Normalizzatore e teorema di Cayley

di Gabriel Antonio Videtta

Nota. Nel corso del documento per $(G, \cdot)$ si intenderà un qualsiasi gruppo.

Sia $X = \{H \subseteq G \mid H \leq G\}$ l'insieme dei sottogruppi di G. Allora si può costruire un'azione $\varphi : G \to S(X)$ in modo tale che:

$$g \overset{\varphi}{\mapsto} \left[H \mapsto gHg^{-1}\right].$$

Si definisce **normalizzatore** lo stabilizzatore di un sottogruppo H (e si indica con $N_G(H)$), mentre $\mathrm{Orb}(H)$ è l'insieme dei **coniugati** di H. In particolare $N_G(H)$ è il massimo sottogruppo per inclusione in cui H è normale.

Si osserva ora in modo cruciale che $H \trianglelefteq G$ se e solo se $\mathrm{Orb}(H) = \{H\}$, e quindi se e solo se $N_G(H) = G$. Analogamente si osserva che H è normale se e solo se:

$$H = \bigcup_{h \in H} \mathrm{Cl}(h).$$

Si illustra adesso un risultato principale della teoria dei gruppi che mette in relazione ogni gruppo con il proprio gruppo di bigezioni, ed ogni gruppo finito con i sottogruppi dei gruppi simmetrici.

Teorema (di Cayley)**.** Ogni gruppo è isomorfo a un sottogruppo del suo gruppo di bigezioni. In particolare, ogni gruppo finito G è isomorfo a un sottogruppo di un gruppo simmetrico.

Dimostrazione. Si consideri l'azione[1] $\varphi : G \to S(G)$ tale per cui:

$$g \overset{\varphi}{\mapsto} [h \mapsto gh].$$

Si mostra che φ è fedele[2]. Sia infatti $\varphi(g) = \mathrm{Id}$; allora vale che $ge = e \implies g = e$. Quindi $\operatorname{Ker} \varphi$ è banale, e per il Primo teorema di isomorfismo vale che:

$$G \cong \operatorname{Im} \varphi \leq S(G).$$

Se G è finito, $S(G)$ è isomorfo a S_n, dove $n := |G|$, e quindi $\operatorname{Im} \varphi$ è a sua volta isomorfo a un sottogruppo di S_n, da cui la tesi. $\square$

[1] Tale azione prende il nome di **rappresentazione regolare a sinistra**. Si può infatti definire un'azione analoga a destra ponendo $g \mapsto \left[h \mapsto hg^{-1}\right]$, costruendo dunque una *rappresentazione regolare a destra.*

[2] L'azione φ è molto più che fedele; è infatti innanzitutto libera.

Si presentano adesso due risultati interessanti legati ai sottogruppi normali di un gruppo G.

Proposizione. Sia $H \leq G$. Allora, se $[G : H] = 2$, H è normale in G.

Dimostrazione. Poiché $[G : H] = 2$, le uniche classi laterali sinistre rispetto ad H in G sono H e $gH = G \setminus H$, dove $g \notin H$. Analogamente esistono due sole classi laterali destre, H e $Hg = G \setminus H$. In particolare gH deve obbligatoriamente essere uguale a Hg, e quindi $gHg^{-1} = H$, da cui la tesi. □

Proposizione. Siano $K \leq H \leq G$. Allora, se H è normale in G e K è caratteristico in H, K è normale in G.

Dimostrazione. Sia $\varphi_g \in \operatorname{Inn}(G)$. Poiché H è normale in G, $\varphi_g(H) = H$. Pertanto si può considerare la restrizione di φ_g su H, $\varphi_g|_H$. In particolare $\varphi_g|_H$ è un automorfismo di $\operatorname{Aut}(H)$, e quindi, poiché K è caratteristico in H, $\varphi_g|_H(K) = K$, da cui si deduce che $gKg^{-1} = K$ per ogni $g \in G$. □

Si illustra adesso un risultato riguardante l'esistenza di sottogruppi normali in G:

Teorema (di Poincaré)**.** Sia H un sottogruppo di G di indice n. Allora esiste sempre un sottogruppo N di G tale per cui:

(i) N è normale in G,

(ii) N è contenuto in H,

(iii) $n \mid [G : N] \mid n!$.

Dimostrazione. Si consideri l'azione $\varphi : G \to S(G/H)$ tale per cui $g \overset{\varphi}{\mapsto} [kH \mapsto gkK]$. Tale azione è sicuramente ben definita dal momento che $kH = k'H \implies gkH = gk'H$. Si studia $N := \operatorname{Ker} \varphi$. Chiaramente N è normale in G, e si verifica facilmente che N è contenuto anche in H, infatti, se $n \in N$, allora:

$$H = \varphi(n)(H) = nH \implies n \in H.$$

Poiché G/N è isomorfo a $\operatorname{Im} \varphi \leq S(G/H)$, $[G : N] \mid |S(G/H)| = |S_n| = n!$ considerando che $S(G/H) \cong S_n$. Dal momento allora che N è un sottogruppo di H, vale che:

$$[G : N] = [G : H][H : N] = n[H : N],$$

e quindi $n \mid [G : N]$. Si è dunque esibito un sottogruppo N con le proprietà indicate nella tesi. □

Dal precedente teorema sono immediati i seguenti due risultati:

Corollario. Sia H un sottogruppo di G con indice n. Se $n! < |G|$ e $n > 1$, allora G non è semplice.

Corollario. Sia H un sottogruppo di G con indice p, dove p è il più piccolo primo che divide $n = |G|$. Allora H è normale.

Dimostrazione. Per il Teorema di Poincaré, esiste un sottogruppo N di H tale per cui N sia normale e $p \mid [G : N] \mid p!$ con $p = [G : H]$. In particolare $[G : N]$ deve dividere anche n, e quindi $[G : N]$ deve dunque dividere $\mathrm{MCD}(p!, n)$, che è, per ipotesi, p stesso. Si conclude dunque che $[G : N] = p = [G : H]$, e quindi che $N = H$, ossia che H stesso è normale. $\square$

Esempio (Tutti i gruppi di ordine 15 sono ciclici)**.** Sia G un gruppo di ordine 15. Per il teorema di Cauchy esistono due elementi h ed k, uno di ordine 3 e l'altro di ordine 5. In particolare, si consideri $K = \langle k \rangle$; poiché $|K| = 5$, $[G : K] = 3$, il più piccolo primo che divide 15. Pertanto K è normale per il corollario di sopra.

Poiché K è normale, si può considerare la restrizione $\iota : \mathrm{Inn}(G) \to \mathrm{Aut}(K)$ tale per cui $\varphi_g \overset{\iota}{\mapsto} \varphi_g|_K$. Dal momento che K è ciclico, $\mathrm{Aut}(K) \cong \mathrm{Aut}(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}) \cong (\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})^* \cong \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$. Quindi $[G : \mathrm{Ker}\,\iota]$ deve dividere sia 4 che 15; dal momento che $\mathrm{MCD}(4, 15) = 1$, $[G : \mathrm{Ker}\,\iota] = 1$, e quindi che ι è l'omomorfismo banale. Poiché ι è banale, K è un sottogruppo di $Z(G)$.

In particolare $[G : Z(G)] \mid [G : K] = 3$, e quindi in particolare $G/Z(G)$ è ciclico, da cui si deduce che G è abeliano. Infine, dal momento che $\mathrm{MCD}(3, 5) = 1$ e h e k commutano, hk è un elemento di ordine 15, e dunque G è ciclico.