I prodotti di uno spazio vettoriale

Dispense del corso di Geometria 1

Gabriel Antonio Videtta

A.A. 2022/2023

Università di Pisa

Indice

1 Il prodotto scalare

Nota — Nel corso del documento, per V, qualora non specificato, si intenderà uno spazio vettoriale di dimensione finita n.

Definizione 1.0.1. Un **prodotto scalare** su V è una forma bilineare simmetrica φ con argomenti in V.

Esempio 1.0.2

Sia $\varphi : M(n, \mathbb{K})^2 \to \mathbb{K}$ tale che $\varphi(A, B) = \operatorname{tr}(AB)$.

▶ $\varphi(A + A', B) = \operatorname{tr}((A + A')B) = \operatorname{tr}(AB + A'B) = \operatorname{tr}(AB) + \operatorname{tr}(A'B) = \varphi(A, B) + \varphi(A', B)$ (linearità nel primo argomento),
▶ $\varphi(\alpha A, B) = \operatorname{tr}(\alpha AB) = \alpha \operatorname{tr}(AB) = \alpha\varphi(A, B)$ (omogeneità nel primo argomento),
▶ $\varphi(A, B) = \operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA) = \varphi(B, A)$ (simmetria),
▶ poiché φ è simmetrica, φ è lineare e omogenea anche nel secondo argomento, e quindi è una forma bilineare simmetrica, ossia un prodotto scalare su $M(n, \mathbb{K})$.

Definizione 1.0.3. Si definisce prodotto scalare *canonico* di $\mathbb{K}^n$ la forma bilineare simmetrica φ con argomenti in $\mathbb{K}^n$ tale che:

$$\varphi((x_1, ..., x_n), (y_1, ..., y_n)) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i.$$

Osservazione 1.0.4. Si può facilmente osservare che il prodotto scalare canonico di $\mathbb{K}^n$ è effettivamente un prodotto scalare.

▶ $\varphi((x_1, ..., x_n) + (x_1', ..., x_n'), (y_1, ..., y_n)) = \sum_{i=1}^n (x_i + x_i')y_i = \sum_{i=1}^n [x_i y_i + x_i' y_i] = \sum_{i=1}^n x_i y_i + \sum_{i=1}^n x_i' y_i = \varphi((x_1, ..., x_n), (y_1, ..., y_n)) + \varphi((x_1', ..., x_n'), (y_1, ..., y_n))$ (linearità nel primo argomento),
▶ $\varphi(\alpha(x_1, ..., x_n), (y_1, ..., y_n)) = \sum_{i=1}^n \alpha x_i y_i = \alpha \sum_{i=1}^n x_i y_i = \alpha\varphi((x_1, ..., x_n), (y_1, ..., y_n))$ (omogeneità nel primo argomento),
▶ $\varphi((x_1, ..., x_n), (y_1, ..., y_n)) = \sum_{i=1}^n x_i y_i = \sum_{i=1}^n y_i x_i = \varphi((y_1, ..., y_n), (x_1, ..., x_n))$ (simmetria),
▶ poiché φ è simmetrica, φ è lineare e omogenea anche nel secondo argomento, e quindi è una forma bilineare simmetrica, ossia un prodotto scalare su $\mathbb{K}^n$.

Esempio 1.0.5

Altri esempi di prodotto scalare sono i seguenti:

- $\varphi(A, B) = \mathrm{tr}(A^\top B)$ per $M(n, \mathbb{K})$,
- $\varphi(p(x), q(x)) = p(a)q(a)$ per $\mathbb{K}[x]$, con $a \in \mathbb{K}$,
- $\varphi(p(x), q(x)) = \sum_{i=1}^n p(x_i)q(x_i)$ per $\mathbb{K}[x]$, con x_1, ..., x_n distinti,
- $\varphi(p(x), q(x)) = \int_a^b p(x)q(x)dx$ per lo spazio delle funzioni integrabili su $\mathbb{R}$, con a, b in $\mathbb{R}$,
- $\varphi(\underline{x}, \underline{y}) = \underline{x}^\top A \underline{y}$ per $\mathbb{K}^n$, con $A \in M(n, \mathbb{K})$ simmetrica.

