_+(\varphi|_W)$ tale che $(\varphi|_W)|_U > 0$, allora U è in particolare un sottospazio di V tale che $\varphi|_U > 0$. Pertanto, per definizione, essendo $\iota_+(\varphi)$ la dimensione del massimo sottospazio su cui φ, ristretto ad esso, è definito positivo, deve valere che $\iota_+(\varphi) \geq \iota_+(\varphi|_W)$. Analogamente, $\iota_-(\varphi) \geq \iota_-(\varphi|_W)$.

1.5.2.1 Classificazione delle segnature per $n = 1, 2, 3$

Sia $\mathcal{B}$ una base di Sylvester per φ. Sia $A = M_{\mathcal{B}}(\varphi)$. Si indica con x, y e z le tre coordinate di $\underline{v} \in V$ secondo la base $\mathcal{B}$.

($n = 1$) Vi sono solo tre possibili matrici per A:

- $A = (0)$, con $\sigma = (0, 0, 1)$, $\operatorname{rg}(\varphi) = 0$ e $\operatorname{CI}(\varphi) = V$,
- $A = (1)$, con $\sigma = (1, 0, 0)$, $\operatorname{rg}(\varphi) = 1$ e $\operatorname{CI}(\varphi) = \{\underline{0}\}$,
- $A = (-1)$, con $\sigma = (0, 1, 0)$, $\operatorname{rg}(\varphi) = 1$ e $\operatorname{CI}(\varphi) = \{\underline{0}\}$.

($n = 2$) Vi sono sei possibili matrici per A:

- $A = 0$, con $\sigma = (0, 0, 2)$, $\operatorname{rg}(\varphi) = 0$ e $\operatorname{CI}(\varphi) = V$,
- $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, con $\sigma = (1, 0, 1)$, $\operatorname{rg}(\varphi) = 1$ e $\operatorname{CI}(\varphi) = \{x = 0 \mid \underline{v} \in V\} = V^\perp$,
- $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, con $\sigma = (0, 1, 1)$, $\operatorname{rg}(\varphi) = 1$ e $\operatorname{CI}(\varphi) = \{x = 0 \mid \underline{v} \in V\} = V^\perp$,
- $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, con $\sigma = (1, 1, 0)$, $\operatorname{rg}(\varphi) = 2$ e $\operatorname{CI}(\varphi) = \{x^2 = y^2 \mid \underline{v} \in V\}$,

- $A = I_2$, con $\sigma = (2,0,0)$, $\mathrm{rg}(\varphi) = 2$ e $\mathrm{CI}(\varphi) = \{\underline{0}\}$,
- $A = -I_2$, con $\sigma = (0,2,0)$, $\mathrm{rg}(\varphi) = 2$ e $\mathrm{CI}(\varphi) = \{\underline{0}\}$.

Si osserva in particolare che $\det(A) = -1 \iff \sigma = (1,1,0)$. Pertanto se M è una matrice associata al prodotto scalare φ in una base $\mathcal{B}'$, $\det(M) < 0 \iff \sigma = (1,1,0)$.

($n = 3$) Se A contiene almeno uno zero nella diagonale, si può studiare A riconducendosi al caso $n = 2$, considerando la matrice $A^{1,2}_{1,2}$, e incrementando di uno l'indice di nullità di φ (eventualmente considerando anche come varia il cono isotropo). Altrimenti A può essere rappresentato dalle seguenti quattro matrici:

- $A = I_3$, con $\sigma = (3,0,0)$, $\mathrm{rg}(\varphi) = 3$ e $\mathrm{CI}(\varphi) = \{\underline{0}\}$,
- $A = -I_3$, con $\sigma = (0,3,0)$, $\mathrm{rg}(\varphi) = 3$ e $\mathrm{CI}(\varphi) = \{\underline{0}\}$,
- $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, con $\sigma = (2,1,0)$, $\mathrm{rg}(\varphi) = 3$ e $\mathrm{CI}(\varphi) = \{x^2 + y^2 = z^2 \mid \underline{v} \in V\}$,
- $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, con $\sigma = (1,2,0)$, $\mathrm{rg}(\varphi) = 3$ e $\mathrm{CI}(\varphi) = \{y^2 + z^2 = x^2 \mid \underline{v} \in V\}$.

Si osserva infine che, se $V = \mathbb{R}^3$ e $\mathcal{B}$ ne è la base canonica, i coni isotropi delle ultime due matrici rappresentano proprio due coni nello spazio tridimensionale.

1.5.2.2 Metodo di Jacobi per il calcolo della segnatura

Proposizione 1.5. Sia $\mathbb{K}$ un campo ordinato i cui elementi positivi sono tutti quadrati (e.g. $\mathbb{R}$). Sia W un sottospazio di V di dimensione k. Sia W' un sottospazio di V di dimensione $k+1$. Sia $\sigma(\varphi|_W) = (p,q,0)$, con p, $q \in \mathbb{N}$ e siano $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$ due basi di W e W'. Siano $B = M_{\mathcal{B}}(\varphi|_{W'})$ e $B' = M_{\mathcal{B}'}(\varphi|_W))$.

Sia $d := \dfrac{\det(B')}{\det(B)}$. Allora vale che:

$$\sigma(\varphi|_{W'}) = \begin{cases} (p+1,q,0) & \text{se } d > 0, \\ (p,q+1,0) & \text{se } d < 0, \\ (p,q,1) & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Dimostrazione. Dalle precedenti osservazioni, vale che $\iota_+(\varphi|_{W'}) \geq \iota_+(\varphi|_W)$ e che $\iota_-(\varphi|_{W'}) \geq \iota_-(\varphi|_W)$. Inoltre $\varphi|_W$ è non degenere dal momento che $\iota_0(\varphi|_W) = 0$, e pertanto $p + q = \mathrm{rg}(\varphi|_W) = k$.

Siano ora $\mathcal{B}_\perp$ e $\mathcal{B}'_\perp$ due basi di Sylvester di W e W'. Siano $A = M_{\mathcal{B}_\perp}(\varphi|_W)$ e $A' = M_{\mathcal{B}'_\perp}(\varphi|_W)$. Allora $\det(A) = 1^p(-1)^q$, mentre $\det(A') = 1^p(-1)^q\, d'$, dove $d' \in \{-1, 0, 1\}$. Allora $\det(A') = \det(A)d' \implies d' = \frac{\det(A')}{\det(A)}$, dal momento che $\det(A) \neq 0$, essendo $\varphi|_W$ non degenere.

In particolare, $\sigma(\varphi|_{W'}) = (p, q, 1)$ se e solo se $\det(A') = 0 \implies d' = 0$. Dal momento che $\det(A') = 0 \iff \det(B') = 0$, $d' = 0 \iff d = 0$. Pertanto si conclude che $\sigma(\varphi|_{W'}) = (p, q, 1) \iff d = 0$.

Al contrario, $\sigma(\varphi|_{W'}) = (p+1, q, 0)$ se e solo se $d' = 1$, ossia se e solo se $\det(A')$ e $\det(A)$ sono concordi di segno. Dal momento che il segno è un invariante del cambiamento di base per la matrice associata a φ, $d' = 1$ se e solo se $\det(B)$ e $\det(B')$ sono concordi di segno, ossia se e solo se $d > 0$. Pertanto $\sigma(\varphi|_{W'}) = (p + 1, q, 0) \iff d > 0$. Analogamente si verifica che $\sigma(\varphi|_{W'}) = (p, q + 1, 0) \iff d < 0$, da cui la tesi. $\square$

Algoritmo 1.2 (metodo di Jacobi)**.** Sia $\mathcal{B}$ una base di V e sia $A = M_{\mathcal{B}}(\varphi)$. Se il determinante di ogni minore di testa[6] di A (ossia dei minori della forma $A^{1,\ldots,i}_{1,\ldots,i}$, con $1 \leq i \leq n-1$) è diverso da zero, è possibile applicare il **metodo di Jacobi** per il calcolo della segnatura di φ.

Sia $d_i = \det\left(A^{1,\ldots,i}_{1,\ldots,i}\right)$ $\forall\, 1 \leq i \leq n$ e si ponga $d_0 := 1$. Allora, per la *Proposizione 1.5*, ι_+ corrisponde al numero di permanenze del segno tra elementi consecutivi (escludendo 0) di (d_i), mentre ι_- corrisponde al numero di variazioni del segno (anche stavolta escludendo 0). Infine ι_0 può valere solo 0 o 1, dove $\iota_0 = 1 \iff \det(A) = 0$.

Esempio. Sia $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix} \in M(3, \mathbb{R})$.

Si calcola la segnatura di φ_A mediante il metodo di Jacobi. Poiché A è la matrice associata di φ_A nella base canonica di $\mathbb{R}^3$, si può applicare il metodo di Jacobi direttamente su A.

Si calcola allora la successione dei d_i:

1. $d_1 = \det(1) = 1$,

2. $d_2 = \det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = 2 - 1 = 1$,

[6] In realtà il metodo si estende ad ogni successione di minori coerente con un'estensione di base (i.e. i minori principali di A).

3. $d_3 = \det(A) = (8-1) - 4 = 3$.

Dal momento che vi sono tre permanenze di segno, si conclude che $\sigma(\varphi_A) = (3, 0, 0)$, ossia che φ_A è definito positivo.

1.5.2.3 Criterio di Sylvester per la definitezza di un prodotto scalare

Proposizione 1.6 (criterio di Sylvester per i prodotti definiti)**.** Sia $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Sia $\mathcal{B}$ una base di V, e sia $A = M_{\mathcal{B}}(\varphi)$. Sia $d_i = \det\left(A^{1,\ldots,i}_{1,\ldots,i}\right)$. Allora φ è definito positivo se e solo se $d_i > 0 \ \forall\, 1 \leq i \leq n$. Analogamente φ è definito negativo se e solo se $(-1)^i\, d_i > 0$ $\forall\, 1 \leq i \leq n$.

Dimostrazione. Si osserva che φ è definito positivo se e solo se $\iota_+ = n$. Pertanto, per il *metodo di Jacobi*, φ è definito positivo se e solo se vi sono solo permanenze di segno tra elementi consecutivi nella successione (d_i), e quindi se e solo se $d_i > 0 \ \forall\, 1 \leq i \leq n$. Analogamente φ è definito negativo se e solo se $\iota_- = n$, e quindi se e solo se vi sono solo variazioni di segno $\iff$ $d_i > 0$ se i è pari e $d_i < 0$ se i è dispari $\iff$ $(-1)^i\, d_i > 0$, $\forall\, 1 \leq i \leq n$. □

1.5.2.4 Sottospazi isotropi e indice di Witt

Definizione (sottospazio isotropo)**.** Sia W un sottospazio di V. Allora si dice che W è un **sottospazio isotropo** di V se $\varphi|_W = 0$.

Osservazione.
- ▶ $V^\perp$ è un sottospazio isotropo di V.
- ▶ $\underline{v}$ è un vettore isotropo $\iff$ $W = \mathrm{Span}(\underline{v})$ è un sottospazio isotropo di V.
- ▶ $W \subseteq V$ è isotropo $\iff$ $W \subseteq W^\perp$.

Proposizione 1.7. Se W è un sottospazio isotropo di V, allora $\dim W \leq \frac{\dim V + \dim V^\perp}{2}$.

Dimostrazione. Poiché W è un sottospazio isotropo di V, vale che $W \subseteq W^\perp$. Allora vale che:

$$\dim W \leq \dim W^\perp. \tag{1.4}$$

Inoltre, per la formula delle dimensioni del prodotto scalare, vale anche che:

$$\dim W^\perp = \dim V + \dim(W \cap V^\perp) - \dim W. \tag{1.5}$$

Sostituendo allora l'equazione (1.5) nella disuguaglianza (1.4), si ottiene che $\dim W \leq \frac{\dim V + \dim(W \cap V^\perp)}{2}$. Dal momento che $W \cap V^\perp \subseteq V^\perp$, $\dim(W \cap V^\perp) \leq \dim V^\perp$, e quindi $\dim W \leq \frac{\dim V + \dim V^\perp}{2}$, da cui la tesi. □

Definizione (indice di Witt)**.** Si definisce l'**indice di Witt** $W(\varphi)$ di (V, φ) come la massima dimensione di un sottospazio isotropo di V.

Osservazione.
▶ Se W è isotropo e φ è non degenere, il risultato della *Proposizione 1.7* si riduce alla disuguaglianza $\dim W \le \frac{1}{2}\dim V$,
▶ Se $\varphi > 0$ o $\varphi < 0$, $W(\varphi) = 0$. Infatti ogni sottospazio non nullo W di V non ammette vettori isotropi, da cui si deduce che $\varphi|_W \neq 0$.
▶ Ancora per la *Proposizione 1.7*, vale che $W(\varphi) \le \frac{\dim V + \dim V^\perp}{2}$.

Proposizione 1.8. Sia $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Allora $W(\varphi) = \iota_0 + \min\{\iota_+(\varphi), \iota_-(\varphi)\}$.

Dimostrazione. Senza perdità di generalità si assuma $\iota_-(\varphi) \le \iota_+(\varphi)$ (il caso $\iota_-(\varphi) > \iota_+(\varphi)$ è analogo). Sia W un sottospazio con $\dim W > \iota_0(\varphi) + \iota_-(\varphi)$. Sia W^+ un sottospazio con $\dim W^+ = \iota_+(\varphi)$ e $\varphi|_{W^+} > 0$. Si osserva pertanto che $\dim W + \dim W^+ > \iota_+(\varphi) + \iota_-(\varphi) + \iota_0(\varphi) = n$: allora, per la formula di Grassmann, $n - \dim(W \cap W^+) < \dim(W + W^+) \le n \implies \dim(W \cap W^+) > 0$. Quindi $\exists\, \underline{w} \in W$, $\underline{w} \neq \underline{0}$ tale che $\varphi(\underline{w}, \underline{w}) > 0$, da cui si ricava che W non è isotropo. Pertanto $W(\varphi) \le \iota_0(\varphi) + \iota_-(\varphi)$.

Siano $a := \iota_+(\varphi)$, $b := \iota_-(\varphi)$ e $c := \iota_0(\varphi)$. Sia $\mathcal{B} = \{\underline{v_1}, \ldots, \underline{v_a}, \underline{w_1}, \ldots, \underline{w_b}, 1, \ldots, c\}$ una base di Sylvester per φ. Siano $\underline{v_1}$, ..., $\underline{v_a}$ tali che $\varphi(\underline{v_i}, \underline{v_i}) = 1$ con $1 \le i \le a$. Analogamente siano $\underline{w_1}$, ..., $\underline{w_b}$ tali che $\varphi(\underline{w_i}, \underline{w_i}) = -1$ con $1 \le i \le b$ e siano $\underline{u_1}$, ..., $\underline{u_c}$ tali che $\varphi(\underline{u_i}, \underline{u_i}) = 0$ con $1 \le i \le c$. Posto $\mathcal{B}' = \{\underline{v_1}' := \underline{v_1} + \underline{w_1}, \ldots, \underline{v_b}' := \underline{v_b} + \underline{w_b}, \underline{u_1}, \ldots, \underline{u_c}\}$, si definisca $W = \operatorname{Span}(\mathcal{B}')$.

Si osserva che $\mathcal{B}'$ è linearmente indipendente, e dunque che $\dim W = \iota_-(\varphi) + \iota_0(\varphi)$. Chiaramente i vettori $\underline{u_i}$ sono ancora ortogonali con gli elementi di $\mathcal{B}'$ e sono tali per cui $\varphi(\underline{u_i}, \underline{u_i}) = 0\ \forall\, 1 \le i \le c$. Inoltre $\varphi(\underline{v_i}', \underline{v_j}') = \varphi(\underline{v_i} + \underline{w_i}, \underline{v_j} + \underline{w_j})$. Se $i \neq j$, allora $\varphi(\underline{v_i}', \underline{v_j}') = 0$, dal momento che i vettori di $\mathcal{B}$ sono a due a due ortogonali tra loro. Se invece $i = j$, allora $\varphi(\underline{v_i}', \underline{v_j}') = \varphi(\underline{v_i}, \underline{v_i}) + \varphi(\underline{w_i}, \underline{w_i}) = 1 - 1 = 0$. Quindi $M_{\mathcal{B}'}(\varphi|_W) = 0$, da cui si conclude che $\varphi|_W = 0$. Pertanto $W(\varphi) \ge \iota_0(\varphi) + \iota_-(\varphi)$, e quindi si conclude che $W(\varphi) = \iota_0(\varphi) + \iota_-(\varphi)$, da cui la tesi. □

1.6 Isometrie tra spazi vettoriali

Definizione. (isometria) Dati due spazi vettoriali (V, φ) e (V', φ') dotati di prodotto scalare sullo stesso campo $\mathbb{K}$, si dice che V e V' sono **isometrici** se esiste un isomorfismo f, detto *isometria*, che preserva tali che prodotti, ossia tale che:

$$\varphi(\underline{v}, \underline{w}) = \varphi'(f(\underline{v}), f(\underline{w})).$$

Proposizione 1.9. Sia $f : V \to V'$ un isomorfismo. Allora f è un'isometria $\iff$ $\forall$ base $\mathcal{B} = \{\underline{v_1}, \ldots, \underline{v_n}\}$ di V, $\mathcal{B}' = \{f(\underline{v_1}), \ldots, f(\underline{v_n})\}$ è una base di V' e $\varphi(\underline{v_i}, \underline{v_j}) = \varphi'(f(\underline{v_i}), f(\underline{v_j}))\ \forall\, 1 \le i, j \le n \iff \exists$ base $\mathcal{B} = \{\underline{v_1}, \ldots, \underline{v_n}\}$ di V tale che $\mathcal{B}' = \{f(\underline{v_1}), \ldots, f(\underline{v_n})\}$ è una base di V' e $\varphi(\underline{v_i}, \underline{v_j}) = \varphi'(f(\underline{v_i}), f(\underline{v_j}))\ \forall\, 1 \le i, j \le n$.

Dimostrazione. Se f è un'isometria, detta $\mathcal{B}$ una base di V, $\mathcal{B}' = f(\mathcal{B})$ è una base di V' dal momento che f è prima di tutto un isomorfismo. Inoltre, dacché f è un'isometria, vale sicuramente che $\varphi(\underline{v_i}, \underline{v_j}) = \varphi'(f(\underline{v_i}), f(\underline{v_j})) \; \forall \, 1 \leq i, j \leq n$.

Sia ora assunto per ipotesi che $\forall$ base $\mathcal{B} = \{\underline{v_1}, \ldots, \underline{v_n}\}$ di V, $\mathcal{B}' = \{f(\underline{v_1}), \ldots, f(\underline{v_n})\}$ è una base di V' e $\varphi(\underline{v_i}, \underline{v_j}) = \varphi'(f(\underline{v_i}), f(\underline{v_j})) \; \forall \, 1 \leq i, j \leq n$. Allora, analogamente a prima, detta $\mathcal{B} = \{\underline{v_1}, \ldots, \underline{v_n}\}$ una base di V, $\mathcal{B}' = f(\mathcal{B})$ è una base di V', e in quanto tale, per ipotesi, è tale che $\varphi(\underline{v_i}, \underline{v_j}) = \varphi'(f(\underline{v_i}), f(\underline{v_j})) \; \forall \, 1 \leq i, j \leq n$.

Sia infine assunto per ipotesi che $\exists$ base $\mathcal{B} = \{\underline{v_1}, \ldots, \underline{v_n}\}$ di V tale che $\mathcal{B}' = \{f(\underline{v_1}), \ldots, f(\underline{v_n})\}$ è una base di V' e $\varphi(\underline{v_i}, \underline{v_j}) = \varphi'(f(\underline{v_i}), f(\underline{v_j})) \; \forall \, 1 \leq i, j \leq n$. Siano $\underline{v}$, $\underline{w} \in V$. Allora $\exists \, a_1$, ..., a_n, b_1, ..., $b_n \in \mathbb{K}$ tali che $\underline{v} = a_1\underline{v_1} + \ldots + a_n\underline{v_n}$ e $\underline{w} = b_1\underline{v_1} + \ldots + b_n\underline{v_n}$. Si ricava pertanto che:

$$\varphi'(f(\underline{v}), f(\underline{w})) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_i b_j \, \varphi'(f(\underline{v_i}), f(\underline{v_j})) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_i b_j \, \varphi(\underline{v_i}, \underline{v_j}) = \varphi(\underline{v}, \underline{w}),$$

da cui la tesi. □

Proposizione 1.10. Sono equivalenti le seguenti affermazioni:

(i) V e V' sono isometrici;

(ii) $\forall$ base $\mathcal{B}$ di V, base $\mathcal{B}'$ di V', $M_{\mathcal{B}}(\varphi)$ e $M_{\mathcal{B}'}(\varphi')$ sono congruenti;

(iii) $\exists$ base $\mathcal{B}$ di V, base $\mathcal{B}'$ di V' tale che $M_{\mathcal{B}}(\varphi)$ e $M_{\mathcal{B}'}(\varphi')$ sono congruenti.

