Note del corso di Geometria 1

Gabriel Antonio Videtta

22 marzo 2023

Introduzione al prodotto scalare

Nota. Nel corso del documento, per V, qualora non specificato, si intenderà uno spazio vettoriale di dimensione finita n.

Definizione. Un **prodotto scalare** su V è una forma bilineare simmetrica φ con argomenti in V.

Esempio. Sia $\varphi : M(n, \mathbb{K})^2 \to \mathbb{K}$ tale che $\varphi(A, B) = \operatorname{tr}(AB)$.

▶ $\varphi(A + A', B) = \operatorname{tr}((A + A')B) = \operatorname{tr}(AB + A'B) = \operatorname{tr}(AB) + \operatorname{tr}(A'B) = \varphi(A, B) + \varphi(A', B)$ (linearità nel primo argomento),
▶ $\varphi(\alpha A, B) = \operatorname{tr}(\alpha AB) = \alpha \operatorname{tr}(AB) = \alpha\varphi(A, B)$ (omogeneità nel primo argomento),
▶ $\varphi(A, B) = \operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA) = \varphi(B, A)$ (simmetria),
▶ poiché φ è simmetrica, φ è lineare e omogenea anche nel secondo argomento, e quindi è una forma bilineare simmetrica, ossia un prodotto scalare su $M(n, \mathbb{K})$.

Definizione. Si definisce prodotto scalare *canonico* di $\mathbb{K}^n$ la forma bilineare simmetrica φ con argomenti in $\mathbb{K}^n$ tale che:

$$\varphi((x_1, ..., x_n), (y_1, ..., y_n)) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i.$$

Osservazione. Si può facilmente osservare che il prodotto scalare canonico di $\mathbb{K}^n$ è effettivamente un prodotto scalare.

▶ $\varphi((x_1, ..., x_n) + (x_1', ..., x_n'), (y_1, ..., y_n)) = \sum_{i=1}^{n}(x_i + x_i')y_i = \sum_{i=1}^{n} [x_i y_i + x_i' y_i] = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i + \sum_{i=1}^{n} x_i' y_i = \varphi((x_1, ..., x_n), (y_1, ..., y_n)) + \varphi((x_1', ..., x_n'), (y_1, ..., y_n))$ (linearità nel primo argomento),

▶ $\varphi(\alpha(x_1, ..., x_n), (y_1, ..., y_n)) = \sum_{i=1}^n \alpha x_i y_i = \alpha \sum_{i=1}^n x_i y_i = \alpha\varphi((x_1, ..., x_n), (y_1, ..., y_n))$ (omogeneità nel primo argomento),
▶ $\varphi((x_1, ..., x_n), (y_1, ..., y_n)) = \sum_{i=1}^n x_i y_i = \sum_{i=1}^n y_i x_i = \varphi((y_1, ..., y_n), (x_1, ..., x_n))$ (simmetria),
▶ poiché φ è simmetrica, φ è lineare e omogenea anche nel secondo argomento, e quindi è una forma bilineare simmetrica, ossia un prodotto scalare su $\mathbb{K}^n$.

Esempio. Altri esempi di prodotto scalare sono i seguenti:

▶ $\varphi(A, B) = \mathrm{tr}(A^\top B)$ per $M(n, \mathbb{K})$,
▶ $\varphi(p(x), q(x)) = p(a)q(a)$ per $\mathbb{K}[x]$, con $a \in \mathbb{K}$,
▶ $\varphi(p(x), q(x)) = \sum_{i=1}^n p(x_i)q(x_i)$ per $\mathbb{K}[x]$, con x_1, ..., x_n distinti,
▶ $\varphi(p(x), q(x)) = \int_a^b p(x)q(x)dx$ per lo spazio delle funzioni integrabili su $\mathbb{R}$, con a, b in $\mathbb{R}$,
▶ $\varphi(\underline{x}, \underline{y}) = \underline{x}^\top A\underline{y}$ per $\mathbb{K}^n$, con $A \in M(n, \mathbb{K})$ simmetrica.

