

# Note del corso di Geometria 1

Gabriel Antonio Videtta

29 marzo 2023

## Esercitazione: computo della basi di Jordan

**Esempio.** Sia  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$  e se ne ricerchi la forma cano-

nica di Jordan e una base in cui assume tale base.

Si noti che  $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ , e quindi che  $A^3 = 0$ . Allora  $\varphi_A(t) = t^3$

e  $p_A(t) = t^5$ .

Poiché  $A$  ha ordine di nilpotenza 3, la sua forma canonica di Jordan ammette sicuramente un solo blocco di ordine 3. Inoltre,  $\dim \text{Ker } A = 3$ , e quindi devono esservi obbligatoriamente 2 blocchi di ordine 1. Pertanto la sua forma canonica è la seguente:

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Si consideri l'identità  $\mathbb{R}^5 = \text{Ker } A^3 = \text{Ker } A^2 \oplus U_1$ . Poiché  $\dim \text{Ker } A^2 = 4$ , vale che  $\dim U_1 = \dim \text{Ker } A^3 - \dim \text{Ker } A^2 = 1$ . Dacché  $\underline{e}_3$  si annulla solo con  $A^3$ ,  $U_1 = \text{Span}(\underline{e}_3)$ .

Si consideri invece ora  $\text{Ker } A^2 = \text{Ker } A \oplus A(U_1) \oplus U_2$ . Si osservi che  $\dim U_2$  è il numero dei blocchi di Jordan di ordine 2, e quindi è 0. Si deve allora considerare  $\text{Ker } A = A^2(U_1) \oplus U_3$ , dove  $\dim U_3 = 2$ . Si osservi anche che  $A^2(\underline{e}_3) = \underline{e}_1 - \underline{e}_2 - \underline{e}_3 + \underline{e}_4$ : è sufficiente trovare due vettori linearmente indipendenti appartenenti al kernel di  $A$ , ma non nello Span di  $A^2(\underline{e}_3)$ ; come per esempio  $\underline{e}_2 - \underline{e}_4$  e  $2\underline{e}_2 - \underline{e}_5$ . Allora  $U_3 = \text{Span}(\underline{e}_2 - \underline{e}_4, 2\underline{e}_2 - \underline{e}_5)$ . Una base di Jordan per  $A$  sarà allora  $(A^2\underline{e}_3, A\underline{e}_3, \underline{e}_3, \underline{e}_2 - \underline{e}_4, 2\underline{e}_2 - \underline{e}_5)$ .

**Esempio.** Sia  $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ , e se ne calcoli la forma canonica

di Jordan.

Si osserva che  $p_A(t) = (1-t)^3(2-t)^2$ , e quindi  $\mathbb{R}^5 = \text{Ker}(A-I)^3 \oplus \text{Ker}(A-2I)^2$ .

( $\lambda = 1$ )  $\dim \text{Ker}(A-I) = 2$ , quindi ci sono due blocchi relativi all'autovalore 1, uno di ordine 1 e uno di ordine 2.

( $\lambda = 2$ )  $\dim \text{Ker}(A-2I) = 2$ , quindi ci sono due blocchi relativi all'autovalore 2, entrambi di ordine 1.

Quindi la forma canonica di  $A$  è la seguente:

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

da cui si ottiene anche che  $p_A(t) = (t-2)^2(t-2)$ . Si calcola ora una base di Jordan per  $A$ .

Sia  $\text{Ker}(A-I)^2 = \text{Ker}(A-I) \oplus U_1$ .  $\dim U_1 = 1$ , e poiché  $\underline{e}_5 \in \text{Ker}(A-I)^2$ , ma  $\underline{e}_5 \notin \text{Ker}(A-I)$ , vale che  $U_1 = \text{Span}(\underline{e}_5)$ .

Sia ora invece  $\text{Ker}(A-I) = g(U_1) \oplus U_2$ , dove  $\dim U_2 = 1$ . Dacché  $\underline{e}_5 + \underline{e}_1 - \underline{e}_3 \in \text{Ker}(A-I)$ , ma non appartiene a  $\text{Span}(A\underline{e}_5)$ , si ottiene che una base relativa al blocco di 1 è  $A\underline{e}_5, \underline{e}_5, \underline{e}_5 + \underline{e}_1 - \underline{e}_3$ .

Per quanto riguarda invece il blocco relativo a 2, essendo tale blocco diagonale, è sufficiente ricavare una base di  $\text{Ker}(A - 2I)$ , come  $\underline{e}_4$  e  $\underline{e}_1 + \underline{e}_3$ .

**Definizione.** (centralizzatore di una matrice) Si definisce **centralizzatore di una matrice**  $A \in M(n, \mathbb{K})$  l'insieme:

$$C(A) = \{B \in M(n, \mathbb{K}) \mid AB = BA\},$$

ossia l'insieme delle matrici che commutano con  $A$ .

**Proposizione.** Vale l'identità  $C(J_{0,m}) = \text{Span}(I, J_{0,m}, J_{0,m}^2, \dots, J_{0,m}^{m-1})$ .

*Dimostrazione.* Si osserva che  $J_{0,m}B = \begin{pmatrix} B_2 \\ B_3 \\ \vdots \\ B_m \\ 0 \end{pmatrix}$ , mentre  $BJ_{0,m} = (0 \mid B^1 \mid B^2 \mid \dots \mid B^{m-1})$ . □

**Osservazione.** Sul centralizzatore di una matrice ed il suo rapporto con la similitudine si possono fare alcune considerazioni.

►  $A \sim B \implies \dim C(A) = \dim C(B)$ : infatti, se  $A = PBP^{-1}$ ,  $AC = CA \implies PBP^{-1}C = CPBP^{-1} \implies BP^{-1}C = P^{-1}CPBP^{-1} \implies B(P^{-1}CP) = (P^{-1}CP)B$ , e quindi il coniugio fornisce un isomorfismo tra i due centralizzatori.