Dimostrazione. Se V e V' sono isometrici, sia $f : V \to V'$ un'isometria. Sia $\mathcal{B} = \{\underline{v_1}, \ldots, \underline{v_n}\}$ una base di V. Allora, poiché f è anche un isomorfismo, $\mathcal{B}' = f(\mathcal{B})$ è una base di V tale che $\varphi(\underline{v_i}, \underline{v_j}) = \varphi'(f(\underline{v_i}), f(\underline{v_j})) \; \forall \, 1 \leq i, j \leq n$. Pertanto $M_{\mathcal{B}}(\varphi) = M_{\mathcal{B}'}(\varphi')$. Si conclude allora che, cambiando base in V (o in V'), la matrice associata al prodotto scalare varia per congruenza dalla formula di cambiamento di base per il prodotto scalare, da cui si ricava che per ogni scelta di $\mathcal{B}$ base di V e di $\mathcal{B}'$ base di V', $M_{\mathcal{B}}(\varphi) \cong M_{\mathcal{B}'}(\varphi')$. Inoltre, se tale risultato è vero per ogni $\mathcal{B}$ base di V e di $\mathcal{B}'$ base di V', dal momento che sicuramente esistono due basi $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$ di V e V', vale anche (ii) $\implies$ (iii).

Si dimostra ora (iii) $\implies$ (i). Per ipotesi $M_{\mathcal{B}}(\varphi) \cong M_{\mathcal{B}'}(\varphi')$, quindi $\exists \, P \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{K}) \mid M_{\mathcal{B}'}(\varphi') = P^\top M_{\mathcal{B}}(\varphi) P$. Allora $\exists$ $\mathcal{B}''$ base di V' tale che $P = M_{\mathcal{B}''}^{\mathcal{B}'}(\mathrm{Id}_V)$, da cui $P^{-1} = M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}''}(\varphi)$. Per la formula di cambiamento di base del prodotto scalare, $M_{\mathcal{B}''}(\varphi') = (P^{-1})^\top M_{\mathcal{B}'} P^{-1} = M_{\mathcal{B}}(\varphi)$. Detta $\mathcal{B}'' = \{\underline{w_1}, \ldots, \underline{w_n}\}$, si costruisce allora l'isomorfismo $f : V \to V'$ tale che $f(\underline{v_i}) = \underline{w_i} \; \forall \, 1 \leq i \leq n$.. Dal momento che per costruzione $M_{\mathcal{B}}(\varphi) = M_{\mathcal{B}''}(\varphi')$, $\varphi(\underline{v_i}, \underline{v_j}) = \varphi'(\underline{w_i}, \underline{w_j}) = \varphi'(f(\underline{v_i}), f(\underline{v_j})) \; \forall \, 1 \leq i, j \leq n$. Si conclude dunque, dalla *Proposizione 1.9*, che $\varphi(\underline{v}, \underline{w}) = \varphi'(f(\underline{v}), f(\underline{w})) \; \forall \, \underline{v}, \underline{w} \in V$, e dunque che f è un'isometria, come desiderato dalla tesi. □

Proposizione 1.11. (V, φ) e (V', φ') spazi vettoriali su $\mathbb{R}$ sono isometrici $\iff$ φ e φ' hanno la stessa segnatura.

Dimostrazione. Si dimostrano le due implicazioni separatamente.

($\Longrightarrow$) Per la *Proposizione 1.10*, esistono due basi $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$, una di V e una di V', tali che $M_{\mathcal{B}}(\varphi) \cong M_{\mathcal{B}'}(\varphi')$. Allora, poiché queste due matrici sono congruenti, esse devono condividere anche la stessa segnatura, che è invariante completo per congruenza, e dunque le segnature di φ e di φ' coincidono.

($\Longleftarrow$) Se φ e φ' hanno la stessa segnatura, allora, detta $\mathcal{B}$ una base di V e $\mathcal{B}'$ una base di V', $M_{\mathcal{B}}(\phi) \cong M_{\mathcal{B}'}(\phi')$. Allora, per la *Proposizione 1.10*, V e V' sono isometrici. $\square$

2 I prodotti hermitiani e complessificazione (non indicizzato)

Definizione. (prodotto hermitiano) Sia $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Una mappa $\varphi : V \times V \to \mathbb{C}$ si dice **prodotto hermitiano** se:

(i) φ è $\mathbb{C}$-lineare nel secondo argomento, ossia se $\varphi(\underline{v}, \underline{u} + \underline{w}) = \varphi(\underline{v}, \underline{u}) + \varphi(\underline{v}, \underline{w})$ e $\varphi(\underline{v}, a\underline{w}) = a\,\varphi(\underline{v}, \underline{w})$,

(ii) $\varphi(\underline{u}, \underline{w}) = \overline{\varphi(\underline{w}, \underline{u})}$.

Definizione. (prodotto hermitiano canonico in $\mathbb{C}^n$) Si definisce **prodotto hermitiano canonico** di $\mathbb{C}^n$ il prodotto $\varphi : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ tale per cui, detti $\underline{v} = (z_1 \cdots z_n)^\top$ e $\underline{w} = (w_1 \cdots w_n)^\top$, $\varphi(\underline{v}, \underline{w}) = \sum_{i=1}^n \overline{z_i} w_i$.

Osservazione.
▶ $\varphi(\underline{u}+\underline{w}, \underline{v}) = \overline{\varphi(\underline{v}, \underline{u}+\underline{w})} = \overline{\varphi(\underline{v}, \underline{u}) + \varphi(\underline{v}, \underline{w})} = \overline{\varphi(\underline{v}, \underline{u})} + \overline{\varphi(\underline{v}, \underline{u})} = \varphi(\underline{w}, \underline{v}) + \varphi(\underline{u}, \underline{v})$, ossia φ è additiva anche nel primo argomento.
▶ $\varphi(a\underline{v}, \underline{w}) = \overline{\varphi(\underline{w}, a\underline{v})} = \overline{a}\overline{\varphi(\underline{w}, \underline{v})} = \overline{a}\,\varphi(\underline{v}, \underline{w})$.
▶ $\varphi(\underline{v}, \underline{v}) = \overline{\varphi(\underline{v}, \underline{v})}$, e quindi $\varphi(\underline{v}, \underline{v}) \in \mathbb{R}$.
▶ Sia $\underline{v} = \sum_{i=1}^n x_i \underline{v_i}$ e sia $\underline{w} = \sum_{i=1}^n y_i \underline{v_i}$, allora $\varphi(\underline{v}, \underline{w}) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \overline{x_i} y_i \varphi(\underline{v_i}, \underline{v_j})$.
▶ $\varphi(\underline{v}, \underline{w}) = 0 \iff \varphi(\underline{w}, \underline{v}) = 0$.

Proposizione 2.1. Data la forma quadratica $q : V \to \mathbb{R}$ del prodotto hermitiano φ tale che $q(\underline{v}) = \varphi(\underline{v}, \underline{v}) \in \mathbb{R}$, tale forma quadratica individua univocamente il prodotto hermitiano φ.

Dimostrazione. Innanzitutto si osserva che:

$$\varphi(\underline{v}, \underline{w}) = \frac{\varphi(\underline{v}, \underline{w}) + \overline{\varphi(\underline{v}, \underline{w})}}{2} + \frac{\varphi(\underline{v}, \underline{w}) . \overline{\varphi(\underline{v}, \underline{w})}}{2}.$$

Si considerano allora le due identità:

$$q(\underline{v} + \underline{w}) - q(\underline{v}) - q(\underline{w}) = \varphi(\underline{v}, \underline{w}) + \overline{\varphi(\underline{w}, \underline{v})} = 2\,\Re(\varphi(\underline{v}, \underline{w})),$$

$$q(i\underline{v} + \underline{w}) - q(\underline{v}) - q(\underline{w}) = -i(\varphi(\underline{v}, \underline{w}) - \overline{\varphi(\underline{v}, \underline{w})}) = 2\,\Im(\varphi(\underline{v}, \underline{w})),$$

da cui si conclude che il prodotto φ è univocamente determinato dalla sua forma quadratica. □

Definizione. Si definisce **matrice aggiunta** di $A \in M(n, \mathbb{K})$ la matrice coniugata della trasposta di A, ossia:

$$A^* = \overline{A^\top} = \overline{A}^\top.$$

Osservazione. Per quanto riguarda la matrice aggiunta valgono le principali proprietà della matrice trasposta:

- $(A+B)^* = A^* + B^*$,
- $(AB)^* = B^* A^*$,
- $(A^{-1})^* = (A^*)^{-1}$, se A è invertibile.

Definizione. (matrice associata del prodotto hermitiano) Analogamente al caso del prodotto scalare, data una base $\mathcal{B} = \{\underline{v_1}, \ldots, \underline{v_n}\}$ si definisce come **matrice associata del prodotto hermitiano** φ la matrice $M_\mathcal{B}(\varphi) = (\varphi(\underline{v_i}, \underline{v_j}))_{i,j=1—n}$.

Osservazione. Si osserva che, analogamente al caso del prodotto scalare, vale la seguente identità:

$$\varphi(\underline{v}, \underline{w}) = [\underline{v}]_\mathcal{B}^* M_\mathcal{B}(\varphi) [\underline{w}]_\mathcal{B}.$$

Proposizione 2.2. (formula del cambiamento di base per i prodotto hermitiani) Siano $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$ due basi di V. Allora vale la seguente identità:

$$M_{\mathcal{B}'} = M_\mathcal{B}^{\mathcal{B}'}(\mathrm{Id}_V)^* M_\mathcal{B}(\varphi) M_\mathcal{B}^{\mathcal{B}'}(\mathrm{Id}_V).$$

Dimostrazione. Siano $\mathcal{B} = \{\underline{v_1}, \ldots, \underline{v_n}\}$ e $\mathcal{B}' = \{\underline{w_1}, \ldots, \underline{w_n}\}$. Allora $\varphi(\underline{w_i}, \underline{w_j}) = [\underline{w_i}]_\mathcal{B}^* M_\mathcal{B}(\varphi) [\underline{w_j}]_\mathcal{B} = \left(M_\mathcal{B}^{\mathcal{B}'}(\mathrm{Id}_V)^i\right)^* M_\mathcal{B}(\varphi) M_\mathcal{B}^{\mathcal{B}'}(\mathrm{Id}_V)^j = \left(M_\mathcal{B}^{\mathcal{B}'}(\mathrm{Id}_V)\right)_i^* M_\mathcal{B}(\varphi) M_\mathcal{B}^{\mathcal{B}'}(\mathrm{Id}_V)^j$, da cui si ricava l'identità desiderata. □

Definizione. (radicale di un prodotto hermitiano) Analogamente al caso del prodotto scalare, si definisce il **radicale** del prodotto φ come il seguente sottospazio:

$$V^\perp = \{\underline{v} \in V \mid \varphi(\underline{v}, \underline{w}) = 0 \; \forall \, \underline{w} \in V\}.$$

Proposizione 2.3. Sia $\mathcal{B}$ una base di V e φ un prodotto hermitiano. Allora $V^\perp = [\cdot]_\mathcal{B}^{-1}(\mathrm{Ker}\, M_\mathcal{B}(\varphi))$[1].

Dimostrazione. Sia $\mathcal{B} = \{\underline{v_1}, \ldots, \underline{v_n}\}$ e sia $\underline{v} \in V^\perp$. Siano a_1, ..., $a_n \in \mathbb{K}$ tali che $\underline{v} = a_1 \underline{v_1} + \ldots + a_n \underline{v_n}$. Allora, poiché $\underline{v} \in V$, $0 = \varphi(\underline{v_i}, \underline{v}) = a_1 \varphi(\underline{v_i}, \underline{v_1}) + \ldots + a_n \varphi(\underline{v_i}, \underline{v_n}) = M_i [\underline{v}]_\mathcal{B}$, da cui si ricava che $[\underline{v}]_\mathcal{B} \in \mathrm{Ker}\, M_\mathcal{B}(\varphi)$, e quindi che $V^\perp \subseteq [\cdot]_\mathcal{B}^{-1}(\mathrm{Ker}\, M_\mathcal{B}(\varphi))$.

Sia ora $\underline{v} \in V$ tale che $[\underline{v}]_\mathcal{B} \in \mathrm{Ker}\, M_\mathcal{B}(\varphi)$. Allora, per ogni $\underline{w} \in V$, $\varphi(\underline{w}, \underline{v}) = [\underline{w}]_\mathcal{B}^* M_\mathcal{B}(\varphi) [\underline{v}]_\mathcal{B} = [\underline{w}]_\mathcal{B}^* 0 = 0$, da cui si conclude che $\underline{v} \in V^\perp$, e quindi che $V^\perp \supseteq [\cdot]_\mathcal{B}^{-1}(\mathrm{Ker}\, M_\mathcal{B}(\varphi))$, da cui $V^\perp = [\cdot]_\mathcal{B}^{-1}(\mathrm{Ker}\, M_\mathcal{B}(\varphi))$, ossia la tesi. □

[1] Stavolta non è sufficiente considerare la mappa $f : V \to V^*$ tale che $f(\underline{v}) = [\underline{w} \mapsto \varphi(\underline{v}, \underline{w})]$, dal momento che f non è lineare, bensì antilineare, ossia $f(a\underline{v}) = \overline{a} f(\underline{v})$.

Osservazione. Come conseguenza della proposizione appena dimostrata, valgono le principali proprietà già viste per il prodotto scalare.

▶ $\det(M_{\mathcal{B}}(\varphi)) = 0 \iff V^{\perp} \neq \{\underline{0}\} \iff \varphi$ è degenere,
▶ Vale il teorema di Lagrange, e quindi quello di Sylvester, benché con alcune accortezze: si introduce, come nel caso di $\mathbb{R}$, il concetto di segnatura, che diventa l'invariante completo della nuova congruenza hermitiana, che ancora una volta si dimostra essere una relazione di equivalenza.
▶ Come mostrato nei momenti finali del documento (vd. *Esercizio 3*), vale la formula delle dimensioni anche nel caso del prodotto hermitiano.

Definizione. (restrizione ai reali di uno spazio) Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{C}$ con base $\mathcal{B}$. Si definisce allora lo spazio $V_{\mathbb{R}}$, detto **spazio di restrizione su** $\mathbb{R}$ di V, come uno spazio su $\mathbb{R}$ generato da $\mathcal{B}_{\mathbb{R}} = \mathcal{B} \cup i\mathcal{B}$.

Esempio. Si consideri $V = \mathbb{C}^3$. Una base di $\mathbb{C}^3$ è chiaramente $\{\underline{e_1}, \underline{e_2}, \underline{e_3}\}$. Allora $V_{\mathbb{R}}$ sarà uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ generato dai vettori $\{\underline{e_1}, \underline{e_2}, \underline{e_3}, i\underline{e_1}, i\underline{e_2}, i\underline{e_3}\}$.

Osservazione. Si osserva che lo spazio di restrizione su $\mathbb{R}$ e lo spazio di partenza condividono lo stesso insieme di vettori. Infatti, $\mathrm{Span}_{\mathbb{C}}(\mathcal{B}) = \mathrm{Span}_{\mathbb{R}}(\mathcal{B} \cup i\mathcal{B})$. Ciononostante, $\dim V_{\mathbb{R}} = 2 \dim V$[2], se $\dim V \in \mathbb{N}$.

Definizione. (complessificazione di uno spazio) Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$. Si definisce allora lo **spazio complessificato** $V_{\mathbb{C}} = V \times V$ su $\mathbb{C}$ con le seguenti operazioni:

- $(\underline{v}, \underline{w}) + (\underline{v}', \underline{w}') = (\underline{v} + \underline{v}', \underline{w} + \underline{w}')$,
- $(a + bi)(\underline{v}, \underline{w}) = (a\underline{v} - b\underline{w}, a\underline{w} + b\underline{v})$.

Osservazione. La costruzione dello spazio complessificato emula in realtà la costruzione di $\mathbb{C}$ come spazio $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Infatti se $z = (c, d)$, vale che $(a+bi)(c, d) = (ac-bd, ad+bc)$, mentre si mantiene l'usuale operazione di addizione. In particolare si può identificare l'insieme $V \times \{\underline{0}\}$ come V, mentre $\{\underline{0}\} \times V$ viene identificato come l'insieme degli immaginari iV di $V_{\mathbb{C}}$. Infine, moltiplicare per uno scalare reale un elemento di $V \times \{\underline{0}\}$ equivale a moltiplicare la sola prima componente con l'usuale operazione di moltiplicazione di V. Allora, come accade per $\mathbb{C}$, si può sostituire la notazione $(\underline{v}, \underline{w})$ con la più comoda notazione $\underline{v} + i\underline{w}$.

Osservazione. Sia $\mathcal{B} = \{\underline{v_1}, \ldots, \underline{v_n}\}$ una base di V. Innanzitutto si osserva che $(a + bi)(\underline{v}, \underline{0}) = (a\underline{v}, b\underline{v})$. Pertanto si può concludere che $\mathcal{B} \times \{\underline{0}\}$ è una base dello spazio complessificato $V_{\mathbb{C}}$ su $\mathbb{C}$.

[2] Si sarebbe potuto ottenere lo stesso risultato utilizzando il teorema delle torri algebriche: $[V_{\mathbb{R}} : \mathbb{R}] = [V : \mathbb{C}][\mathbb{C} : \mathbb{R}] = 2[V : \mathbb{C}]$.

Infatti, se $(a_1+b_1i)(\underline{v_1},\underline{0})+\ldots+(a_n+b_ni)(\underline{v_n},\underline{0}) = (\underline{0},\underline{0})$, allora $(a_1\underline{v_1}+\ldots+a_n\underline{v_n}, b_1\underline{v_1}+\ldots+b_n\underline{v_n}) = (\underline{0},\underline{0})$. Poiché però $\mathcal{B}$ è linearmente indipendente per ipotesi, l'ultima identità implica che $a_1 = \cdots = a_n = b_1 = \cdots = b_n = 0$, e quindi che $\mathcal{B} \times \{\underline{0}\}$ è linearmente indipendente.

Inoltre $\mathcal{B} \times \{\underline{0}\}$ genera $V_{\mathbb{C}}$. Se infatti $\underline{v} = (\underline{u},\underline{w})$, e vale che:

$$\underline{u} = a_1\underline{v_1}+\ldots+a_n\underline{v_n}, \quad \underline{w} = b_1\underline{v_1}+\ldots+b_n\underline{v_n},$$

allora $\underline{v} = (a_1+b_1i)(\underline{v_1},\underline{0})+\ldots+(a_n+b_ni)(\underline{v_n},\underline{0})$. Quindi $\dim V_{\mathbb{C}} = \dim V$.

Definizione. Sia f un'applicazione $\mathbb{C}$-lineare di V spazio vettoriale su $\mathbb{C}$. Allora si definisce la **restrizione su** $\mathbb{R}$ di f, detta $f_{\mathbb{R}} : V_{\mathbb{R}} \to V_{\mathbb{R}}$, in modo tale che $f_{\mathbb{R}}(\underline{v}) = f(\underline{v})$.

Osservazione. Sia $\mathcal{B} = \{\underline{v_1},\ldots,\underline{v_n}\}$ una base di V su $\mathbb{C}$. Sia $A = M_{\mathcal{B}}(f)$. Si osserva allora che, se $\mathcal{B}' = \mathcal{B} \cup i\mathcal{B}$ e $A = A' + iA''$ con A', $A'' \in M(n,\mathbb{R})$, vale la seguente identità:

$$M_{\mathcal{B}'}(f_{\mathbb{R}}) = \left(\begin{array}{c|c} A' & -A'' \\ \hline A'' & A' \end{array}\right).$$

Infatti, se $f(\underline{v_i}) = (a_1+b_1i)\underline{v_1}+\ldots+(a_n+b_ni)\underline{v_n}$, vale che $f_{\mathbb{R}}(\underline{v_i}) = a_1\underline{v_1}+\ldots+a_n\underline{v_n}+b_1(i\underline{v_1})+\ldots+b_n(i\underline{v_n})$, mentre $f_{\mathbb{R}}(i\underline{v_i}) = if(\underline{v_i}) = -b_1\underline{v_1}+\ldots-b_n\underline{v_n}+a_1(i\underline{v_1})+\ldots+a_n(i\underline{v_n})$.