Definizione. Sia[1] $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Allora un prodotto scalare φ si dice **definito positivo** se $\underline{v} \in V$, $\underline{v} \neq \underline{0} \implies \varphi(\underline{v}, \underline{v}) > 0$. Analogamente φ è **definito negativo** se $\underline{v} \neq \underline{0} \implies \varphi(\underline{v}, \underline{v}) < 0$.

Infine, φ è **semidefinito positivo** se $\varphi(\underline{v}, \underline{v}) \geq 0\ \forall\, \underline{v} \in V$ (o **semidefinito negativo** se invece $\varphi(\underline{v}, \underline{v}) \leq 0\ \forall\, \underline{v} \in V$).

Esempio. Il prodotto scalare canonico di $\mathbb{R}^n$ è definito positivo: infatti $\varphi((x_1, ..., x_n), (x_1, ..., x_n)) = \sum_{i=1}^n x_i^2 > 0$, se $(x_1, ..., x_n) \neq \underline{0}$.

Al contrario, il prodotto scalare $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tale che $\varphi((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = x_1 y_1 - x_2 y_2$ non è definito positivo: $\varphi((x, y), (x, y)) = 0$, $\forall\ (x, y) \mid x^2 = y^2$, ossia se $y = x$ o $y = -x$.

Definizione. Ad un dato prodotto scalare φ di V si associa una mappa $q : V \to \mathbb{K}$, detta **forma quadratica**, tale che $q(\underline{v}) = \varphi(\underline{v}, \underline{v})$.

Osservazione. Si osserva che q non è lineare in generale: infatti $q(\underline{v}+\underline{w}) \neq q(\underline{v}) + q(\underline{w})$ in $\mathbb{R}^n$.

Definizione. Un vettore $\underline{v} \in V$ si dice **isotropo** rispetto al prodotto scalare φ se $q(\underline{v}) = \varphi(\underline{v}, \underline{v}) = 0$.

[1] In realtà, la definizione è facilmente estendibile a qualsiasi campo, purché esso sia ordinato.

Esempio. Rispetto al prodotto scalare $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ tale che $\varphi((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)) = x_1y_1 + x_2y_2 - x_3y_3$, i vettori isotropi sono i vettori della forma (x, y, z) tali che $x^2 + y^2 = z^2$, ossia i vettori stanti sul cono di equazione $x^2 + y^2 = z^2$.

Osservazione. Come già osservato in generale per le applicazioni multilineari, il prodotto scalare è univocamente determinato dai valori che assume nelle coppie $\underline{v_i}, \underline{v_j}$ estraibili da una base $\mathcal{B}$. Infatti, se $\mathcal{B} = (\underline{v_1}, ..., \underline{v_k})$, $\underline{v} = \sum_{i=1}^k \alpha_i \underline{v_i}$ e $\underline{w} = \sum_{i=1}^k \beta_i \underline{v_i}$, allora:

$$\varphi(\underline{v}, \underline{w}) = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k \alpha_i \beta_j \, \varphi(\underline{v_i}, \underline{v_j}).$$

Definizione. Sia φ un prodotto scalare di V e sia $\mathcal{B} = (\underline{v_1}, ..., \underline{v_n})$ una base ordinata di V. Allora si definisce la **matrice associata** a φ come la matrice:

$$M_{\mathcal{B}}(\varphi) = (\varphi(\underline{v_i}, \underline{v_j}))_{i,\, j=1—n} \in M(n, \mathbb{K}).$$

Osservazione.

▶ $M_{\mathcal{B}}(\varphi)$ è simmetrica, infatti $\varphi(\underline{v_i}, \underline{v_j}) = \varphi(\underline{v_j}, \underline{v_i})$, dal momento che il prodotto scalare è simmetrico,

▶ $\varphi(\underline{v}, \underline{w}) = [\underline{v}]_{\mathcal{B}}^\top M_{\mathcal{B}}(\varphi)[\underline{w}]_{\mathcal{B}}$.