Definizione. Sia f un'applicazione $\mathbb{R}$-lineare di V spazio vettoriale su $\mathbb{R}$. Allora si definisce la **complessificazione** di f, detta $f_{\mathbb{C}} : V_{\mathbb{C}} \to V_{\mathbb{C}}$, in modo tale che $f_{\mathbb{C}}(\underline{v}+i\underline{w}) = f(\underline{v})+if(\underline{w})$.

Osservazione. Si verifica infatti che $f_{\mathbb{C}}$ è $\mathbb{C}$-lineare.

- $f_{\mathbb{C}}((\underline{v_1}+i\underline{w_1})+(\underline{v_2}+i\underline{w_2})) = f_{\mathbb{C}}((\underline{v_1}+\underline{v_2})+i(\underline{w_1}+\underline{w_2})) = f(\underline{v_1}+\underline{v_2})+if(\underline{w_1}+\underline{w_2}) = (f(\underline{v_1})+if(\underline{w_1}))+(f(\underline{v_2})+if(\underline{w_2})) = f_{\mathbb{C}}(\underline{v_1}+i\underline{w_1})+f_{\mathbb{C}}(\underline{v_2}+i\underline{w_2})$.
- $f_{\mathbb{C}}((a+bi)(\underline{v}+i\underline{w})) = f_{\mathbb{C}}(a\underline{v}-b\underline{w}+i(a\underline{w}+b\underline{v})) = f(a\underline{v}-b\underline{w})+if(a\underline{w}+b\underline{v}) = af(\underline{v})-bf(\underline{w})+i(af(\underline{w})+bf(\underline{v})) = (a+bi)(f(\underline{v})+if(\underline{w})) = (a+bi)f_{\mathbb{C}}(\underline{v}+i\underline{w})$.

Proposizione 2.4. Sia $f_{\mathbb{C}}$ la complessificazione di $f \in \operatorname{End}(V)$, dove V è uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$. Sia inoltre $\mathcal{B} = \{\underline{v_1},\ldots,\underline{v_n}\}$ una base di V. Valgono allora i seguenti risultati:

(i) $(f_{\mathbb{C}})_{\mathbb{R}}|_V$ assume gli stessi valori di f,

(ii) $M_{\mathcal{B}}(f_{\mathbb{C}}) = M_{\mathcal{B}}(f) \in M(n,\mathbb{R})$,

(iii) $M_{\mathcal{B}\cup i\mathcal{B}}((f_{\mathbb{C}})_{\mathbb{R}}) = \left(\begin{array}{c|c} M_{\mathcal{B}}(f) & 0 \\ \hline 0 & M_{\mathcal{B}}(f) \end{array}\right)$.

Dimostrazione. Si dimostrano i risultati separatamente.

(i) Si osserva che $(f_\mathbb{C})_\mathbb{R}(\underline{v_i}) = f_\mathbb{C}(\underline{v_i}) = f(\underline{v_i})$. Dal momento che $(f_\mathbb{C})_\mathbb{R}$ è $\mathbb{R}$-lineare, si conclude che $(f_\mathbb{C})_\mathbb{R}$ assume gli stessi valori di f.

(ii) Dal momento che $\mathcal{B}$, nell'identificazione di $(\underline{v}, \underline{0})$ come $\underline{v}$, è sempre una base di $V_\mathbb{C}$, e $f_\mathbb{C}(\underline{v_i}) = f(\underline{v_i})$, chiaramente $[f_\mathbb{C}(\underline{v_i})]_\mathcal{B} = [f(\underline{v_i})]_\mathcal{B}$, e quindi $M_\mathcal{B}(f_\mathbb{C}) = M_\mathcal{B}(f)$, dove si osserva anche che $M_\mathcal{B}(f) \in M(n, \mathbb{R})$, essendo V uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$.

(iii) Sia $f(\underline{v_i}) = a_1\underline{v_1} + \ldots + a_n\underline{v_n}$ con a_1, ..., $a_n \in \mathbb{R}$. Come osservato in (i), $(f_\mathbb{C})_\mathbb{R}|_\mathcal{B} = (f_\mathbb{C})_\mathbb{R}|_\mathcal{B}$, e quindi la prima metà di $M_{\mathcal{B}\cup i\mathcal{B}}((f_\mathbb{C})_\mathbb{R})$ è formata da due blocchi: uno verticale coincidente con $M_\mathcal{B}(f)$ e un altro completamente nullo, dal momento che non compare alcun termine di $i\mathcal{B}$ nella scrittura di $(f_\mathbb{C})_\mathbb{R}(\underline{v_i})$. Al contrario, per $i\mathcal{B}$, $(f_\mathbb{C})_\mathbb{R}(i\underline{v_i}) = f_\mathbb{C}(i\underline{v_i}) = if(\underline{v_i}) = a_1(i\underline{v_1}) + \ldots + a_n(i\underline{v_n})$; pertanto la seconda metà della matrice avrà i due blocchi della prima metà, benché scambiati.

□

Osservazione. Dal momento che $M_\mathcal{B}(f_\mathbb{C}) = M_\mathcal{B}(f)$, $f_\mathbb{C}$ e f condividono lo stesso polinomio caratteristico e vale che $\mathrm{sp}(f) \subseteq \mathrm{sp}(f_\mathbb{C})$, dove vale l'uguaglianza se e solo se tale polinomio caratteristico è completamente riducibile in $\mathbb{R}$. Inoltre, se V_λ è l'autospazio su V dell'autovalore λ, l'autospazio su $V_\mathbb{C}$, rispetto a $f_\mathbb{C}$, è invece $V_{\mathbb{C}\lambda} = V_\lambda + iV_\lambda$, la cui dimensione rimane invariata rispetto a V_λ, ossia $\dim V_\lambda = \dim V_{\mathbb{C}\lambda}$ (infatti, analogamente a prima, una base di V_λ può essere identificata come base anche per $V_{\mathbb{C}\lambda}$).

Proposizione 2.5. Sia $f_\mathbb{C}$ la complessificazione di $f \in \mathrm{End}(V)$, dove V è uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$. Sia inoltre $\mathcal{B} = \{\underline{v_1}, \ldots, \underline{v_n}\}$ una base di V. Allora un endomorfismo $\tilde{g} : V_\mathbb{C} \to V_\mathbb{C}$ complessifica un endomorfismo $g \in \mathrm{End}(V) \iff M_\mathcal{B}(\tilde{g}) \in M(n, \mathbb{R})$.

Dimostrazione. Se $\tilde{g}$ complessifica $g \in \mathrm{End}(V)$, allora, per la proposizione precedente, $M_\mathcal{B}(\tilde{g}) = M_\mathcal{B}(g) \in M(n, \mathbb{R})$. Se invece $A = M_\mathcal{B}(\tilde{g}) \in M(n, \mathbb{R})$, si considera $g = M_\mathcal{B}^{-1}(A) \in \mathrm{End}(V)$. Si verifica facilmente che $\tilde{g}$ non è altro che il complessificato di tale g:

- $\tilde{g}(\underline{v_i}) = g(\underline{v_i})$, dove l'uguaglianza è data dal confronto delle matrici associate, e quindi $\tilde{g}|_V = g$;
- $\tilde{g}(\underline{v} + i\underline{w}) = \tilde{g}(\underline{v}) + i\tilde{g}(\underline{w}) = g(\underline{v}) + ig(\underline{w})$, da cui la tesi.

□

Proposizione 2.6. Sia φ un prodotto scalare di V spazio vettoriale su $\mathbb{R}$. Allora esiste un unico prodotto hermitiano $\varphi_\mathbb{C} : V_\mathbb{C} \times V_\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ che estende φ (ossia tale che $\varphi_\mathbb{C}|_{V\times V} = \varphi$), il quale assume la stessa segnatura di φ.

Dimostrazione. Sia $\mathcal{B}$ una base di Sylvester per φ. Si consideri allora il prodotto $\varphi_\mathbb{C}$ tale che:

$$\varphi_\mathbb{C}(\underline{v_1} + i\underline{w_1}, \underline{v_2} + i\underline{w_2}) = \varphi(\underline{v_1}, \underline{v_2}) + \varphi(\underline{w_1}, \underline{w_2}) + i(\varphi(\underline{v_1}, \underline{w_1}) - \varphi(\underline{w_1}, \underline{v_2})).$$

Chiaramente $\varphi_\mathbb{C}|_{V\times V} = \varphi$. Si verifica allora che $\varphi_\mathbb{C}$ è hermitiano:

- $\varphi_{\mathbb{C}}(\underline{v}+i\underline{w},(\underline{v_1}+i\underline{w_1})+(\underline{v_2}+i\underline{w_2})) = \varphi(\underline{v},\underline{v_1}+\underline{v_2})+\varphi(\underline{w},\underline{w_1}+\underline{w_2})\ +i(\varphi(\underline{v},\underline{w_1}+\underline{w_2})\ -\varphi(\underline{w},\underline{v_1}+\underline{v_2})) = [\varphi(\underline{v},\underline{v_1})+\varphi(\underline{w},\underline{w_1})+i(\varphi(\underline{v},\underline{w_1})-\varphi(\underline{w},\underline{v_1}))]\ +[\varphi(\underline{v},\underline{v_2})+\varphi(\underline{w},\underline{w_2})+i(\varphi(\underline{v},\underline{w_2})-\varphi(\underline{w},\underline{v_2}))] = \varphi_{\mathbb{C}}(\underline{v}+i\underline{w},\underline{v_1}+i\underline{w_1})+\varphi_{\mathbb{C}}(\underline{v}+i\underline{w},\underline{v_2}+i\underline{w_2})$ (additività nel secondo argomento),

- $\varphi_{\mathbb{C}}(\underline{v}+i\underline{w},(a+bi)(\underline{v_1}+i\underline{w_1})) = \varphi_{\mathbb{C}}(\underline{v}+i\underline{w},a\underline{v_1}-b\underline{w_1}+i(b\underline{v_1}+a\underline{w_1})) = \varphi(\underline{v},a\underline{v_1}-b\underline{w_1})+\varphi(\underline{w},b\underline{v_1}+a\underline{w_1})+i(\varphi(\underline{v},b\underline{v_1}+a\underline{w_1})-\varphi(\underline{w},a\underline{v_1}-b\underline{w_1})) = a\varphi(\underline{v},\underline{v_1})-b\varphi(\underline{v},\underline{w_1})+b\varphi(\underline{w},\underline{v_1})+a\varphi(\underline{w},\underline{w_1})+i(b\varphi(\underline{v},\underline{v_1})+a\varphi(\underline{v},\underline{w_1})-a\varphi(\underline{w},\underline{v_1})+b\varphi(\underline{w},\underline{w_1})) = a(\varphi(\underline{v},\underline{v_1})+\varphi(\underline{w},\underline{w_1}))-b(\varphi(\underline{v},\underline{w_1})-\varphi(\underline{w},\underline{v_1}))+i(a(\varphi(\underline{v},\underline{w_1})-\varphi(\underline{w},\underline{v_1}))+b(\varphi(\underline{v},\underline{v_1})+\varphi(\underline{w},\underline{w_1}))) = (a+bi)(\varphi(\underline{v},\underline{v_1})+\varphi(\underline{w},\underline{w_1})+i(\varphi(\underline{v},\underline{w_1})-\varphi(\underline{w},\underline{v_1}))) = (a+bi)\varphi_{\mathbb{C}}(\underline{v}+\underline{w},\underline{v_1}+i\underline{w_1})$ (omogeneità nel secondo argomento),

- $\varphi_{\mathbb{C}}(\underline{v_1}+i\underline{w_1},\underline{v_2}+i\underline{w_2}) = \varphi(\underline{v_1},\underline{v_2})+\varphi(\underline{w_1},\underline{w_2})+i(\varphi(\underline{v_1},\underline{w_2})-\varphi(\underline{w_1},\underline{v_2})) = \overline{\varphi(\underline{v_1},\underline{v_2})+\varphi(\underline{w_1},\underline{w_2})+i(\varphi(\underline{w_1},\underline{v_2})-\varphi(\underline{v_1},\underline{w_2}))} = \overline{\varphi(\underline{v_2},\underline{v_1})+\varphi(\underline{w_2},\underline{w_1})+i(\varphi(\underline{v_2},\underline{w_1})-\varphi(\underline{w_2},\underline{v_1}))} = \overline{\varphi_{\mathbb{C}}(\underline{v_2}+\underline{w_2},\underline{v_1}+\underline{w_1})}$ (coniugio nello scambio degli argomenti).

Ogni prodotto hermitiano τ che estende il prodotto scalare φ ha la stessa matrice associata nella base $\mathcal{B}$, essendo $\tau(\underline{v_i},\underline{v_i}) = \varphi(\underline{v_i},\underline{v_i})$ vero per ipotesi. Pertanto τ è unico, e vale che $\tau = \varphi_{\mathbb{C}}$. Dal momento che $M_{\mathcal{B}}(\varphi_{\mathbb{C}}) = M_{\mathcal{B}}(\varphi)$ è una matrice di Sylvester, $\varphi_{\mathbb{C}}$ mantiene anche la stessa segnatura di φ. $\square$

3 Spazi euclidei e teorema spettrale (non indicizzato)

Nota. Nel corso del documento, per V si intenderà uno spazio vettoriale di dimensione finita n e per φ un suo prodotto, hermitiano o scalare dipendentemente dal contesto.

Teorema 3.1. (di rappresentazione di Riesz per il prodotto scalare) Sia V uno spazio vettoriale e sia φ un suo prodotto scalare non degenere. Allora per ogni $f \in V^*$ esiste un unico $\underline{v} \in V$ tale che $f(\underline{w}) = \varphi(\underline{v}, \underline{w})\ \forall\, \underline{w} \in V$.

Dimostrazione. Si consideri l'applicazione a_φ. Poiché φ non è degenere, $\operatorname{Ker} a_\varphi = V^\perp = \{\underline{0}\}$, da cui si deduce che a_φ è un isomorfismo. Quindi $\forall\, f \in V^*$ esiste un unico $\underline{v} \in V$ tale per cui $a_\varphi(\underline{v}) = f$, e dunque tale per cui $\varphi(\underline{v}, \underline{w}) = a_\varphi(\underline{v})(\underline{w}) = f(\underline{w})\ \forall\, \underline{w} \in V$. □

Dimostrazione costruttiva. Sia $\mathcal{B} = \{\underline{v_1}, \ldots, \underline{v_n}\}$ una base ortogonale di V per φ. Allora $\mathcal{B}^*$ è una base di V^*. In particolare $f = f(\underline{v_1})\underline{v_1}^* + \ldots + f(\underline{v_n})\underline{v_n}^*$. Sia $\underline{v} = \frac{f(\underline{v_1})}{\varphi(\underline{v_1}, \underline{v_1})}\underline{v_1} + \ldots + \frac{f(\underline{v_n})}{\varphi(\underline{v_n}, \underline{v_n})}$. Detto $\underline{w} = a_1\underline{v_1} + \ldots + a_n\underline{v_n}$, si deduce che $\varphi(\underline{v}, \underline{w}) = a_1 f(\underline{v_1}) + \ldots + a_n f(\underline{v_n}) = f(\underline{w})$. Se esistesse $\underline{v}' \in V$ con la stessa proprietà di $\underline{v}$, $\varphi(\underline{v}, \underline{w}) = \varphi(\underline{v}', \underline{w}) \implies \varphi(\underline{v} - \underline{v}', \underline{w})$ $\forall\, \underline{w} \in V$. Si deduce dunque che $\underline{v} - \underline{v}' \in V^\perp$, contenente solo $\underline{0}$ dacché φ è non degenere; e quindi si conclude che $\underline{v} = \underline{v}'$, ossia che esiste solo un vettore con la stessa proprietà di $\underline{v}$. □

Teorema 3.2. (di rappresentazione di Riesz per il prodotto hermitiano) Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{C}$ e sia φ un suo prodotto hermitiano non degenere. Allora per ogni $f \in V^*$ esiste un unico $\underline{v} \in V$ tale che $f(\underline{w}) = \varphi(\underline{v}, \underline{w})\ \forall\, \underline{w} \in V$.

Dimostrazione. Sia $\mathcal{B} = \{\underline{v_1}, \ldots, \underline{v_n}\}$ una base ortogonale di V per φ. Allora $\mathcal{B}^*$ è una base di V^*. In particolare $f = f(\underline{v_1})\underline{v_1}^* + \ldots + f(\underline{v_n})\underline{v_n}^*$. Sia $\underline{v} = \frac{\overline{f(\underline{v_1})}}{\varphi(\underline{v_1}, \underline{v_1})}\underline{v_1} + \ldots + \frac{\overline{f(\underline{v_n})}}{\varphi(\underline{v_n}, \underline{v_n})}$. Detto $\underline{w} = a_1\underline{v_1} + \ldots + a_n\underline{v_n}$, si deduce che $\varphi(\underline{v}, \underline{w}) = a_1 f(\underline{v_1}) + \ldots + a_n f(\underline{v_n}) = f(\underline{w})$. Se esistesse $\underline{v}' \in V$ con la stessa proprietà di $\underline{v}$, $\varphi(\underline{v}, \underline{w}) = \varphi(\underline{v}', \underline{w}) \implies \varphi(\underline{v} - \underline{v}', \underline{w})$ $\forall\, \underline{w} \in V$. Si deduce dunque che $\underline{v} - \underline{v}' \in V^\perp$, contenente solo $\underline{0}$ dacché φ è non degenere; e quindi si conclude che $\underline{v} = \underline{v}'$, ossia che esiste solo un vettore con la stessa proprietà di $\underline{v}$. □

Proposizione 3.1. Sia V uno spazio vettoriale con prodotto scalare φ non degenere. Sia $f \in \operatorname{End}(V)$. Allora esiste un unico endomorfismo $f_\varphi^\top : V \to V$, detto il **trasposto di** f e indicato con $f^\top$ in assenza di ambiguità[1], tale che:

[1] Si tenga infatti in conto della differenza tra $f_\varphi^\top : V \to V$, di cui si discute nell'enunciato, e $f^\top : V^* \to V^*$ che invece è tale che $f^t op(g) = g \circ f$.

$$a_\varphi \circ g = f^\top \circ a_\varphi,$$

ossia che:

$$\varphi(\underline{v}, f(\underline{w})) = \varphi(g(\underline{v}), \underline{w}) \;\forall\, \underline{v}, \underline{w} \in V.$$

Dimostrazione. Si consideri $(f^\top \circ a_\varphi)(\underline{v}) \in V^*$. Per il teorema di rappresentazione di Riesz per il prodotto scalare, esiste un unico $\underline{v}'$ tale che $(f^\top \circ a_\varphi)(\underline{v})(\underline{w}) = \varphi(\underline{v}', \underline{w}) \implies \varphi(\underline{v}, f(\underline{w})) = \varphi(\underline{v}', \underline{w}) \;\forall\, \underline{w} \in V$. Si costruisce allora una mappa $f_\varphi^\top : V \to V$ che associa a $\underline{v}$ tale $\underline{v}'$. Si dimostra che $f_\varphi^\top$ è un'applicazione lineare, e che dunque è un endomorfismo:

(i) Siano $\underline{v_1}$, $\underline{v_2} \in V$. Si deve dimostrare innanzitutto che $f_\varphi^\top(\underline{v_1} + \underline{v_2}) = f_\varphi^\top(\underline{v_1}) + f_\varphi^\top(\underline{v_2})$, ossia che $\varphi(f_\varphi^\top(\underline{v_1}) + f_\varphi^\top(\underline{v_2}), \underline{w}) = \varphi(\underline{v_1} + \underline{v_2}, f(\underline{w})) \;\forall\, \underline{w} \in V$.

Si osservano le seguenti identità:

$$\begin{aligned}
&\varphi(\underline{v_1} + \underline{v_2}, f(\underline{w})) = \varphi(\underline{v_1}, f(\underline{w})) + \varphi(\underline{v_2}, f(\underline{w})) = (*),\\
&\varphi(f_\varphi^\top(\underline{v_1}) + f_\varphi^\top(\underline{v_2}), \underline{w}) = \varphi(f_\varphi^\top(\underline{v_1}), \underline{w}) + \varphi(f_\varphi^\top(\underline{v_2}), \underline{w}) = (*),
\end{aligned}$$

da cui si deduce l'uguaglianza desiderata, essendo $f_\varphi^\top(\underline{v_1} + \underline{v_2})$ l'unico vettore di V con la proprietà enunciata dal teorema di rappresentazione di Riesz.

(ii) Sia $\underline{v} \in V$. Si deve dimostrare che $f_\varphi^\top(a\underline{v}) = af_\varphi^\top(\underline{v})$, ossia che $\varphi(af_\varphi^\top(\underline{v}), \underline{w}) = \varphi(a\underline{v}, f(\underline{w})) \;\forall\, a \in \mathbb{K},\ \underline{w} \in V$. È sufficiente moltiplicare per a l'identità $\varphi(f_\varphi^\top(\underline{v}), \underline{w}) = \varphi(\underline{v}, f(\underline{w}))$. Analogamente a prima, si deduce che $f_\varphi^\top(a\underline{v}) = af_\varphi^\top(\underline{v})$, essendo $f_\varphi^\top(a\underline{v})$ l'unico vettore di V con la proprietà enunciata dal teorema di rappresentazione di Riesz.

Infine si dimostra che $f_\varphi^\top$ è unico. Sia infatti g un endomorfismo di V che condivide la stessa proprietà di $f_\varphi^\top$. Allora $\varphi(f_\varphi^\top(\underline{v}), \underline{w}) = \varphi(\underline{v}, f(\underline{w})) = \varphi(g(\underline{v}), \underline{w}) \;\forall\, \underline{v},\ \underline{w} \in V$, da cui si deduce che $\varphi(f_\varphi^\top(\underline{v}) -' (\underline{v}), \underline{w}) = 0 \;\forall\, \underline{v},\ \underline{w} \in V$, ossia che $f_\varphi^\top(\underline{v}) - g(\underline{v}) \in V^\perp \;\forall\, \underline{v} \in V$. Tuttavia φ è non degenere, e quindi $V^\perp = \{\underline{0}\}$, da cui si deduce che deve valere l'identità $f_\varphi^\top(\underline{v}) = g(\underline{v}) \;\forall\, \underline{v} \in V$, ossia $g = f_\varphi^\top$. □

Proposizione 3.2. Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{C}$ e sia φ un suo prodotto hermitiano. Allora esiste un'unica mappa[2] $f^* : V \to V$, detta **aggiunto di** f, tale che $\varphi(\underline{v}, f(\underline{w})) = \varphi(f^*(\underline{v}), \underline{w}) \;\forall\, \underline{v},\ \underline{w} \in V$.

Dimostrazione. Sia $\underline{v} \in V$. Si consideri il funzionale σ tale che $\sigma(\underline{w}) = \varphi(\underline{v}, f(\underline{w}))$. Per il teorema di rappresentazione di Riesz per il prodotto scalare esiste un unico $\underline{v}' \in V$ tale per cui $\varphi(\underline{v}, f(\underline{w})) = \sigma(\underline{w}) = \varphi(\underline{v}', \underline{w})$. Si costruisce allora una mappa f^* che associa $\underline{v}$ a

[2] Si osservi che f^* non è un'applicazione lineare, benché sia invece *antilineare*.

tale $\underline{v}'$.

Si dimostra infine che la mappa f^* è unica. Sia infatti $\mu : V \to V$ che condivide la stessa proprietà di f^*. Allora $\varphi(f^*(\underline{v}), \underline{w}) = \varphi(\underline{v}, f(\underline{w})) = \varphi(\mu(\underline{v}), \underline{w}) \ \forall \, \underline{v}, \, \underline{w} \in V$, da cui si deduce che $\varphi(f^*(\underline{v}) - \mu(\underline{v}), \underline{w}) = 0 \ \forall \, \underline{v}, \, \underline{w} \in V$, ossia che $f^*(\underline{v}) - \mu(\underline{v}) \in V^\perp \ \forall \, \underline{v} \in V$. Tuttavia φ è non degenere, e quindi $V^\perp = \{\underline{0}\}$, da cui si deduce che deve valere l'identità $f^*(\underline{v}) = \mu(\underline{v}) \ \forall \, \underline{v} \in V$, ossia $\mu = f^*$. □

Osservazione. L'operazione di trasposizione di un endomorfismo sul prodotto scalare non degenere φ è un'involuzione. Infatti valgono le seguenti identità $\forall \, \underline{v}, \, \underline{w} \in V$:

$$\begin{cases} \varphi(\underline{w}, f^\top(\underline{v})) = \varphi(f^\top(\underline{v}), \underline{w}) = \varphi(\underline{v}, f(\underline{w})), \\ \varphi(\underline{w}, f^\top(\underline{v})) = \varphi((f^\top)^\top(\underline{w}), \underline{v}) = \varphi(\underline{v}, (f^\top)^\top(\underline{w})). \end{cases}$$

Si conclude allora, poiché φ è non degenere, che $f(\underline{w}) = (f^\top)^\top(\underline{w}) \ \forall \, \underline{w} \in V$, ossia che $f = (f^\top)^\top$.

Osservazione. Analogamente si può dire per l'operazione di aggiunta per un prodotto hermitiano φ non degenere. Valgono infatti le seguenti identità $\forall \, \underline{v}, \, \underline{w} \in V$:

$$\begin{cases} \overline{\varphi(\underline{w}, f^*(\underline{v}))} = \varphi(f^*(\underline{v}), \underline{w}) = \varphi(\underline{v}, f(\underline{w})), \\ \overline{\varphi(\underline{w}, f^*(\underline{v}))} = \overline{\varphi((f^*)^*(\underline{w}), \underline{v})} = \varphi(\underline{v}, (f^*)^*(\underline{w})), \end{cases}$$

da cui si deduce, come prima, che $f = (f^*)^*$.

Definizione. (base ortonormale) Si definisce **base ortonormale** di uno spazio vettoriale V su un suo prodotto φ una base ortogonale $\mathcal{B} = \{\underline{v_1}, \ldots, \underline{v_n}\}$ tale che $\varphi(\underline{v_i}, \underline{v_j}) = \delta_{ij}$.

Proposizione 3.3. Sia φ un prodotto scalare non degenere di V. Sia $f \in \operatorname{End}(V)$. Allora vale la seguente identità:

$$M_\mathcal{B}(f_\varphi^\top) = M_\mathcal{B}(\varphi)^{-1} M_\mathcal{B}(f)^\top M_\mathcal{B}(\varphi),$$

dove $\mathcal{B}$ è una base di V.

Dimostrazione. Sia $\mathcal{B}^*$ la base relativa a $\mathcal{B}$ in V^*. Per la proposizione precedente vale la seguente identità:

$$a_\varphi \circ f_\varphi^\top = f^\top \circ a_\varphi.$$

Pertanto, passando alle matrici associate, si ricava che:

$$M_{\mathcal{B}^*}^{\mathcal{B}}(a_\varphi) M_\mathcal{B}(f_\varphi^\top) = M_{\mathcal{B}^*}(f^\top) M_{\mathcal{B}^*}^{\mathcal{B}}(a_\varphi).$$

Dal momento che valgono le seguenti due identità:

$$M_{\mathcal{B}^*}^{\mathcal{B}}(a_\varphi) = M_{\mathcal{B}}(\varphi), \qquad M_{\mathcal{B}^*}(f^\top) = M_{\mathcal{B}}(f)^\top,$$

e a_φ è invertibile (per cui anche $M_{\mathcal{B}}(\varphi)$ lo è), si conclude che:

$$M_{\mathcal{B}}(\varphi)M_{\mathcal{B}}(f_\varphi^\top) = M_{\mathcal{B}}(f)^\top M_{\mathcal{B}}(\varphi) \implies M_{\mathcal{B}}(f_\varphi^\top) = M_{\mathcal{B}}(\varphi)^{-1}M_{\mathcal{B}}(f)^\top M_{\mathcal{B}}(\varphi),$$

da cui la tesi. □

Corollario 3.1. Sia φ un prodotto scalare di V. Se $\mathcal{B}$ è una base ortonormale, φ è non degenere e $M_{\mathcal{B}}(f_\varphi^\top) = M_{\mathcal{B}}(f)^\top$.

Dimostrazione. Se $\mathcal{B}$ è una base ortonormale, $M_{\mathcal{B}}(\varphi) = I_n$. Pertanto φ è non degenere. Allora, per la proposizione precedente:

$$M_{\mathcal{B}}(f_\varphi^\top) = M_{\mathcal{B}}(\varphi)^{-1}M_{\mathcal{B}}(f)^\top M_{\mathcal{B}}(\varphi) = M_{\mathcal{B}}(f)^\top.$$

□

Proposizione 3.4. Sia φ un prodotto hermitiano non degenere di V. Sia $f \in \operatorname{End}(V)$. Allora vale la seguente identità:

$$M_{\mathcal{B}}(f_\varphi^*) = M_{\mathcal{B}}(\varphi)^{-1}M_{\mathcal{B}}(f)^* M_{\mathcal{B}}(\varphi),$$

dove $\mathcal{B}$ è una base di V.

Dimostrazione. Sia $\mathcal{B} = \{\underline{v_1}, \ldots, \underline{v_n}\}$. Dal momento che φ è non degenere, $\operatorname{Ker} M_{\mathcal{B}}(\varphi) = V^\perp = \{\underline{0}\}$, e quindi $M_{\mathcal{B}}(\varphi)$ è invertibile.

Dacché allora $\varphi(f^*(\underline{v}), \underline{w}) = \varphi(\underline{v}, f(\underline{w}))\ \forall\, \underline{v},\ \underline{w} \in V$, vale la seguente identità:

$$[f^*(\underline{v})]_{\mathcal{B}}^* M_{\mathcal{B}}(\varphi)[\underline{w}]_{\mathcal{B}} = [\underline{v}]_{\mathcal{B}}^* M_{\mathcal{B}}(\varphi)[f(\underline{w})]_{\mathcal{B}},$$

ossia si deduce che:

$$[\underline{v}]_{\mathcal{B}}^* M_{\mathcal{B}}(f^*)^* M_{\mathcal{B}}(\varphi)[\underline{w}]_{\mathcal{B}} = [\underline{v}]_{\mathcal{B}}^* M_{\mathcal{B}}(\varphi)M_{\mathcal{B}}(f)[\underline{w}]_{\mathcal{B}}.$$

Sostituendo allora a $\underline{v}$ e $\underline{w}$ i vettori della base $\mathcal{B}$, si ottiene che:

$$\begin{aligned}(M_{\mathcal{B}}(f^*)^* M_{\mathcal{B}}(\varphi))_{ij} &= [\underline{v_i}]_{\mathcal{B}}^* M_{\mathcal{B}}(f^*)^* M_{\mathcal{B}}(\varphi)[\underline{v_j}]_{\mathcal{B}} = \\ &= [\underline{v_i}]_{\mathcal{B}}^* M_{\mathcal{B}}(\varphi)M_{\mathcal{B}}(f)[\underline{v_j}]_{\mathcal{B}} = (M_{\mathcal{B}}(\varphi)M_{\mathcal{B}}(f))_{ij},\end{aligned}$$

e quindi che $M_{\mathcal{B}}(f^*)^* M_{\mathcal{B}}(\varphi) = M_{\mathcal{B}}(\varphi)M_{\mathcal{B}}(f)$. Moltiplicando a destra per l'inversa di $M_{\mathcal{B}}(\varphi)$ e prendendo l'aggiunta di ambo i membri (ricordando che $M_{\mathcal{B}}(\varphi)^* = M_{\mathcal{B}}(\varphi)$, essendo φ un prodotto hermitiano), si ricava l'identità desiderata.

□

Corollario 3.2. Sia φ un prodotto hermitiano di V spazio vettoriale su $\mathbb{C}$. Se $\mathcal{B}$ è una base ortonormale, φ è non degenere e $M_\mathcal{B}(f_\varphi^*) = M_\mathcal{B}(f)^*$.

Dimostrazione. Se $\mathcal{B}$ è una base ortonormale, $M_\mathcal{B}(\varphi) = I_n$. Pertanto φ è non degenere. Allora, per la proposizione precedente:

$$M_\mathcal{B}(f_\varphi^*) = M_\mathcal{B}(\varphi)^{-1} M_\mathcal{B}(f)^* M_\mathcal{B}(\varphi) = M_\mathcal{B}(f)^*.$$

□

Nota. D'ora in poi, nel corso del documento, s'intenderà per φ un prodotto scalare (o eventualmente hermitiano) non degenere di V.

Definizione. (operatori simmetrici) Sia $f \in \operatorname{End}(V)$. Si dice allora che f è **simmetrico** (o *autoaggiunto*) se $f = f^\top$.

Definizione. (applicazioni e matrici ortogonali) Sia $f \in \operatorname{End}(V)$. Si dice allora che f è **ortogonale** se $\varphi(\underline{v}, \underline{w}) = \varphi(f(\underline{v}), f(\underline{w}))$, ossia se è un'isometria in V. Sia $A \in M(n, \mathbb{K})$. Si dice dunque che A è **ortogonale** se $A^\top A = AA^\top = I_n$.

Definizione. Le matrici ortogonali di $M(n, \mathbb{K})$ formano un sottogruppo moltiplicativo di $\mathrm{GL}(n, \mathbb{K})$, detto **gruppo ortogonale**, e indicato con O_n. Il sottogruppo di O_n contenente solo le matrici con determinante pari a 1 è detto **gruppo ortogonale speciale**, e si denota con SO_n.

Osservazione. Si possono classificare in modo semplice alcuni di questi gruppi ortogonali per $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

▶ $A \in O_n \implies 1 = \det(I_n) = \det(AA^\top) = \det(A)^2 \implies \det(A) = \pm 1$.
▶ $A = (a) \in O_1 \iff A^\top A = I_1 \iff a^2 = 1 \iff a = \pm 1$, da cui si ricava che l'unica matrice di SO_1 è (1). Si osserva inoltre che O_1 è abeliano di ordine 2, e quindi che $O_1 \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.
▶ $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in O_2 \iff \begin{pmatrix} a^2+b^2 & ab+cd \\ ab+cd & c^2+d^2 \end{pmatrix} = A^\top A = I_2$.

Pertanto deve essere soddisfatto il seguente sistema di equazioni:

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = c^2 + d^2 = 1, \\ ac + bd = 0. \end{cases}$$

Si ricava dunque che si può identificare A con le funzioni trigonometriche $\cos(\theta)$ e $\sin(\theta)$ con $\theta \in [0, 2\pi)$ nelle due forme:

$$A = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \qquad (\det(A) = 1, A \in SO_2),$$

$$A = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix} \qquad (\det(A) = -1).$$

Definizione. (applicazioni e matrici hermitiane) Sia $f \in \mathrm{End}(V)$ e si consideri il prodotto hermitiano φ. Si dice allora che f è **hermitiano** se $f = f^*$. Sia $A \in M(n, \mathbb{C})$. Si dice dunque che A è **hermitiana** se $A = A^*$.

Definizione. (applicazioni e matrici unitarie) Sia $f \in \mathrm{End}(V)$ e si consideri il prodotto hermitiano φ. Si dice allora che f è **unitario** se $\varphi(\underline{v}, \underline{w}) = \varphi(f(\underline{v}), f(\underline{w}))$. Sia $A \in M(n, \mathbb{C})$. Si dice dunque che A è **unitaria** se $A^*A = AA^* = I_n$.

Definizione. Le matrici unitarie di $M(n, \mathbb{C})$ formano un sottogruppo moltiplicativo di $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$, detto **gruppo unitario**, e indicato con U_n. Il sottogruppo di U_n contenente solo le matrici con determinante pari a 1 è detto **gruppo unitario speciale**, e si denota con SU_n.

Osservazione.
Si possono classificare in modo semplice alcuni di questi gruppi unitari.
▶ $A \in U_n \implies 1 = \det(I_n) = \det(AA^*) = \det(A)\overline{\det(A)} = |\det(A)|^2 = 1$.
▶ $A = (a) \in U_1 \iff A^*A = I_1 \iff |a|^2 = 1 \iff a = e^{i\theta}$, $\theta \in [0, 2\pi)$, ossia il numero complesso a appartiene alla circonferenza di raggio unitario.
▶ $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SU_2 \iff AA^* = \begin{pmatrix} |a|^2 + |b|^2 & a\overline{c} + b\overline{d} \\ \overline{a}c + \overline{b}d & |c|^2 + |d|^2 \end{pmatrix} = I_2$, $\det(A) = 1$, ossia se il seguente sistema di equazioni è soddisfatto:

$$\begin{cases} |a|^2 + |b|^2 = |c|^2 + |d|^2 = 1, \\ a\overline{c} + b\overline{d} = 0, \\ ad - bc = 1, \end{cases}$$

le cui soluzioni riassumono il gruppo SU_2 nel seguente modo:

$$SU_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x & -y \\ \overline{y} & \overline{x} \end{pmatrix} \in M(2, \mathbb{C}) \,\middle|\, |x|^2 + |y|^2 = 1 \right\}.$$

Definizione. (spazio euclideo reale) Si definisce **spazio euclideo reale** uno spazio vettoriale V su $\mathbb{R}$ dotato del prodotto scalare standard $\varphi = \langle \cdot, \cdot \rangle$.

Definizione. (spazio euclideo complesso) Si definisce **spazio euclideo complesso** uno spazio vettoriale V su $\mathbb{C}$ dotato del prodotto hermitiano standard $\varphi = \langle \cdot, \cdot \rangle$.

Proposizione 3.5. Sia (V, φ) uno spazio euclideo reale e sia $\mathcal{B}$ una base ortonormale di V. Allora $f \in \mathrm{End}(V)$ è simmetrico $\iff M_\mathcal{B}(f) = M_\mathcal{B}(f)^\top \iff M_\mathcal{B}(f)$ è simmetrica.

Dimostrazione. Per il corollario precedente, f è simmetrico $\iff f = f^\top \iff M_\mathcal{B}(f) = M_\mathcal{B}(f^\top) = M_\mathcal{B}(f)^\top$. □

Proposizione 3.6. Sia (V, φ) uno spazio euclideo reale e sia $\mathcal{B}$ una base ortonormale di V. Allora $f \in \mathrm{End}(V)$ è ortogonale $\iff M_\mathcal{B}(f)M_\mathcal{B}(f)^\top = M_\mathcal{B}(f)^\top M_\mathcal{B}(f) = I_n \overset{\text{def}}{\iff} M_\mathcal{B}(f)$ è ortogonale.

Dimostrazione. Si osserva che $M_{\mathcal{B}}(\varphi) = I_n$. Sia $\mathcal{B} = \{\underline{v_1}, \dots, \underline{v_n}\}$. Se f è ortogonale, allora $[\underline{v}]_{\mathcal{B}}^\top [\underline{w}]_{\mathcal{B}} = [\underline{v}]_{\mathcal{B}}^\top M_{\mathcal{B}}(\varphi)[\underline{w}]_{\mathcal{B}} = \varphi(\underline{v}, \underline{w}) = \varphi(f(\underline{v}), f(\underline{w})) = (M_{\mathcal{B}}(f)[\underline{v}]_{\mathcal{B}})^\top M_{\mathcal{B}}(\varphi)(M_{\mathcal{B}}(f)[\underline{w}]_{\mathcal{B}}) = [\underline{v}]_{\mathcal{B}}^\top M_{\mathcal{B}}(f)^\top M_{\mathcal{B}}(\varphi) M_{\mathcal{B}}(f)[\underline{w}]_{\mathcal{B}} = [\underline{v}]_{\mathcal{B}}^\top M_{\mathcal{B}}(f)^\top M_{\mathcal{B}}(f)[\underline{w}]_{\mathcal{B}}$. Allora, come visto nel corollario precedente, si ricava che $M_{\mathcal{B}}(f)^\top M_{\mathcal{B}}(f) = I_n$. Dal momento che gli inversi sinistri sono anche inversi destri, $M_{\mathcal{B}}(f)^\top M_{\mathcal{B}}(f) = M_{\mathcal{B}}(f) M_{\mathcal{B}}(f)^\top = I_n$.