Teorema. (di cambiamento di base per matrici di prodotti scalari) Siano $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$ due basi ordinate di V. Allora, se φ è un prodotto scalare di V e $P = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}(\mathrm{Id}_V)$, vale la seguente identità:

$$\underbrace{M_{\mathcal{B}'}(\varphi)}_{A'} = P^\top \underbrace{M_{\mathcal{B}}}_{A} P.$$

Dimostrazione. Siano $\mathcal{B} = (\underline{v_1}, ..., \underline{v_n})$ e $\mathcal{B}' = (\underline{w}_1, ..., \underline{w}_n)$. Allora $A'_{ij} = \varphi(\underline{w}_i, \underline{w}_j) = [\underline{w}_i]_{\mathcal{B}}^\top A[\underline{w}_j]_{\mathcal{B}} = (P^i)^\top AP^j = P_i^\top (AP)^j = (P^\top AP)_{ij}$, da cui la tesi. □

Definizione. Si definisce **congruenza** la relazione di equivalenza $\cong$ (denotata anche come $\equiv$) definita nel seguente modo su $A, B \in M(n, \mathbb{K})$:

$$A \cong B \overset{\text{def}}{\iff} \exists\, P \in GL(n, \mathbb{K}) \mid A = P^\top AP.$$

Osservazione. Si può facilmente osservare che la congruenza è in effetti una relazione di equivalenza.

▶ $A = I^\top A I \implies A \cong A$ (riflessione),
▶ $A \cong B \implies A = P^\top BP \implies B = (P^\top)^{-1}AP^{-1} = (P^{-1})^\top AP^{-1} \implies B \cong A$ (simmetria),
▶ $A \cong B$, $B \cong C \implies A = P^\top BP$, $B = Q^\top CQ$, quindi $A = P^\top Q^\top CQP = (QP)^\top C(QP) \implies A \cong C$ (transitività).

Osservazione. Si osservano alcune proprietà della congruenza.

▶ Per il teorema di cambiamento di base del prodotto scalare, due matrici associate a uno stesso prodotto scalare sono sempre congruenti (esattamente come due matrici associate a uno stesso endomorfismo sono sempre simili).
▶ Se A e B sono congruenti, $A = P^\top BP \implies \mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(P^\top BP) = \mathrm{rg}(BP) = \mathrm{rg}(B)$, dal momento che P e $P^\top$ sono invertibili; quindi il rango è un invariante per congruenza. Allora si può ben definire il rango $\mathrm{rg}(\varphi)$ di un prodotto scalare come il rango della matrice associata di φ in una qualsiasi base di V.
▶ Se A e B sono congruenti, $A = P^\top BP \implies \det(A) = \det(P^\top BP) = \det(P^\top)\det(B)\det(P) = \det(P)^2\det(B)$. Quindi, per $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, il segno del determinante è un altro invariante per congruenza.

Definizione. Si definisce il **radicale** di un prodotto scalare φ come lo spazio:

$$V^\perp = \{\underline{v} \in V \mid \varphi(\underline{v}, \underline{w}) = 0 \ \forall\, \underline{w} \in V\}$$

Osservazione. Il radicale del prodotto scalare canonico su $\mathbb{R}^n$ ha dimensione nulla, dal momento che $\forall\, \underline{v} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\underline{0}\}$, $q(\underline{v}) = \varphi(\underline{v}, \underline{v}) > 0 \implies \underline{v} \notin V^\perp$. In generale ogni prodotto scalare definito positivo (o negativo) è non degenere, dal momento che ogni vettore non nullo non è isotropo, e dunque non può appartenere a $V^\perp$.

Definizione. Un prodotto scalare si dice **degenere** se il radicale dello spazio su tale prodotto scalare ha dimensione non nulla.