Se invece $M_{\mathcal{B}}(f)^\top M_{\mathcal{B}}(f) = M_{\mathcal{B}}(f) M_{\mathcal{B}}(f)^\top = I_n$, $\varphi(\underline{v}, \underline{w}) = [\underline{v}]_{\mathcal{B}}^\top [\underline{w}]_{\mathcal{B}} = [\underline{v}]_{\mathcal{B}}^\top M_{\mathcal{B}}(f)^\top M_{\mathcal{B}}(f)[\underline{w}]_{\mathcal{B}} = (M_{\mathcal{B}}(f)[\underline{v}]_{\mathcal{B}})^\top (M_{\mathcal{B}}(f)[\underline{w}]_{\mathcal{B}}) = (M_{\mathcal{B}}(f)[\underline{v}]_{\mathcal{B}})^\top M_{\mathcal{B}}(\varphi)(M_{\mathcal{B}}(f)[\underline{w}]_{\mathcal{B}}) = \varphi(f(\underline{v}), f(\underline{w}))$, e quindi f è ortogonale. □

Proposizione 3.7. Sia (V, φ) uno spazio euclideo complesso e sia $\mathcal{B}$ una base ortonormale di V. Allora $f \in \mathrm{End}(V)$ è hermitiano $\iff M_{\mathcal{B}}(f) = M_{\mathcal{B}}(f)^* \overset{\text{def}}{\iff} M_{\mathcal{B}}(f)$ è hermitiana.

Dimostrazione. Per il corollario precedente, f è hermitiana $\iff f = f^* \iff M_{\mathcal{B}}(f) = M_{\mathcal{B}}(f^*) = M_{\mathcal{B}}(f)^*$. □

Proposizione 3.8. Sia (V, φ) uno spazio euclideo complesso e sia $\mathcal{B}$ una base ortonormale di V. Allora $f \in \mathrm{End}(V)$ è unitario $\iff M_{\mathcal{B}}(f) M_{\mathcal{B}}(f)^* = M_{\mathcal{B}}(f)^* M_{\mathcal{B}}(f) = I_n \overset{\text{def}}{\iff} M_{\mathcal{B}}(f)$ è unitaria.

Dimostrazione. Si osserva che $M_{\mathcal{B}}(\varphi) = I_n$. Sia $\mathcal{B} = \{\underline{v_1}, \dots, \underline{v_n}\}$. Se f è unitario, allora $[\underline{v}]_{\mathcal{B}}^* [\underline{w}]_{\mathcal{B}} = [\underline{v}]_{\mathcal{B}}^* M_{\mathcal{B}}(\varphi)[\underline{w}]_{\mathcal{B}} = \varphi(\underline{v}, \underline{w}) = \varphi(f(\underline{v}), f(\underline{w})) = (M_{\mathcal{B}}(f)[\underline{v}]_{\mathcal{B}})^* M_{\mathcal{B}}(\varphi)(M_{\mathcal{B}}(f)[\underline{w}]_{\mathcal{B}}) = [\underline{v}]_{\mathcal{B}}^* M_{\mathcal{B}}(f)^* M_{\mathcal{B}}(\varphi) M_{\mathcal{B}}(f)[\underline{w}]_{\mathcal{B}} = [\underline{v}]_{\mathcal{B}}^* M_{\mathcal{B}}(f)^* M_{\mathcal{B}}(f)[\underline{w}]_{\mathcal{B}}$. Allora, come visto nel corollario precedente, si ricava che $M_{\mathcal{B}}(f)^* M_{\mathcal{B}}(f) = I_n$. Dal momento che gli inversi sinistri sono anche inversi destri, $M_{\mathcal{B}}(f)^* M_{\mathcal{B}}(f) = M_{\mathcal{B}}(f) M_{\mathcal{B}}(f)^* = I_n$.

Se invece $M_{\mathcal{B}}(f)^* M_{\mathcal{B}}(f) = M_{\mathcal{B}}(f) M_{\mathcal{B}}(f)^* = I_n$, $\varphi(\underline{v}, \underline{w}) = [\underline{v}]_{\mathcal{B}}^* [\underline{w}]_{\mathcal{B}} = [\underline{v}]_{\mathcal{B}}^* M_{\mathcal{B}}(f)^* M_{\mathcal{B}}(f)[\underline{w}]_{\mathcal{B}} = (M_{\mathcal{B}}(f)[\underline{v}]_{\mathcal{B}})^* (M_{\mathcal{B}}(f)[\underline{w}]_{\mathcal{B}}) = (M_{\mathcal{B}}(f)[\underline{v}]_{\mathcal{B}})^* M_{\mathcal{B}}(\varphi)(M_{\mathcal{B}}(f)[\underline{w}]_{\mathcal{B}}) = \varphi(f(\underline{v}), f(\underline{w}))$, e quindi f è unitario. □

Osservazione. Se $\mathcal{B}$ è una base ortonormale di (V, φ), ricordando che $M_{\mathcal{B}}(f^\top) = M_{\mathcal{B}}(f)^\top$ e che $M_{\mathcal{B}}(f^*) = M_{\mathcal{B}}(f)^*$, sono equivalenti allora i seguenti fatti:

- $f \circ f^\top = f^\top \circ f = \mathrm{Id}_V \iff M_{\mathcal{B}}(f)$ è ortogonale $\iff f$ è ortogonale,
- $f \circ f^* = f^* \circ f = \mathrm{Id}_V \iff M_{\mathcal{B}}(f)$ è unitaria $\iff f$ è unitario (se V è uno spazio vettoriale su $\mathbb{C}$).

Proposizione 3.9. Sia $V = \mathbb{R}^n$ uno spazio vettoriale col prodotto scalare standard φ. Allora sono equivalenti i seguenti fatti:

(i) $A \in O_n$,

(ii) f_A è un operatore ortogonale,

(iii) le colonne e le righe di A formano una base ortonormale di V.

Dimostrazione. Sia $\mathcal{B}$ la base canonica di V. Allora $M_{\mathcal{B}}(f_A) = A$, e quindi, per una proposizione precedente, f_A è un operatore ortogonale. Viceversa si deduce che se f_A è un operatore ortogonale, $A \in O_n$. Dunque è sufficiente dimostrare che $A \in O_n \iff$ le colonne e le righe di A formano una base ortonormale di V.

($\Longrightarrow$) Se $A \in O_n$, in particolare $A \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$, e quindi A è invertibile. Allora le sue colonne e le sue righe formano già una base di V, essendo n vettori di V linearmente indipendenti. Inoltre, poiché $A \in O_n$, $\varphi(\underline{e_i}, \underline{e_j}) = \varphi(A\underline{e_i}, A\underline{e_j})$, e quindi le colonne di A si mantengono a due a due ortogonali tra di loro, mentre $\varphi(A\underline{e_i}, A\underline{e_i}) = \varphi(\underline{e_i}, \underline{e_i}) = 1$. Pertanto le colonne di A formano una base ortonormale di V.

Si osserva che anche $A^\top \in O_n$. Allora le righe di A, che non sono altro che le colonne di $A^\top$, formano anch'esse una base ortonormale di V.

($\Longleftarrow$) Nel moltiplicare $A^\top$ con A altro non si sta facendo che calcolare il prodotto scalare φ tra ogni riga di $A^\top$ e ogni colonna di A , ossia $(A^*A)_{ij} = \varphi((A^\top)_i, A^j) = \varphi(A^i, A^j) = \delta_{ij}$. Quindi $A^\top A = AA^\top = I_n$, da cui si deduce che $A \in O_n$. $\square$

Proposizione 3.10. Sia $V = \mathbb{C}^n$ uno spazio vettoriale col prodotto hermitiano standard φ. Allora sono equivalenti i seguenti fatti:

(i) $A \in U_n$,

(ii) f_A è un operatore unitario,

(iii) le colonne e le righe di A formano una base ortonormale di V.

Dimostrazione. Sia $\mathcal{B}$ la base canonica di V. Allora $M_{\mathcal{B}}(f_A) = A$, e quindi, per una proposizione precedente, f_A è un operatore unitario. Viceversa si deduce che se f_A è un operatore unitario, $A \in U_n$. Dunque è sufficiente dimostrare che $A \in U_n \iff$ le colonne e le righe di A formano una base ortonormale di V.

($\Longrightarrow$) Se $A \in U_n$, in particolare $A \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$, e quindi A è invertibile. Allora le sue colonne e le sue righe formano già una base di V, essendo n vettori di V linearmente indipendenti. Inoltre, poiché $A \in U_n$, $\varphi(\underline{e_i}, \underline{e_j}) = \varphi(A\underline{e_i}, A\underline{e_j})$, e quindi le colonne di A si mantengono a due a due ortogonali tra di loro, mentre $\varphi(A\underline{e_i}, A\underline{e_i}) = \varphi(\underline{e_i}, \underline{e_i}) = 1$. Pertanto le colonne di A formano una base ortonormale di V.

Si osserva che anche $A^\top \in U_n$. Allora le righe di A, che non sono altro che le colonne di $A^\top$, formano anch'esse una base ortonormale di V.

($\Longleftarrow$) Nel moltiplicare A^* con A altro non si sta facendo che calcolare il prodotto hermitiano φ tra ogni riga coniugata di A^* e ogni colonna di A, ossia $(A^*A)_{ij} = \varphi((A^\top)_i, A^j) = \varphi(A^i, A^j) = \delta_{ij}$. Quindi $A^*A = AA^* = I_n$, da cui si deduce che $A \in U_n$. □

Proposizione 3.11. Sia (V, φ) uno spazio euclideo reale. Allora valgono i seguenti tre risultati:

(i) $(V_\mathbb{C}, \varphi_\mathbb{C})$ è uno spazio euclideo complesso.

(ii) Se $f \in \mathrm{End}(V)$ è simmetrico, allora $f_\mathbb{C} \in \mathrm{End}(V)$ è hermitiano.

(iii) Se $f \in \mathrm{End}(V)$ è ortogonale, allora $f_\mathbb{C} \in \mathrm{End}(V)$ è unitario.

Dimostrazione. Dacché φ è il prodotto scalare standard dello spazio euclideo reale V, esiste una base ortnormale di V. Sia allora $\mathcal{B}$ una base ortonormale di V. Si dimostrano i tre risultati separatamente.

- È sufficiente dimostrare che $\varphi_\mathbb{C}$ altro non è che il prodotto hermitiano standard. Come si è già osservato precedentemente, $M_\mathcal{B}(\varphi_\mathbb{C}) = M_\mathcal{B}(\varphi)$, e quindi, dacché $M_\mathcal{B}(\varphi) = I_n$, essendo $\mathcal{B}$ ortonormale, vale anche che $M_\mathcal{B}(\varphi_\mathbb{C}) = I_n$, ossia $\varphi_\mathbb{C}$ è proprio il prodotto hermitiano standard.

- Poiché f è simmetrico, $M_\mathcal{B}(f) = M_\mathcal{B}(f)^\top$, e quindi anche $M_\mathcal{B}(f_\mathbb{C}) = M_\mathcal{B}(f_\mathbb{C})^\top$. Dal momento che $M_\mathcal{B}(f) \in M(n, \mathbb{R})$, $M_\mathcal{B}(f) = \overline{M_\mathcal{B}(f)} \implies M_\mathcal{B}(f_\mathbb{C})^\top = M_\mathcal{B}(f_\mathbb{C})^*$. Quindi $M_\mathcal{B}(f_\mathbb{C}) = M_\mathcal{B}(f_\mathbb{C})^*$, ossia $M_\mathcal{B}(f_\mathbb{C})$ è hermitiana, e pertanto anche $f_\mathbb{C}$ è hermitiano.

- Poiché f è ortogonale, $M_\mathcal{B}(f)M_\mathcal{B}(f)^\top = I_n$, e quindi anche $M_\mathcal{B}(f_\mathbb{C})M_\mathcal{B}(f_\mathbb{C})^\top = I_n$. Allora, come prima, si deduce che $M_\mathcal{B}(f_\mathbb{C})^\top = M_\mathcal{B}(f_\mathbb{C})^*$, essendo $M_\mathcal{B}(f_\mathbb{C}) = M_\mathcal{B}(f) \in M(n, \mathbb{R})$, da cui si ricava che $M_\mathcal{B}(f_\mathbb{C})M_\mathcal{B}(f_\mathbb{C})^* = M_\mathcal{B}(f_\mathbb{C})M_\mathcal{B}(f_\mathbb{C})^\top = I_n$, ossia che $f_\mathbb{C}$ è unitario.

□

Esercizio 1. Sia (V, φ) uno spazio euclideo reale. Allora valgono i seguenti risultati:

- Se f, $g \in \mathrm{End}(V)$ commutano, allora anche $f_\mathbb{C}$, $g_\mathbb{C} \in \mathrm{End}(V_\mathbb{C})$ commutano.
- Se $f \in \mathrm{End}(V)$, $(f^\top)_\mathbb{C} = (f_\mathbb{C})^*$.
- Se $f \in \mathrm{End}(V)$, f diagonalizzabile $\iff$ $f^\top$ diagonalizzabile.

Soluzione. Dacché φ è il prodotto scalare standard dello spazio euclideo reale V, esiste una base ortonormale $\mathcal{B} = \{\underline{v_1}, \ldots, \underline{v_n}\}$ di V. Si dimostrano allora separatamente i tre risultati.

- Si osserva che $M_\mathcal{B}(f_\mathbb{C})M_\mathcal{B}(g_\mathbb{C}) = M_\mathcal{B}(f)M_\mathcal{B}(g) = M_\mathcal{B}(g)M_\mathcal{B}(f) = M_\mathcal{B}(g_\mathbb{C})M_\mathcal{B}(f_\mathbb{C})$, e quindi che $f_\mathbb{C} \circ g_\mathbb{C} = g_\mathbb{C} \circ f_\mathbb{C}$.

- Si osserva che $M_\mathcal{B}(f) \in M(n, \mathbb{R}) \implies M_\mathcal{B}(f)^\top = M_\mathcal{B}(f)^*$, e quindi che $M_\mathcal{B}((f^\top)_\mathbb{C}) = M_\mathcal{B}(f^\top) = M_\mathcal{B}(f)^\top = M_\mathcal{B}(f)^* = M_\mathcal{B}(f_\mathbb{C})^* = M_\mathcal{B}((f_\mathbb{C})^*)$. Allora $(f^\top)_\mathbb{C} = (f_\mathbb{C})^*$.
- Poiché $\mathcal{B}$ è ortonormale, $M_\mathcal{B}(f^\top) = M_\mathcal{B}(f)^\top$. Allora, se f è diagonalizzabile, anche $M_\mathcal{B}(f)$ lo è, e quindi $\exists\, P \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{K})$, $D \in M(n, \mathbb{K})$ diagonale tale che $M_\mathcal{B}(f) = PDP^{-1}$. Allora $M_\mathcal{B}(f^\top) = M_\mathcal{B}(f)^\top = (P^\top)^{-1} D^\top P^\top$ è simile ad una matrice diagonale, e pertanto $M_\mathcal{B}(f^\top)$ è diagonalizzabile. Allora anche $f^\top$ è diagonalizzabile. Vale anche il viceversa considerando l'identità $f = (f^\top)^\top$ e l'implicazione appena dimostrata.

Nota. D'ora in poi, qualora non specificato diversamente, si assumerà che V sia uno spazio euclideo, reale o complesso.

Definizione. (norma euclidea) Sia (V, φ) un qualunque spazio euclideo. Si definisce **norma** la mappa $\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}^+$ tale che $\|\underline{v}\| = \sqrt{\varphi(\underline{v}, \underline{v})}$.

Definizione. (distanza euclidea tra due vettori) Sia (V, φ) un qualunque spazio euclideo. Si definisce **distanza** la mappa $d : V \times V \to \mathbb{R}^+$ tale che $d(\underline{v}, \underline{w}) = \|\underline{v} - \underline{w}\|$.

Osservazione.
► Si osserva che in effetti $\varphi(\underline{v}, \underline{v}) \in \mathbb{R}^+ \ \forall\, \underline{v} \in V$. Infatti, sia per il caso reale che per il caso complesso, φ è definito positivo.
► Vale che $\|\underline{v}\| = 0 \iff \underline{v} = \underline{0}$. Infatti, se $\underline{v} = \underline{0}$, chiaramente $\varphi(\underline{v}, \underline{v}) = 0 \implies \|\underline{v}\| = 0$; se invece $\|\underline{v}\| = 0$, $\varphi(\underline{v}, \underline{v}) = 0$, e quindi $\underline{v} = \underline{0}$, dacché $V^\perp = \{\underline{0}\}$, essendo φ definito positivo.
► Inoltre, vale chiaramente che $\|\alpha \underline{v}\| = |\alpha|\, \|\underline{v}\|$.
► Se f è un operatore ortogonale (o unitario), allora f mantiene sia le norme che le distanze tra vettori. Infatti $\|\underline{v} - \underline{w}\|^2 = \varphi(\underline{v} - \underline{w}, \underline{v} - \underline{w}) = \varphi(f(\underline{v} - \underline{w}), f(\underline{v} - \underline{w})) = \varphi(f(\underline{v}) - f(\underline{w}), f(\underline{v}) - f(\underline{w})) = \|f(\underline{v}) - f(\underline{w})\|^2$, da cui segue che $\|\underline{v} - \underline{w}\| = \|f(\underline{v}) - f(\underline{w})\|$.

Proposizione 3.12 (disuguaglianza di Cauchy-Schwarz)**.** Vale che $\|\underline{v}\|\, \|\underline{w}\| \geq |\varphi(\underline{v}, \underline{w})|$, $\forall\, \underline{v}, \underline{w} \in V$, dove l'uguaglianza è raggiunta soltanto se $\underline{v}$ e $\underline{w}$ sono linearmente dipendenti.

Dimostrazione. Si consideri innanzitutto il caso $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, e quindi il caso in cui φ è il prodotto scalare standard. Siano $\underline{v}, \underline{w} \in V$. Si consideri la disuguaglianza $\|\underline{v} + t\underline{w}\|^2 \geq 0$, valida per ogni elemento di V. Allora $\|\underline{v} + t\underline{w}\|^2 = \|\underline{v}\|^2 + 2\varphi(\underline{v}, \underline{w})t + \|\underline{w}\|^2 t^2 \geq 0$. L'ultima disuguaglianza è possibile se e solo se $\frac{\Delta}{4} \leq 0$, e quindi se e solo se $\varphi(\underline{v}, \underline{w})^2 - \|\underline{v}\|^2 \|\underline{w}\|^2 \leq 0 \iff \|\underline{v}\|\, \|\underline{w}\| \geq \varphi(\underline{v}, \underline{w})$. Vale in particolare l'equivalenza se e solo se $\|\underline{v} + t\underline{w}\| = 0$, ossia se $\underline{v} + t\underline{w} = \underline{0}$, da cui la tesi.

Si consideri ora il caso $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, e dunque il caso in cui φ è il prodotto hermitiano standard. Siano $\underline{v}, \underline{w} \in V$, e siano $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. Si consideri allora la disuguaglianza $\|\alpha\underline{v} + \beta\underline{w}\|^2 \geq 0$, valida per ogni elemento di V. Allora $\|\alpha\underline{v} + \beta\underline{w}\|^2 = \|\alpha\underline{v}\|^2 + \varphi(\alpha\underline{v}, \beta\underline{w}) + \varphi(\beta\underline{w}, \alpha\underline{v}) +$

$\|\beta\underline{w}\|^2 = |\alpha|^2 \|\underline{v}\|^2 + \overline{\alpha}\beta\, \varphi(\underline{v}, \underline{w}) + \alpha\overline{\beta}\, \varphi(\underline{w}, \underline{v}) + |\beta|^2 \|\underline{w}\|^2 \geq 0$. Ponendo allora $\alpha = \|\underline{w}\|^2$ e $\beta = -\varphi(\underline{w}, \underline{v}) = -\overline{\varphi(\underline{v}, \underline{w})}$, si deduce che:

$$\|\underline{v}\|^2 \|\underline{w}\|^4 - \|\underline{w}\|^2 |\varphi(\underline{v}, \underline{w})| \geq 0.$$

Se $\underline{w} = \underline{0}$, la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz è già dimostrata. Altrimenti, è sufficiente dividere per $\|\underline{w}\|^2$ (dal momento che $\underline{w} \neq \underline{0} \iff \|\underline{w}\| \neq 0$) per ottenere la tesi. Come prima, is osserva che l'uguaglianza si ottiene se e solo se $\underline{v}$ e $\underline{w}$ sono linearmente dipendenti. $\square$

Proposizione 3.13 (disuguaglianza triangolare)**.** $\|\underline{v} + \underline{w}\| \leq \|\underline{v}\| + \|\underline{w}\|$.

Dimostrazione. Si osserva che $\|\underline{v} + \underline{w}\|^2 = \|\underline{v}\|^2 + \varphi(\underline{v}, \underline{w}) + \varphi(\underline{w}, \underline{v}) + \|\underline{w}\|^2$. Se φ è il prodotto scalare standard, si ricava che:

$$\|\underline{v} + \underline{w}\|^2 = \|\underline{v}\|^2 + 2\varphi(\underline{v}, \underline{w}) + \|\underline{w}\|^2 \leq \|\underline{v}\|^2 + 2\,\|\underline{v}\|\,\|\underline{w}\| + \|\underline{w}\|^2 = (\|\underline{v}\| + \|\underline{w}\|)^2,$$

dove si è utilizzata la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz. Da quest'ultima disuguaglianza si ricava, prendendo la radice quadrata, la disuguaglianza desiderata.

Se invece φ è il prodotto hermitiano standard, $\|\underline{v} + \underline{w}\|^2 = \|\underline{v}\|^2 + 2\,\Re(\varphi(\underline{v}, \underline{w})) + \|\underline{w}\|^2 \leq \|\underline{v}\|^2 + 2\,|\varphi(\underline{v}, \underline{w})| + \|\underline{w}\|^2$. Allora, riapplicando la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz, si ottiene che:

$$\|\underline{v} + \underline{w}\|^2 \leq (\|\underline{v}\| + \|\underline{w}\|)^2,$$

da cui, come prima, si ottiene la disuguaglianza desiderata. $\square$

Osservazione. Utilizzando il concetto di norma euclidea, si possono ricavare due teoremi fondamentali della geometria, e già noti dalla geometria euclidea.

- ► Se $\underline{v} \perp \underline{w}$, allora $\|\underline{v} + \underline{w}\|^2 = \|\underline{v}\|^2 + \overbrace{(\varphi(\underline{v}, \underline{w}) + \varphi(\underline{w}, \underline{v}))}^{=0} + \|\underline{w}\|^2 = \|\underline{v}\|^2 + \|\underline{w}\|^2$ (teorema di Pitagora),
- ► Se $\|\underline{v}\| = \|\underline{w}\|$ e φ è un prodotto scalare, allora $\varphi(\underline{v} + \underline{w}, \underline{v} - \underline{w}) = \|\underline{v}\|^2 - \varphi(\underline{v}, \underline{w}) + \varphi(\underline{w}, \underline{v}) - \|\underline{w}\|^2 = \|\underline{v}\|^2 - \|\underline{w}\|^2 = 0$, e quindi $\underline{v} + \underline{w} \perp \underline{v} - \underline{w}$ (le diagonali di un rombo sono ortogonali tra loro).

Osservazione. Sia $\mathcal{B} = \{\underline{v_1}, \ldots, \underline{v_n}\}$ è una base ortogonale di V per φ.

- ► Se $\underline{v} = a_1\underline{v_1} + \ldots + a_n\underline{v_n}$, con a_1, ..., $a_n \in \mathbb{K}$, si osserva che $\varphi(\underline{v}, \underline{v_i}) = a_i\varphi(\underline{v_i}, \underline{v_i})$. Quindi $\underline{v} = \sum_{i=1}^n \frac{\varphi(\underline{v}, \underline{v_i})}{\varphi(\underline{v_i}, \underline{v_i})}\, \underline{v_i}$. In particolare, $\frac{\varphi(\underline{v}, \underline{v_i})}{\varphi(\underline{v_i}, \underline{v_i})}$ è detto **coefficiente di Fourier** di $\underline{v}$ rispetto a $\underline{v_i}$, e si indica con $C(\underline{v}, \underline{v_i})$. Se $\mathcal{B}$ è ortonormale, $\underline{v} = \sum_{i=1}^n \varphi(\underline{v}, \underline{v_i})\, \underline{v_i}$.
- ► Quindi $\|\underline{v}\|^2 = \varphi(\underline{v}, \underline{v}) = \sum_{i=1}^n \frac{\varphi(\underline{v}, \underline{v_i})^2}{\varphi(\underline{v_i}, \underline{v_i})}$. In particolare, se $\mathcal{B}$ è ortonormale, $\|\underline{v}\|^2 = \sum_{i=1}^n \varphi(\underline{v}, \underline{v_i})^2$. In tal caso, si può esprimere la disuguaglianza di Bessel: $\|\underline{v}\|^2 \geq \sum_{i=1}^k \varphi(\underline{v}, \underline{v_i})^2$ per $k \leq n$.

Osservazione. (algoritmo di ortogonalizzazione di Gram-Schmidt) Se φ è non degenere (o in generale, se $\mathrm{CI}(\varphi) = \{\underline{0}\}$) ed è data una base $\mathcal{B} = \{\underline{v_1}, \ldots, \underline{v_n}\}$ per V (dove si ricorda che deve valere $\operatorname{char} \mathbb{K} \neq 2$), è possibile applicare l'**algoritmo di ortogonalizzazione di Gram-Schmidt** per ottenere da $\mathcal{B}$ una nuova base $\mathcal{B}' = \{\underline{v_1}', \ldots, \underline{v_n}'\}$ con le seguenti proprietà:

(i) $\mathcal{B}'$ è una base ortogonale,

(ii) $\mathcal{B}'$ mantiene la stessa bandiera di $\mathcal{B}$ (ossia $\operatorname{Span}(\underline{v_1}, \ldots, \underline{v_i}) = \operatorname{Span}(\underline{v_1}', \ldots, \underline{v_i}')$ per ogni $1 \leq i \leq n$).

L'algoritmo si applica nel seguente modo: si prenda in considerazione $\underline{v_1}$ e sottragga ad ogni altro vettore della base il vettore $C(\underline{v_1}, \underline{v_i})\underline{v_1} = \frac{\varphi(\underline{v_1}, \underline{v_i})}{\varphi(\underline{v_1}, \underline{v_1})}\underline{v_1}$, rendendo ortogonale ogni altro vettore della base con $\underline{v_1}$. Pertanto si applica la mappa $\underline{v_i} \mapsto \underline{v_i} - \frac{\varphi(\underline{v_1}, \underline{v_i})}{\varphi(\underline{v_1}, \underline{v_1})}\underline{v_i} = \underline{v_i}^{(1)}$. Si verifica infatti che $\underline{v_1}$ e $\underline{v_i}^{(1)}$ sono ortogonali per $2 \leq i \leq n$:

$$\varphi(\underline{v_1}, \underline{v_i}^{(1)}) = \varphi(\underline{v_1}, \underline{v_i}) - \varphi\left(\underline{v_1}, \frac{\varphi(\underline{v_1}, \underline{v_i})}{\varphi(\underline{v_1}, \underline{v_1})}\underline{v_i}\right) = \varphi(\underline{v_1}, \underline{v_i}) - \varphi(\underline{v_1}, \underline{v_i}) = 0.$$

Poiché $\underline{v_1}$ non è isotropo, si deduce la decomposizione $V = \operatorname{Span}(\underline{v_1}) \oplus \operatorname{Span}(\underline{v_1})^\perp$. In particolare $\dim \operatorname{Span}(\underline{v_1})^\perp = n - 1$: essendo allora i vettori $\underline{v_2}^{(1)}, \ldots, \underline{v_n}^{(1)}$ linearmente indipendenti e appartenenti a $\operatorname{Span}(\underline{v_1})^\perp$, ne sono una base. Si conclude quindi che vale la seguente decomposizione:

$$V = \operatorname{Span}(\underline{v_1}) \oplus^\perp \operatorname{Span}(\underline{v_2}^{(1)}, \ldots, \underline{v_n}^{(1)}).$$

Si riapplica dunque l'algoritmo di Gram-Schmidt prendendo come spazio vettoriale lo spazio generato dai vettori a cui si è applicato precedentemente l'algoritmo, ossia $V' = \operatorname{Span}(\underline{v_2}^{(1)}, \ldots, \underline{v_n}^{(1)})$, fino a che non si ottiene $V' = \{\underline{0}\}$.

Si può addirittura ottenere una base ortonormale a partire da $\mathcal{B}'$ normalizzando ogni vettore (ossia dividendo per la propria norma), se si sta considerando uno spazio euclideo.

Osservazione. Poiché la base ottenuta tramite Gram-Schmidt mantiene la stessa bandiera della base di partenza, ogni matrice triangolabile è anche triangolabile mediante una base ortogonale.

Esempio. Si consideri $V = (\mathbb{R}^3, \langle \cdot, \cdot \rangle)$, ossia $\mathbb{R}^3$ dotato del prodotto scalare standard. Si applica l'algoritmo di ortogonalizzazione di Gram-Schmidt sulla seguente base:

$$\mathcal{B} = \left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\underline{v_1} = \underline{e_1}}, \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\underline{v_2}}, \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\underline{v_3}} \right\}.$$

Alla prima iterazione dell'algoritmo si ottengono i seguenti vettori:

- $\underline{v_2}^{(1)} = \underline{v_2} - \frac{\varphi(\underline{v_1},\underline{v_2})}{\varphi(\underline{v_1},\underline{v_1})}\underline{v_1} = \underline{v_2} - \underline{v_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \underline{e_2}$,

- $\underline{v_3}^{(1)} = \underline{v_3} - \frac{\varphi(\underline{v_1},\underline{v_3})}{\varphi(\underline{v_1},\underline{v_1})}\underline{v_1} = \underline{v_3} - \underline{v_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Si considera ora $V' = \mathrm{Span}(\underline{v_2}^{(1)}, \underline{v_3}^{(1)})$. Alla seconda iterazione dell'algoritmo si ottiene allora il seguente vettore:

- $\underline{v_3}^{(2)} = \underline{v_3}^{(1)} - \frac{\varphi(\underline{v_2}^{(1)},\underline{v_3}^{(1)})}{\varphi(\underline{v_2}^{(1)},\underline{v_2}^{(1)})}\underline{v_2}^{(1)} = \underline{v_3}^{(1)} - \underline{v_2}^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \underline{e_3}$.

Quindi la base ottenuta è $\mathcal{B}' = \{\underline{e_1}, \underline{e_2}, \underline{e_3}\}$, ossia la base canonica di $\mathbb{R}^3$, già ortonormale.

Osservazione. Si osserva adesso che se (V, φ) è uno spazio euclideo (e quindi $\varphi > 0$), e W è un sottospazio di V, vale la seguente decomposizione:

$$V = W \oplus^{\perp} W^{\perp}.$$

Pertanto ogni vettore $\underline{v} \in V$ può scriversi come $\underline{w} + \underline{w}'$ dove $\underline{w} \in W$ e $\underline{w}' \in W^{\perp}$, dove $\varphi(\underline{w}, \underline{w}') = 0$.

Definizione. (proiezione ortogonale) Si definisce l'applicazione $\mathrm{pr}_W : V \to V$, detta **proiezione ortogonale** su W, in modo tale che $\mathrm{pr}_W(\underline{v}) = \underline{w}$, dove $\underline{v} = \underline{w} + \underline{w}'$, con $\underline{w} \in W$ e $\underline{w}' \in W^{\perp}$.

Osservazione.
▶ Dacché la proiezione ortogonale è un caso particolare della classica applicazione lineare di proiezione su un sottospazio di una somma diretta, pr_W è un'applicazione lineare.
▶ Vale chiaramente che $\mathrm{pr}_W^2 = \mathrm{pr}_W$, da cui si ricava, se $W^{\perp} \neq \{\underline{0}\}$, che $\varphi_{\mathrm{pr}_W}(\lambda) = \lambda(\lambda - 1)$, ossia che $\mathrm{sp}(\mathrm{pr}_W) = \{0, 1\}$. Infatti $\mathrm{pr}_W(\underline{v})$ appartiene già a W, ed essendo la scrittura in somma di due elementi, uno di W e uno di W', unica, $\mathrm{pr}_W(\mathrm{pr}_W(\underline{v})) = \mathrm{pr}_W(\underline{v})$, da cui l'identità $\mathrm{pr}_W^2 = \mathrm{pr}_W$.
▶ Seguendo il ragionamento di prima, vale anche che $\mathrm{pr}_W|_W = \mathrm{Id}_W$ e che $\mathrm{pr}_W|_{W^{\perp}} = 0$.
▶ Inoltre, vale la seguente riscrittura di $\underline{v} \in V$: $\underline{v} = \mathrm{pr}_W(\underline{v}) + \mathrm{pr}_{W^{\perp}}(\underline{v})$.
▶ Se $\mathcal{B} = \{\underline{v_1}, \ldots, \underline{v_n}\}$ è una base ortogonale di W, allora $\mathrm{pr}_W(\underline{v}) = \sum_{i=1}^n \frac{\varphi(\underline{v},\underline{v_i})}{\varphi(\underline{v_i},\underline{v_i})}\underline{v_i} = \sum_{i=1}^n C(\underline{v}, \underline{v_i})\underline{v_i}$. Infatti $\underline{v} - \sum_{i=1}^n C(\underline{v}, \underline{v_i})\underline{v_i} \in W^{\perp}$.
▶ pr_W è un operatore simmetrico (o hermitiano se lo spazio è complesso). Infatti $\varphi(\mathrm{pr}_W(\underline{v}), \underline{w}) = \varphi(\mathrm{pr}_W(\underline{v}), \mathrm{pr}_W(\underline{w}) + \mathrm{pr}_{W^{\perp}}(\underline{w})) = \varphi(\mathrm{pr}_W(\underline{v}), \mathrm{pr}_W(\underline{w})) = \varphi(\mathrm{pr}_W(\underline{v}) + \mathrm{pr}_{W^{\perp}}(\underline{v}), \mathrm{pr}_W(\underline{w})) = \varphi(\underline{v}, \mathrm{pr}_W(\underline{w}))$.

Proposizione 3.14. Sia (V, φ) uno spazio euclideo. Allora valgono i seguenti risultati:

(i) Siano U, $W \subseteq V$ sono sottospazi di V, allora $U \perp W$, ossia[3] $U \subseteq W^\perp$, $\iff$ $\mathrm{pr}_U \circ \mathrm{pr}_W = \mathrm{pr}_W \circ \mathrm{pr}_U = 0$.

(ii) Sia $V = W_1 \oplus \cdots \oplus W_n$. Allora $\underline{v} = \sum_{i=1}^n \mathrm{pr}_{W_i}(\underline{v}) \iff W_i \perp W_j \; \forall i \neq j$, $1 \leq i, j \leq n$.

Dimostrazione. Si dimostrano i due risultati separatamente.

(i) Sia $\underline{v} \in V$. Allora $\mathrm{pr}_W(\underline{v}) \in W = W^{\perp\perp} \subseteq U^\perp$. Pertanto $\mathrm{pr}_U(\mathrm{pr}_W(\underline{v})) = \underline{0}$. Analogamente $\mathrm{pr}_W(\mathrm{pr}_U(\underline{v})) = \underline{0}$, da cui la tesi.

(ii) Sia vero che $\underline{v} = \sum_{i=1}^n \mathrm{pr}_{W_i}(\underline{v}) \; \forall \underline{v} \in V$. Sia $\underline{w} \in W_j$. Allora $\underline{w} = \sum_{i=1}^n \mathrm{pr}_{W_i}(\underline{w}) = \underline{w} + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}} \mathrm{pr}_{W_i}(\underline{w}) \implies \mathrm{pr}_{W_i}(\underline{w}) = \underline{0} \; \forall i \neq j$. Quindi $\underline{w} \in W_i^\perp \; \forall i \neq j$, e si conclude che $W_i \subseteq W_j^\perp \implies W_i \perp W_j$. Se invece $W_i \perp W_j \; \forall i \neq j$, sia $\mathcal{B}_i = \left\{ \underline{w}_i^{(1)}, \ldots, \underline{w}_i^{(k_i)} \right\}$ una base ortogonale di W_i. Allora $\mathcal{B} = \cup_{i=1}^n \mathcal{B}_i$ è anch'essa una base ortogonale di V, essendo $\varphi\left(\underline{w}_i^{(t_i)}, \underline{w}_j^{(t_j)}\right) = 0$ per ipotesi. Pertanto $\underline{v} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{k_i} C\left(\underline{v}, \underline{w}_i^{(j)}\right) \underline{w}_i^{(j)} = \sum_{i=1}^n \mathrm{pr}_{W_i}(\underline{v})$, da cui la tesi. □

Definizione. (inversione ortogonale) Si definisce l'applicazione $\rho_W : V \to V$, detta **inversione ortogonale**, in modo tale che, detto $\underline{v} = \underline{w} + \underline{w}' \in V$ con $\underline{w} \in W$, $\underline{w} \in W^\perp$, $\rho_W(\underline{v}) = \underline{w} - \underline{w}'$. Se $\dim W = \dim V - 1$, si dice che ρ_W è una **riflessione**.

Osservazione.
► Si osserva che ρ_W è un'applicazione lineare.
► Vale l'identità $\rho_W^2 = \mathrm{Id}_V$, da cui si ricava che $\varphi_{\rho_W}(\lambda) \mid (\lambda - 1)(\lambda + 1)$. In particolare, se $W^\perp \neq \{\underline{0}\}$, vale proprio che $\mathrm{sp}(\rho_W) = \{\pm 1\}$, dove $V_1 = W$ e $V_{-1} = W^\perp$.
► ρ_W è ortogonale (o unitaria, se V è uno spazio euclideo complesso). Infatti se $\underline{v_1} = \underline{w_1} + \underline{w_1}'$ e $\underline{v_2} = \underline{w_2} + \underline{w_2}'$, con $\underline{w_1}$, $\underline{w_2} \in W$ e $\underline{w_1}'$, $\underline{w_2}' \in W$, $\varphi(\rho_W(\underline{v_1}), \rho_W(\underline{v_2})) = \varphi(\underline{w_1} - \underline{w_1}', \underline{w_2} - \underline{w_2}') = \varphi(\underline{w_1}, \underline{w_2}) \underbrace{-\varphi(\underline{w_1}', \underline{w_2}) - \varphi(\underline{w_1}, \underline{w_2}')}_{=0} + \varphi(\underline{w_1}', \underline{w_2}') = \varphi(\underline{w_1} - \underline{w_1}', \underline{w_2} - \underline{w_2}')$.

Quindi $\varphi(\rho_W(\underline{v_1}), \rho_W(\underline{v_2})) = \varphi(\underline{w_1}, \underline{w_2}) + \varphi(\underline{w_1}', \underline{w_2}) + \varphi(\underline{w_1}, \underline{w_2}') + \varphi(\underline{w_1}', \underline{w_2}') = \varphi(\underline{v_1}, \underline{v_2})$.

Lemma 3.1. Sia (V, φ) uno spazio euclideo reale. Siano $\underline{u}$, $\underline{w} \in V$. Se $\|\underline{u}\| = \|\underline{w}\|$, allora esiste un sottospazio W di dimensione $n - 1$ per cui la riflessione ρ_W relativa a φ è tale che $\rho_W(\underline{u}) = \underline{w}$.

Dimostrazione. Se $\underline{v}$ e $\underline{w}$ sono linearmente dipendenti, dal momento che $\|v\| = \|w\|$, deve valere anche che $\underline{v} = \underline{w}$. Sia $\underline{u} \neq \underline{0}$, $\underline{u} \in \mathrm{Span}(\underline{v})^\perp$. Si consideri $U = \mathrm{Span}(\underline{u})$: si osserva

[3] È sufficiente che valga $U \subseteq W^\perp$ affinché valga anche $W \subseteq U^\perp$. Infatti $U \subseteq W^\perp \implies W = W^{\perp\perp} \subseteq U^\perp$. Si osserva che in generale vale che $W \subseteq W^{\perp\perp}$, dove vale l'uguaglianza nel caso di un prodotto φ non degenere, com'è nel caso di uno spazio euclideo, essendo $\varphi > 0$ per ipotesi.

che $\dim U = 1$ e che, essendo φ non degenere, $\dim U^\perp = n-1$. Posto allora $W = U^\perp$, si ricava, sempre perché φ è non degenere, che $U = U^{\perp\perp} = W^\perp$. Si conclude pertanto che $\rho_W(\underline{v}) = \underline{v} = \underline{w}$.