Osservazione. Sia $\alpha_\varphi : V \to V^*$ la mappa[2] tale che $\alpha_\varphi(\underline{v}) = p$, dove $p(\underline{w}) = \varphi(\underline{v}, \underline{w}) \ \forall\, \underline{v}, \underline{w} \in V$.

Si osserva che α_φ è un'applicazione lineare. Infatti, $\forall\, \underline{v}, \underline{w}, \underline{u} \in V$, $\alpha_\varphi(\underline{v} + \underline{w})(\underline{u}) = \varphi(\underline{v} + \underline{w}, \underline{u}) = \varphi(\underline{v}, \underline{u}) + \varphi(\underline{w}, \underline{u}) = \alpha_\varphi(\underline{v})(\underline{u}) + \alpha_\varphi(\underline{w})(\underline{u}) \implies$

[2] In letteratura questa mappa, se invertibile, è nota come *isomorfismo musicale*, ed è in realtà indicata come $\flat$.

$\alpha_\varphi(\underline{v}+\underline{w}) = \alpha_\varphi(\underline{v}) + \alpha_\varphi(\underline{w})$. Inoltre $\forall\, \underline{v},\ \underline{w} \in V,\ \lambda \in \mathbb{K},\ \alpha_\varphi(\lambda\underline{v})(\underline{w}) = \varphi(\lambda\underline{v}, \underline{w}) = \lambda\varphi(\underline{v}, \underline{w}) = \lambda\alpha_\varphi(\underline{v})(\underline{w}) \implies \alpha_\varphi(\lambda\underline{v}) = \lambda\alpha_\varphi(\underline{v})$.
Si osserva inoltre che $\operatorname{Ker}\alpha_\varphi$ raccoglie tutti i vettori $\underline{v} \in V$ tali che $\varphi(\underline{v}, \underline{w}) = 0\ \forall\, \underline{w} \in W$, ossia esattamente i vettori di $V^\perp$, per cui si conclude che $V^\perp = \operatorname{Ker}\alpha_\varphi$ (per cui $V^\perp$ è effettivamente uno spazio vettoriale). Se V ha dimensione finita, $\dim V = \dim V^*$, e si può allora concludere che $\dim V^\perp > 0 \iff \operatorname{Ker}\alpha_\varphi \neq \{\underline{0}\} \iff \alpha_\varphi$ non è invertibile (infatti lo spazio di partenza e di arrivo di α_φ hanno la stessa dimensione). In particolare, α_φ non è invertibile se e solo se $\det(\alpha_\varphi) = 0$.

Sia $\mathcal{B} = (\underline{v_1}, ..., \underline{v_n})$ una base ordinata di V. Si consideri allora la base ordinata del duale costruita su $\mathcal{B}$, ossia $\mathcal{B}^* = (\underline{v_1^*}, ..., \underline{v_n^*})$. Allora
$$M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}^*}(\alpha_\varphi)^i = [\alpha_\varphi(\underline{v_i})]_{\mathcal{B}^*} = \begin{pmatrix} \varphi(\underline{v_i}, \underline{v_1}) \\ \vdots \\ \varphi(\underline{v_i}, \underline{v_n}) \end{pmatrix} \underbrace{=}_{\varphi \text{ è simmetrica}} \begin{pmatrix} \varphi(\underline{v_1}, \underline{v_i}) \\ \vdots \\ \varphi(\underline{v_n}, \underline{v_i}) \end{pmatrix} = M_{\mathcal{B}}(\varphi)^i.$$
Quindi $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}^*}(\alpha_\varphi) = M_{\mathcal{B}}(\varphi)$.

Si conclude allora che φ è degenere se e solo se $\det(M_{\mathcal{B}}(\varphi)) = 0$ e che $V^\perp \cong \operatorname{Ker} M_{\mathcal{B}}(\varphi)$ mediante l'isomorfismo del passaggio alle coordinate.