Siano adesso $\underline{v}$ e $\underline{w}$ linearmente indipendenti e sia $U = \mathrm{Span}(\underline{v} - \underline{w})$. Dal momento che $\dim U = 1$ e φ è non degenere, $\dim U^\perp = n-1$. Sia allora $W = U^\perp$. Allora, come prima, $U = U^{\perp\perp} = W^\perp$. Si consideri dunque la riflessione ρ_W: dacché $\underline{v} = \frac{v+w}{2} + \frac{v-w}{2}$, e $\varphi(\frac{v+w}{2}, \frac{v-w}{2}) = \frac{\|v\|-\|w\|}{4} = 0$, $\underline{v}$ è già decomposto in un elemento di W e in uno di $W^\perp$, per cui si conclude che $\rho_W(\underline{v}) = \frac{v+w}{2} - \frac{v-w}{2} = \underline{w}$, ottenendo la tesi.

□

Teorema 3.3 (di Cartan–Dieudonné)**.** Sia (V, φ) uno spazio euclideo reale. Ogni isometria di V è allora prodotto di al più n riflessioni.

Dimostrazione. Si dimostra la tesi applicando il principio di induzione sulla dimensione n di V.

(*passo base*) Sia $n = 1$ e sia inoltre f un'isometria di V. Sia $\underline{v_1}$ l'unico elemento di una base ortonormale $\mathcal{B}$ di V. Allora $\left\|f(\underline{v_1})\right\| = \left\|\underline{v_1}\right\| = 1$, da cui si ricava che[4] $f(\underline{v_1}) = \pm\underline{v_1}$, ossia che $f = \pm\,\mathrm{Id}_V$. Se $f = \mathrm{Id}_V$, f è un prodotto vuoto, e già verifica la tesi; altrimenti $f = \rho_{\{\underline{0}\}}$, dove si considera $V = V \oplus^\perp \{\underline{0}\}$. Pertanto f è prodotto di al più una riflessione.

(*passo induttivo*) Sia $\mathcal{B} = \{\underline{v_1}, \ldots, \underline{v_n}\}$ una base di V. Sia f un'isometria di V. Si assuma inizialmente l'esistenza di $\underline{v_i}$ tale per cui $f(\underline{v_i}) = \underline{v_i}$. Allora, detto $W = \mathrm{Span}(\underline{v_i})$, si può decomporre V come $W \oplus^\perp W^\perp$. Si osserva che $W^\perp$ è f-invariante: infatti, se $\underline{u} \in W^\perp$, $\varphi(\underline{v_i}, f(\underline{u})) = \varphi(f(\underline{v_i}), f(\underline{u})) = \varphi(\underline{v_i}, \underline{u}) = 0 \implies f(\underline{u}) \in W^\perp$. Pertanto si può considerare l'isometria $f|_{W^\perp}$. Dacché $\dim W^\perp = n-1$, per il passo induttivo esistono W_1, ..., W_k sottospazi di $W^\perp$ con $k \leq n-1$ per cui ρ_{W_1}, ..., $\rho_{W_k} \in \mathrm{End}(W^\perp)$ sono tali che $f|_{W^\perp} = \rho_{W_1} \circ \cdots \circ \rho_{W_k}$.

Si considerino allora le riflessioni $\rho_{W_1 \oplus^\perp W}$, ..., $\rho_{W_k \oplus^\perp W}$. Si mostra che $\rho_{W_1 \oplus^\perp W} \circ \cdots \circ \rho_{W_k \oplus^\perp W}|_W = \mathrm{Id}_W = f|_W$. Affinché si faccia ciò è sufficiente mostrare che $(\rho_{W_1 \oplus^\perp W} \circ \cdots \circ \rho_{W_k \oplus^\perp W})(\underline{v_i}) = \underline{v_i}$. Si osserva che $\underline{v_i} \in W_i \oplus^\perp W \;\forall\, 1 \leq i \leq k$, e quindi che $\rho_{W_k \oplus^\perp W}(\underline{v_i}) = \underline{v_i}$. Reiterando l'applicazione di questa identità nel prodotto, si ottiene infine il risultato desiderato. Infine, si dimostra che $\rho_{W_1 \oplus^\perp W} \circ \cdots \circ \rho_{W_k \oplus^\perp W}|_{W^\perp} = \rho_{W_1} \circ \cdots \circ \rho_{W_k} = f|_{W^\perp}$. Analogamente a prima, è sufficiente mostrare che $\rho_{W_k \oplus^\perp W}(\underline{u}) = \rho_{W_k}(\underline{u}) \;\forall\, \underline{u} \in W^\perp$. Sia $\underline{u} = \rho_{W_k}(\underline{u}) + \underline{u}'$ con $\underline{u}' \in W_k^\perp \cap W^\perp \subseteq (W_k \oplus^\perp W)^\perp$, ricordando che $W^\perp = W_k \oplus^\perp (W^\perp \cap W_k^\perp)$. Allora, poiché $\rho_{W_k}(\underline{u}) \in W_k \subseteq (W_k \oplus^\perp W)$, si conclude che $\rho_{W_k \oplus^\perp W}(\underline{u}) = \rho_{W_k}(\underline{u})$. Pertanto, dacché vale che $V = W \oplus^\perp W^\perp$ e che $\rho_{W_1 \oplus^\perp W} \circ \cdots \circ \rho_{W_k \oplus^\perp W}$ e f, ristretti su W o su $W^\perp$, sono le stesse identiche mappe, allora in particolare vale l'uguaglianza più generale:

[4]Infatti, detto $\lambda \in \mathbb{R}$ tale che $f(\underline{v_1}) = \lambda\underline{v_1}$, $\left\|\underline{v_1}\right\| = \left\|f(\underline{v_1})\right\| = \lambda^2\left\|\underline{v_1}\right\| \implies \lambda = \pm 1$, ossia $f = \pm\mathrm{Id}$, come volevasi dimostrare.

$$f = \rho_{W_1 \oplus^\perp W} \circ \cdots \circ \rho_{W_k \oplus^\perp W},$$

e quindi f è prodotto di $k \leq n-1$ riflessioni.

Se invece non esiste alcun $\underline{v_i}$ tale per cui $f(\underline{v_i}) = \underline{v_i}$, per il *Lemma 1* esiste una riflessione τ tale per cui $\tau(f(\underline{v_i})) = \underline{v_i}$. In particolare $\tau \circ f$ è anch'essa un'isometria, essendo composizione di due isometrie. Allora, da prima, esistono U_1, ..., U_k sottospazi di V con $k \leq n-1$ tali per cui $\tau \circ f = \rho_{U_1} \circ \cdots \circ \rho_{U_k}$, da cui $f = \tau \circ \rho_{U_1} \circ \cdots \circ \rho_{U_k}$, ossia f è prodotto di al più n riflessioni, concludendo il passo induttivo. □

Lemma 3.1. Sia $f \in \mathrm{End}(V)$ simmetrico (o hermitiano). Allora f ha solo autovalori reali[5].

Dimostrazione. Si assuma che V è uno spazio euclideo complesso, e quindi che φ è un prodotto hermitiano. Allora, se f è hermitiano, sia $\lambda \in \mathbb{C}$ un suo autovalore[6] e sia $\underline{v} \in V_\lambda$. Allora $\varphi(\underline{v}, f(\underline{v})) = \varphi(f(\underline{v}), \underline{v}) = \overline{\varphi(\underline{v}, f(\underline{v}))} \implies \varphi(\underline{v}, f(\underline{v})) \in \mathbb{R}$. Inoltre vale la seguente identità:

$$\varphi(\underline{v}, f(\underline{v})) = \varphi(\underline{v}, \lambda\underline{v}) = \lambda\varphi(\underline{v}, \underline{v}),$$

da cui, ricordando che φ è non degenere e che $\varphi(\underline{v}, \underline{v}) \in \mathbb{R}$, si ricava che:

$$\lambda = \frac{\varphi(\underline{v}, f(\underline{v}))}{\varphi(\underline{v}, \underline{v})} \in \mathbb{R}.$$

Sia ora invece V è uno spazio euclideo reale e φ è un prodotto scalare. Allora, $(V_\mathbb{C}, \varphi_\mathbb{C})$ è uno spazio euclideo complesso, e $f_\mathbb{C}$ è hermitiano. Sia $\mathcal{B}$ una base di V. Allora, come visto all'inizio di questa dimostrazione, $f_\mathbb{C}$ ha solo autovalori reali, da cui si ricava che il polinomio caratteristico di $f_\mathbb{C}$ è completamente riducibile in $\mathbb{R}$. Si osserva inoltre che $p_f(\lambda) = \det(M_\mathcal{B}(f) - \lambda I_n) = \det(M_\mathcal{B}(f_\mathbb{C}) - \lambda I_n) = p_{f_\mathbb{C}}(\lambda)$. Si conclude dunque che anche p_f è completamente riducibile in $\mathbb{R}$. □

Osservazione. Dal lemma precedente consegue immediatamente che se $A \in M(n, \mathbb{R})$ è simmetrica (o se appartiene a $M(n, \mathbb{C})$ ed è hermitiana), considerando l'operatore simmetrico f_A indotto da A in $\mathbb{R}^n$ (o $\mathbb{C}^n$), f_A ha tutti autovalori reali, e dunque così anche A.

Lemma 3.2. Sia $f \in \mathrm{End}(V)$ simmetrico (o hermitiano). Allora se λ, μ sono due autovalori distinti di f, $V_\lambda \perp V_\mu$.

[5] Nel caso di f simmetrico, si intende in particolare che tutte le radici del suo polinomio caratteristico sono reali.

[6] Tale autovalore esiste sicuramente dal momento che $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ è un campo algebricamente chiuso.

Dimostrazione. Siano $\underline{v} \in V_\lambda$ e $\underline{w} \in V_\mu$. Allora[7] $\lambda\varphi(\underline{v}, \underline{w}) = \varphi(\lambda\underline{v}, \underline{w}) = \varphi(f(\underline{v}), \underline{w}) = \varphi(\underline{v}, f(\underline{w})) = \varphi(\underline{v}, \mu\underline{w}) = \mu\varphi(\underline{v}, \underline{w})$. Pertanto vale la seguente identità:

$$(\lambda - \mu)\varphi(\underline{v}, \underline{w}) = 0.$$

In particolare, valendo $\lambda - \mu \neq 0$ per ipotesi, $\varphi(\underline{v}, \underline{w}) = 0 \implies V_\lambda \perp V_\mu$, da cui la tesi. □

Lemma 3.3. Sia $f \in \mathrm{End}(V)$ simmetrico (o hermitiano). Se $W \subseteq V$ è f-invariante, allora anche $W^\perp$ lo è.

Dimostrazione. Siano $\underline{w} \in W$ e $\underline{v} \in W^\perp$. Allora $\varphi(\underline{w}, f(\underline{v})) = \varphi(\underbrace{f(\underline{w})}_{\in W}, \underline{v}) = 0$, da cui si ricava che $f(\underline{v}) \in W^\perp$, ossia la tesi. □

Teorema 3.4 (spettrale reale)**.** Sia (V, φ) uno spazio euclideo reale (o complesso) e sia $f \in \mathrm{End}(V)$ simmetrico (o hermitiano). Allora esiste una base ortogonale $\mathcal{B}$ di V composta di autovettori per f.

Dimostrazione. Siano λ_1, ..., λ_k tutti gli autovalori reali di f. Sia inoltre $W = V_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus V_{\lambda_k}$. Per i lemmi precedenti, vale che:

$$W = V_{\lambda_1} \oplus^\perp \cdots \oplus^\perp V_{\lambda_k}.$$

Sicuramente $W \subset V$. Si assuma però che $W \subsetneq V$. Allora $V = W \oplus^\perp W^\perp$. In particolare, per il lemma precedente, $W^\perp$ è f-invariante. Quindi $f|_{W^\perp}$ è un endomorfismo di uno spazio di dimensione non nulla. Si osserva che $f|_{W^\perp}$ è chiaramente simmetrico (o hermitiano), essendo solo una restrizione di f. Allora $f|_{W^\perp}$ ammette autovalori reali per i lemmi precedenti; tuttavia questo è un assurdo, dal momento che ogni autovalore di $f|_{W^\perp}$ è anche autovalore di f e si era supposto che[8] λ_1, ..., λ_k fossero tutti gli autovalori di f, $\lightning$. Quindi $W = V$. Pertanto, detta $\mathcal{B}_i$ una base ortonormale di V_{λ_i}, $\mathcal{B} = \cup_{i=1}^k \mathcal{B}_i$ è una base ortonormale di V, da cui la tesi. □

Corollario 3.3 (teorema spettrale per le matrici)**.** Sia $A \in M(n, \mathbb{R})$ simmetrica (o appartenente a $M(n, \mathbb{C})$ ed hermitiana). Allora $\exists\, P \in O_n$ (o $P \in U_n$) tale che $P^{-1}AP = P^\top AP$ (o $P^{-1}AP = P^*AP$ nel caso hermitiano) sia una matrice diagonale reale.

Dimostrazione. Si consideri f_A, l'operatore indotto dalla matrice A in $\mathbb{R}^n$ (o $\mathbb{C}^n$). Allora f_A è un operatore simmetrico (o hermitiano) sul prodotto scalare (o hermitiano) standard. Pertanto, per il teorema spettrale reale, esiste una base ortonormale $\mathcal{B} = \{\underline{v_1}, \ldots, \underline{v_n}\}$ composta di autovettori di f_A. In particolare, detta $\mathcal{B}'$ la base canonica di $\mathbb{R}^n$ (o $\mathbb{C}^n$), vale la seguente identità:

[7] Si osserva che non è stato coniugato λ nei passaggi algebrici, valendo $\lambda \in \mathbb{R}$ dallo scorso lemma.

[8] Infatti tale autovalore λ non può già comparire tra questi autovalori, altrimenti, detto $i \in \mathbb{N}$ tale che $\lambda = \lambda_i$, $V_{\lambda_i} \cap W^\perp \neq \{\underline{0}\}$, violando la somma diretta supposta.

$$M_{\mathcal{B}}(f) = M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}(\mathrm{Id})^{-1} M_{\mathcal{B}'}(f) M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}(\mathrm{Id}),$$

dove $M_{\mathcal{B}'}(f) = A$, $M_{\mathcal{B}}(f)$ è diagonale, essendo $\mathcal{B}$ composta di autovettori, e $P = M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}$ si configura nel seguente modo:

$$M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}(f) = \left(\underline{v_1} \,\middle|\, \cdots \,\middle|\, \underline{v_n} \right).$$

Dacché $\mathcal{B}$ è ortogonale, P è anch'essa ortogonale, da cui la tesi. □

Osservazione.

▶ Un importante risultato che consegue direttamente dal teorema spettrale per le matrici riguarda la segnatura di un prodotto scalare (o hermitiano). Infatti, detta $A = M_{\mathcal{B}}(\varphi)$, $D = P^\top AP$, e dunque $D \cong A$. Allora, essendo D diagonale, l'indice di positività è esattamente il numero di valori positivi sulla diagonale, ossia il numero di autovalori positivi di A. Analogamente l'indice di negatività è il numero di autovalori negativi, e quello di nullità è la molteplicità algebrica di 0 come autovalore (ossia esattamente la dimensione di $V_\varphi^\perp = \operatorname{Ker} a_\varphi$).

Teorema 3.5 (di triangolazione con base ortonormale)**.** Sia $f \in \mathrm{End}(V)$, dove (V, φ) è uno spazio euclideo su $\mathbb{K}$. Allora, se p_f è completamente riducibile in $\mathbb{K}$, esiste una base ortonormale $\mathcal{B}$ tale per cui $M_{\mathcal{B}}(f)$ è triangolare superiore (ossia esiste una base ortonormale a bandiera per f).

Dimostrazione. Per il teorema di triangolazione, esiste una base $\mathcal{B}$ a bandiera per f. Allora, applicando l'algoritmo di ortogonalizzazione di Gram-Schmidt, si può ottenere da $\mathcal{B}$ una nuova base $\mathcal{B}'$ ortonormale e che mantenga le stesse bandiere. Allora, se $\mathcal{B}' = \{\underline{v_1}, \ldots, \underline{v_n}\}$ è ordinata, dacché $\mathrm{Span}(\underline{v_1}, \ldots, \underline{v_i})$ è f-invariante, $f(\underline{v_i}) \in \mathrm{Span}(\underline{v_1}, \ldots, \underline{v_i})$, e quindi $M_{\mathcal{B}'}(f)$ è triangolare superiore, da cui la tesi. □

Corollario 3.4. Sia $A \in M(n, \mathbb{R})$ (o $M(n, \mathbb{C})$) tale per cui p_A è completamente riducibile. Allora $\exists\, P \in O_n$ (o U_n) tale per cui $P^{-1}AP = P^\top AP$ (o $P^{-1}AP = P^*AP$) è triangolare superiore.

Dimostrazione. Si consideri l'operatore f_A indotto da A in $\mathbb{R}^n$ (o $\mathbb{C}^n$). Sia $\mathcal{B}$ la base canonica di $\mathbb{R}^n$ (o di $\mathbb{C}^n$). Allora, per il teorema di triangolazione con base ortonormale, esiste una base ortonormale $\mathcal{B}' = \{\underline{v_1}, \ldots, \underline{v_n}\}$ di $\mathbb{R}^n$ (o di $\mathbb{C}^n$) tale per cui $T = M_{\mathcal{B}'}(f_A)$ è triangolare superiore. Si osserva inoltre che $M_{\mathcal{B}}(f_A) = A$ e che $P = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}(f_A) = \left(\underline{v_1} \,\middle|\, \cdots \,\middle|\, \underline{v_n} \right)$ è ortogonale (o unitaria), dacché le sue colonne formano una base ortonormale. Allora, dalla formula del cambiamento di base per la applicazioni lineari, si ricava che:

$$A = PTP^{-1} \implies T = P^{-1}TP,$$

da cui, osservando che $P^{-1} = P^\top$ (o $P^{-1} = P^*$), si ricava la tesi. □

Definizione (operatore normale)**.** Sia (V, φ) uno spazio euclideo reale. Allora $f \in \mathrm{End}(V)$ si dice **normale** se commuta con il suo trasposto (i.e. se $ff^\top = f^\top f$). Analogamente, se (V, φ) è uno spazio euclideo complesso, allora f si dice normale se commuta con il suo aggiunto (i.e. se $ff^* = f^* f$).

Definizione (matrice normale)**.** Una matrice $A \in M(n, \mathbb{R})$ (o $M(n, \mathbb{C})$) si dice **normale** se $AA^\top = A^\top A$ (o $AA^* = A^*A$).

Osservazione.
▶ Se $A \in M(n, \mathbb{R})$ e A è simmetrica ($A = A^\top$), antisimmetrica ($A = -A^\top$) o ortogonale ($AA^\top = A^\top A = I_n$), sicuramente A è normale.
▶ Se $A \in M(n, \mathbb{C})$ e A è hermitiana ($A = A^*$), antihermitiana ($A = -A^*$) o unitaria ($AA^* = A^*A = I_n$), sicuramente A è normale.
▶ f è normale $\iff$ $M_\mathcal{B}(f)$ è normale, con $\mathcal{B}$ ortonormale di V.
▶ A è normale $\iff$ f_A è normale, considerando che la base canonica di $\mathbb{C}^n$ è già ortonormale rispetto al prodotto hermitiano standard.
▶ Se V è euclideo reale, f è normale $\iff$ $f_\mathbb{C}$ è normale. Infatti, se f è normale, f e $f^\top$ commutano. Allora anche $f_\mathbb{C}$ e $(f^\top)_\mathbb{C} = (f_\mathbb{C})^*$ commutano, e quindi $f_\mathbb{C}$ è normale. Ripercorrendo i passaggi al contrario, si osserva infine che vale anche il viceversa.

Lemma 3.1. Sia $A \in M(n, \mathbb{C})$ triangolare superiore e normale (i.e. $AA^* = A^*A$). Allora A è diagonale.

Dimostrazione. Se A è normale, allora $(A^*)_i A^i = \overline{A}^i A^i$ deve essere uguale a $A_i (A^*)^i = A_i \overline{A}_i$ $\forall\, 1 \leq i \leq n$. Si dimostra per induzione su i da 1 a n che tutti gli elementi, eccetto per quelli diagonali, delle righe A_1, ..., A_i sono nulli.

(*passo base*) Si osserva che valgono le seguenti identità:

$$\overline{A}^1 A^1 = |a_{11}|^2 ,$$
$$A_1 \overline{A}_1 = |a_{11}|^2 + |a_{12}|^2 + \ldots + |a_{1n}|^2 .$$

Dovendo vale l'uguaglianza, si ricava che $|a_{12}|^2 \ldots + |a_{1n}|^2$, e quindi che $|a_{1i}|^2 = 0 \implies a_{1i} = 0 \quad \forall\, 2 \leq i \leq n$, dimostrando il passo base[9].

(*passo induttivo*) Analogamente a prima, si considerano le seguenti identità:

$$\overline{A}^i A^i = |a_{1i}|^2 + \ldots + |a_{ii}|^2 = |a_{ii}|^2 ,$$
$$A_i \overline{A}_i = |a_{ii}|^2 + \left|a_{i(i+1)}\right|^2 + \ldots + |a_{in}|^2 ,$$

dove si è usato che, per il passo induttivo, tutti gli elementi, eccetto per quelli diagonali, delle righe A_1, ..., A_{i-1} sono nulli. Allora, analogamente a prima, si ricava che $a_{ij} = 0$ $\forall\, i < j \leq n$, dimostrando il passo induttivo, e quindi la tesi. □

[9] Gli altri elementi sono infatti già nulli per ipotesi, essendo A triangolare superiore

Osservazione.
▶ Chiaramente vale anche il viceversa del precedente lemma: se infatti $A \in M(n, \mathbb{C})$ è diagonale, A è anche normale, dal momento che commuta con A^*.
▶ Reiterando la stessa dimostrazione del precedente lemma per $A \in M(n, \mathbb{R})$ triangolare superiore e normale reale (i.e. $AA^\top = A^\top A$) si può ottenere una tesi analoga.

Teorema 3.6. Sia (V, φ) uno spazio euclideo complesso. Allora f è un operatore normale $\iff$ esiste una base ortonormale $\mathcal{B}$ di autovettori per f.

Dimostrazione. Si dimostrano le due implicazioni separatamente.

($\implies$) Poiché $\mathbb{C}$ è algebricamente chiuso, p_f è sicuramente riducibile. Pertanto, per il teorema di triangolazione con base ortonormale, esiste una base ortonormale $\mathcal{B}$ a bandiera per f. In particolare, $M_\mathcal{B}(f)$ è sia normale che triangolare superiore. Allora, per il *Lemma 1*, $M_\mathcal{B}(f)$ è diagonale, e dunque $\mathcal{B}$ è anche una base di autovettori per f.

($\impliedby$) Se esiste una base ortonormale $\mathcal{B}$ di autovettori per f, $M_\mathcal{B}(f)$ è diagonale, e dunque anche normale. Allora, poiché $\mathcal{B}$ è ortonormale, anche f è normale. □

Corollario 3.5. Sia $A \in M(n, \mathbb{C})$. Allora A è normale $\iff$ $\exists U \in U_n$ tale che $U^{-1}AU = U^*AU$ è diagonale.

Dimostrazione. Si dimostrano le due implicazioni separatamente.

($\implies$) Sia $\mathcal{B}$ la base canonica di $\mathbb{C}^n$. Si consideri l'applicazione lineare f_A indotta da A su $\mathbb{C}^n$. Se A è normale, allora anche f_A lo è. Pertanto, per il precedente teorema, esiste una base ortonormale $\mathcal{B}' = \{\underline{v_1}, \ldots, \underline{v_n}\}$ di autovettori per f_A. In particolare, $U = M_\mathcal{B}^{\mathcal{B}'}(\mathrm{Id}) = \left(\underline{v_1} \mid \cdots \mid \underline{v_n}\right)$ è unitaria ($U \in U_n$), dacché le colonne di U sono ortonormali. Si osserva inoltre che $M_\mathcal{B}(f_A) = A$ e che $D = M_{\mathcal{B}'}(f_A)$ è diagonale. Allora, per la formula del cambiamento di base per le applicazioni lineari, si conclude che:

$$A = UDU^{-1} \implies D = U^{-1}AU = U^*AU,$$

ossia che U^*AU è diagonale.

($\impliedby$) Sia $D = U^*AU$. Dacché D è diagonale, D è anche normale. Pertanto $DD^* = D^*D$. Sostituendo, si ottiene che $U^*AUU^*A^*U = U^*A^*UU^*AU$. Ricordando che $U^*U = I_n$ e che $U \in U_n$ è sempre invertibile, si conclude che $AA^* = A^*A$, ossia che A è normale a sua volta, da cui la tesi. □

Osservazione.
▶ Si può osservare mediante l'applicazione dell'ultimo corollario che, se A è hermitiana (ed è dunque anche normale), $\exists U \in U_n \mid U^*AU = D$, dove $D \in M(n, \mathbb{R})$, ossia tale corollario implica il teorema spettrale in forma complessa. Infatti $\overline{D} = D^* = U^*A^*U = U^*AU = D \implies D \in M(n, \mathbb{R})$.

► Se $A \in M(n, \mathbb{R})$ è una matrice normale reale (i.e. $AA^\top = A^\top A$) con p_A completamente riducibile in $\mathbb{R}$, allora è possibile reiterare la dimostrazione del precedente teorema per concludere che $\exists\, O \in O_n \mid O^\top A O = D$ con $D \in M(n, \mathbb{R})$, ossia che $A = ODO^\top$. Tuttavia questo implica che $A^\top = (ODO^\top) = OD^\top O^\top = ODO^\top = A$, ossia che A è simmetrica. In particolare, per il teorema spettrale reale, vale anche il viceversa. Pertanto, se $A \in M(n, \mathbb{R})$, A è una matrice normale reale con p_A completamente riducibile in $\mathbb{R}$ $\iff$ $A = A^\top$.

Esercizio 2. Sia V uno spazio dotato del prodotto φ. Sia $W \subseteq V$ un sottospazio di V. Sia $\mathcal{B}_W = \{\underline{w_1}, \ldots, \underline{w_k}\}$ una base di W e sia $\mathcal{B} = \{\underline{w_1}, ..., \underline{w_k}, \underline{v_{k+1}}, ..., \underline{v_n}\}$ una base di V. Sia $A = M_{\mathcal{B}}(\varphi)$. Si dimostrino allora i seguenti risultati.

(i) $W^\perp = \{\underline{v} \in V \mid \varphi(\underline{v}, \underline{w_i}) = 0\}$,

(ii) $W^\perp = \{\underline{v} \in V \mid A_{1,\ldots,k}[\underline{v}]_{\mathcal{B}} = 0\} = [\cdot]_{\mathcal{B}}^{-1}(\operatorname{Ker} A_{1,\ldots,k})$,

(iii) $\dim W^\top = \dim V - \operatorname{rg}(A_{1,\ldots,k})$,

(iv) Se φ è non degenere, $\dim W + \dim W^\perp = \dim V$.

Soluzione. Chiaramente vale l'inclusione $W^\perp \subseteq \{\underline{v} \in V \mid \varphi(\underline{v}, \underline{w_i}) = 0\}$. Sia allora $\underline{v} \in V \mid \varphi(\underline{v}, \underline{w_i}) = 0\ \forall\, 1 \leq i \leq k$ e sia $\underline{w} \in W$. Allora esistono α_1, ..., α_k tali che $\underline{w} = \alpha_1 \underline{w_1} + \ldots + \alpha_k \underline{w_k}$. Pertanto si conclude che $\varphi(\underline{v}, \alpha_1\underline{w_1} + \ldots + \alpha_k\underline{w_k}) = \alpha_1\varphi(\underline{v}, \underline{w_1}) + \ldots + \alpha_k\varphi(\underline{v}, \underline{w_k}) = 0 \implies \underline{v} \in W^\top$. Pertanto $W^\top = \{\underline{v} \in V \mid \varphi(\underline{v}, \underline{w_i}) = 0\}$, dimostrando (i).

Si osserva che $\varphi(\underline{v}, \underline{w_i}) = 0 \iff \varphi(\underline{w_i}, \underline{v}) = 0$. Se φ è scalare, allora $\varphi(\underline{w_i}, \underline{v}) = 0 \overset{\text{def}}{\iff} [\underline{w_i}]_{\mathcal{B}}^\top A[\underline{v}]_{\mathcal{B}} = (\underline{e_i})^\top A[\underline{v}]_{\mathcal{B}} = A_i[\underline{v}]_{\mathcal{B}} = 0$. Pertanto $\underline{v} \in W^\top \iff A_i[\underline{v}]_{\mathcal{B}} = 0\ \forall\, 1 \leq i \leq k$, ossia se $A_{1,\ldots,k}[\underline{v}]_{\mathcal{B}} = 0$ e $[\underline{v}]_{\mathcal{B}} \in \operatorname{Ker} A_{1,\ldots,k}$, dimostrando (ii). Analogamente si ottiene la tesi se φ è hermitiano. Applicando la formula delle dimensioni, si ricava dunque che $\dim W^\top = \dim \operatorname{Ker} A_{1,\ldots,k} = \dim V - \operatorname{rg} A_{1,\ldots,k}$, dimostrando (iii).

Se φ è non degenere, A è invertibile, dacché $\dim V^\perp = \dim \operatorname{Ker} A = 0$. Allora ogni minore di taglia k di A ha determinante diverso da zero. Dacché ogni minore di taglia k di $A_{1,\ldots,k}$ è anche un minore di taglia k di A, si ricava che anche ogni minore di taglia k di $A_{1,\ldots,k}$ ha determinante diverso da zero, e quindi che $\operatorname{rg}(A_{1,\ldots,k}) \geq k$. Dacché deve anche valere $\operatorname{rg}(A_{1,\ldots,k}) \leq \min\{k, n\} = k$, si conclude che $\operatorname{rg}(A_{1,\ldots,k})$ vale esattamente $k = \dim W$. Allora, dal punto (iii), vale che $\dim W^\perp + \dim W = \dim W^\perp + \operatorname{rg}(A_{1,\ldots,k}) = \dim V$, dimostrando il punto (iv). □

Esercizio 3. Sia V uno spazio dotato del prodotto φ. Sia $U \subseteq V$ un sottospazio di V. Si dimostrino allora i seguenti due risultati.

(i) Il prodotto φ induce un prodotto $\tilde{\varphi} : V/U \times V/U \to \mathbb{K}$ tale che $\tilde{\varphi}(\underline{v} + U, \underline{v}' + U) = \varphi(\underline{v}, \underline{v}')$ se e soltanto se $U \subseteq V^\perp$, ossia se e solo se $U \perp V$.

(ii) Se $U = V^\perp$, allora il prodotto $\tilde{\varphi}$ è non degenere.

(iii) Sia $\pi : V \to V/V^\perp$ l'applicazione lineare di proiezione al quoziente. Allora $U^\perp = \{\underline{v} \in V \mid \tilde{\varphi}(\pi(\underline{v}), \pi(\underline{u})) = 0 \;\forall\, \underline{u} \in U\} = \pi^{-1}(\pi(U)^\perp)$.

(iv) Vale la formula delle dimensioni per il prodotto φ: $\dim U + \dim U^\perp = \dim V + \dim(U \cap V^\perp)$.

Soluzione. Sia $\underline{w} = \underline{v} + \underline{u_1} \in \underline{v} + U$, con $\underline{u_1} \in U$. Se $\tilde{\varphi}$ è ben definito, allora deve valere l'uguaglianza $\varphi(\underline{v}, \underline{v}') = \varphi(\underline{w}, \underline{v}') = \varphi(\underline{v} + \underline{u_1}, \underline{v}') = \varphi(\underline{v}, \underline{v}') + \varphi(\underline{u_1}, \underline{v}')$, ossia $\varphi(\underline{u_1}, \underline{v}') = 0$ $\forall\, \underline{v}' \in V \implies \underline{u_1} \in V^\perp \implies U \subseteq V^\perp$. Viceversa, se $U \subseteq V^\perp$, sia $\underline{w}' = \underline{v}' + \underline{u_2} \in \underline{v}' + U$, con $\underline{u_2} \in U$. Allora vale la seguente identità:

$$\varphi(\underline{w}, \underline{w}') = \varphi(\underline{v} + \underline{u_1}, \underline{v}' + \underline{u_2}) = \varphi(\underline{v}, \underline{v}') + \underbrace{\varphi(\underline{v}, \underline{u_2}) + \varphi(\underline{u_1}, \underline{v}') + \varphi(\underline{u_1}, \underline{u_2})}_{=0}.$$

Pertanto $\tilde{\varphi}$ è ben definito, dimostrando (i).

Sia ora $U = V/V^\perp$. Sia $\underline{v} + U \in (V/U)^\perp = \operatorname{Rad}(\tilde{\varphi})$. Allora, $\forall\, \underline{v}' + U \in V/U$, $\tilde{\varphi}(\underline{v} + U, \underline{v}' + U) = \varphi(\underline{v}, \underline{v}') = 0$, ossia $\underline{v} \in V^\perp = U$. Pertanto $\underline{v} + U = U \implies \operatorname{Rad}(\tilde{\varphi}) = \{V^\perp\}$, e quindi $\tilde{\varphi}$ è non degenere, dimostrando (ii).

Si dimostra adesso l'uguaglianza $U^\perp = \pi^{-1}(\pi(U)^\perp)$. Sia $\underline{v} \in U^\perp$. Allora $\tilde{\varphi}(\pi(\underline{v}), \pi(\underline{u})) = \tilde{\varphi}(\underline{v} + V^\perp, \underline{u} + V^\perp) = \varphi(\underline{v}, \underline{u}) = 0 \;\forall\, \underline{u} \in U$, da cui si ricava che vale l'inclusione $U^\perp \subseteq \pi^{-1}(\pi(U)^\perp)$. Sia ora $\underline{v} \in \pi^{-1}(\pi(U)^\perp)$, e sia $\underline{u} \in U$. Allora $\varphi(\underline{v}, \underline{u}) = \tilde{\varphi}(\underline{v} + V^\perp, \underline{u} + V^\perp) = \tilde{\varphi}(\pi(\underline{v}), \pi(\underline{u})) = 0$, da cui vale la doppia inclusione, e dunque l'uguaglianza desiderata, dimostrando (iii).

Dall'uguaglianza del punto (iii), l'applicazione della formula delle dimensioni e l'identità ottenuta dal punto (iv) dell'*Esercizio 2* rispetto al prodotto $\tilde{\varphi}$ non degenere, si ricavano le seguenti identità:

$$\begin{cases} \dim \pi(U) = \dim U - \dim(U \cap \operatorname{Ker} \pi) = \dim U - \dim(U \cap V^\perp), \\ \dim \pi(U)^\perp = \dim V/V^\perp - \dim \pi(U) = \dim V - \dim V^\perp - \dim \pi(U), \\ \dim U^\perp = \dim \pi(U)^\perp + \dim \operatorname{Ker} \pi = \dim \pi(U)^\perp + \dim V^\perp, \end{cases}$$

dalle quali si ricava la seguente identità:

$$\dim U^\perp = \dim V - \dim V^\perp - (\dim U - \dim(U \cap V^\perp)) + \dim V^\perp,$$

da cui si ricava che $\dim U + \dim U^\perp = \dim V + \dim(U \cap V^\perp)$, dimostrando (iv). $\square$

Esercizio 4. Sia V uno spazio vettoriale dotato del prodotto φ. Si dimostri allora che $(W^\perp)^\perp = W + V^\perp$.

Soluzione. Sia $\underline{v} = \underline{w}' + \underline{v}' \in W + V^\perp$, con $\underline{w}' \in W$ e $\underline{v}' \in V^\perp$. Sia inoltre $\underline{w} \in W^\perp$. Allora $\varphi(\underline{v}, \underline{w}) = \varphi(\underline{w}' + \underline{v}', \underline{w}) = \varphi(\underline{w}', \underline{w}) + \varphi(\underline{v}', \underline{w}) = 0$, dove si è usato che $\underline{w}' \perp \underline{w}$ dacché $\underline{w} \in W^\perp$ e $\underline{w}' \in W$ e che $\underline{v}' \in V^\perp$. Allora vale l'inclusione $W + V^\perp \subseteq (W^\perp)^\perp$.

Applicando le rispettive formule delle dimensioni a $W^\perp$, $(W^\perp)^\perp$ e $W + V^\perp$ si ottengono le seguenti identità:

$$\begin{cases} \dim W^\perp = \dim V + \dim(W \cap V^\perp) - \dim W, \\ \dim(W^\perp)^\perp = \dim V + \dim(W^\perp \cap V^\perp) - \dim W^\perp, \\ \dim(W + V^\perp) = \dim W + \dim V^\perp - \dim(W \cap V^\perp), \end{cases}$$

da cui si ricava che:

$$\dim(W^\perp)^\perp = \dim W + \dim V^\perp - \dim(W \cap V^\perp) = \dim(W + V^\perp).$$

Dal momento che vale un'inclusione e l'uguaglianza dimensionale, si conclude che $(W^\perp)^\perp = W + V^\perp$, da cui la tesi. $\square$

Esercizio 5. Sia $A \in M(n, \mathbb{C})$ anti-hermitiana (i.e. $A = -A^*$). Si dimostri allora che A è normale e che ammette solo autovalori immaginari.

Soluzione. Si mostra facilmente che A è normale. Infatti $AA^* = A(-A) = -A^2 = (-A)A = A^*A$. Sia allora $\lambda \in \mathbb{C}$ un autovalore di A e sia $\underline{v} \neq \underline{0}$, $\underline{v} \in V_\lambda$. Si consideri il prodotto hermitiano standard φ su $\mathbb{C}^n$. Allora vale la seguente identità:

$$\lambda\, \varphi(\underline{v}, \underline{v}) = \varphi(\underline{v}, \lambda\underline{v}) = \varphi(\underline{v}, A\underline{v}) = \varphi(A^*\underline{v}, \underline{v}) = \\ \varphi(-A\underline{v}, \underline{v}) = \varphi(-\lambda\underline{v}, \underline{v}) = -\overline{\lambda}\, \varphi(\underline{v}, \underline{v}).$$

Dacché φ è definito positivo, $\varphi(\underline{v}, \underline{v}) \neq 0 \implies \lambda = -\overline{\lambda}$. Allora $\Re(\lambda) = \frac{\lambda + \overline{\lambda}}{2} = 0$, e quindi λ è immaginario, da cui la tesi. $\square$

Esercizio 6. Sia V uno spazio vettoriale dotato del prodotto φ. Siano U, $W \subseteq V$ due sottospazi di V. Si dimostrino allora le due seguenti identità.

(i) $(U + W)^\perp = U^\perp \cap W^\perp$,

(ii) $(U \cap W)^\perp \supseteq U^\perp + W^\perp$, dove vale l'uguaglianza insiemistica se φ è non degenere.

Soluzione. Sia $\underline{v} \in (U + W)^\perp$ e siano $\underline{u} \in U \subseteq U + W$, $\underline{w} \in W \subseteq U + W$. Allora $\varphi(\underline{v}, \underline{u}) = 0 \implies \underline{v} \in U^\perp$ e $\varphi(\underline{v}, \underline{w}) = 0 \implies \underline{v} \in W^\perp$, da cui si conclude che $(U + W)^\perp \subseteq U^\perp \cap W^\perp$. Sia adesso $\underline{v} \in U^\perp \cap W^\perp$ e $\underline{v}' = \underline{u} + \underline{w} \in U + W$ con $\underline{u} \in V$ e $\underline{w} \in W$. Allora $\varphi(\underline{v}, \underline{v}') = \varphi(\underline{v}, \underline{u}) + \varphi(\underline{v}, \underline{w}) = 0 \implies \underline{v} \in (U + W)^\perp$, da cui si deduca che vale la doppia inclusione, e quindi che $(U + W)^\perp = U^\perp \cap W^\perp$, dimostrando (i).

Sia ora $\underline{v}' = \underline{u}' + \underline{w}' \in U^\perp + W^\perp$ con $\underline{u}' \in U^\perp$ e $\underline{w}' \in W^\perp$. Sia $\underline{v} \in U \cap W$. Allora $\varphi(\underline{v}, \underline{v}') = \varphi(\underline{v}, \underline{u}') + \varphi(\underline{v}, \underline{w}') = 0 \implies \underline{v}' \in (U \cap W)^\perp$, da cui si deduce che $(U \cap W)^\perp \supseteq U^\perp + W^\perp$. Se φ è non degenere, $\dim(U^\perp + W^\perp) = \dim U^\perp + \dim W^\perp - \dim(U^\perp \cap W^\perp) = 2\dim V - \dim U - \dim W - \dim(U+W)^\perp = \dim V - \dim U - \dim W + \dim(U+W) = \dim V - \dim(U+W) = \dim(U+W)^\perp$. Valendo pertanto l'uguaglianza dimensionale, si conclude che in questo caso $(U \cap W)^\perp = U^\perp + W^\perp$, dimostrando (ii).

$\square$