Definizione 1.0.6. Sia[a] $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Allora un prodotto scalare φ si dice **definito positivo** se $\underline{v} \in V$, $\underline{v} \neq \underline{0} \implies \varphi(\underline{v}, \underline{v}) > 0$. Analogamente φ è **definito negativo** se $\underline{v} \neq \underline{0} \implies \varphi(\underline{v}, \underline{v}) < 0$.

Infine, φ è **semidefinito positivo** se $\varphi(\underline{v}, \underline{v}) \geq 0 \; \forall \underline{v} \in V$ (o **semidefinito negativo** se invece $\varphi(\underline{v}, \underline{v}) \leq 0 \; \forall \underline{v} \in V$).

[a] In realtà, la definizione è facilmente estendibile a qualsiasi campo, purché esso sia ordinato.

Esempio 1.0.7

Il prodotto scalare canonico di $\mathbb{R}^n$ è definito positivo: infatti $\varphi((x_1, ..., x_n), (x_1, ..., x_n)) = \sum_{i=1}^n x_i^2 > 0$, se $(x_1, ..., x_n) \neq \underline{0}$.

Al contrario, il prodotto scalare $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tale che $\varphi((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = x_1y_1 - x_2y_2$ non è definito positivo: $\varphi((x, y), (x, y)) = 0, \; \forall \; (x, y) \mid x^2 = y^2$, ossia se $y = x$ o $y = -x$.

Definizione 1.0.8. Ad un dato prodotto scalare φ di V si associa una mappa $q : V \to \mathbb{K}$, detta **forma quadratica**, tale che $q(\underline{v}) = \varphi(\underline{v}, \underline{v})$.

Osservazione 1.0.9. Si osserva che q non è lineare in generale: infatti $q(\underline{v}+\underline{w}) \neq q(\underline{v})+q(\underline{w})$ in $\mathbb{R}^n$.

Definizione 1.0.10. Un vettore $\underline{v} \in V$ si dice **isotropo** rispetto al prodotto scalare φ se $q(\underline{v}) = \varphi(\underline{v}, \underline{v}) = 0$.

Esempio 1.0.11

Rispetto al prodotto scalare $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ tale che $\varphi((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)) = x_1y_1 + x_2y_2 - x_3y_3$, i vettori isotropi sono i vettori della forma (x, y, z) tali che $x^2 + y^2 = z^2$, ossia i vettori stanti sul cono di equazione $x^2 + y^2 = z^2$.

Osservazione 1.0.12. Come già osservato in generale per le applicazioni multilineari, il prodotto scalare è univocamente determinato dai valori che assume nelle coppie $\underline{v_i}, \underline{v_j}$ estraibili da una base $\mathcal{B}$. Infatti, se $\mathcal{B} = (\underline{v_1}, ..., \underline{v_k})$, $\underline{v} = \sum_{i=1}^k \alpha_i \underline{v_i}$ e $\underline{w} = \sum_{i=1}^k \beta_i \underline{v_i}$, allora:

$$\varphi(\underline{v}, \underline{w}) = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k \alpha_i \beta_j \, \varphi(\underline{v_i}, \underline{v_j}).$$

Definizione 1.0.13. Sia φ un prodotto scalare di V e sia $\mathcal{B} = (\underline{v_1}, ..., \underline{v_n})$ una base ordinata di V. Allora si definisce la **matrice associata** a φ come la matrice:

$$M_{\mathcal{B}}(\varphi) = (\varphi(\underline{v_i}, \underline{v_j}))_{i,\, j=1—n} \in M(n, \mathbb{K}).$$

Osservazione 1.0.14.
- $M_{\mathcal{B}}(\varphi)$ è simmetrica, infatti $\varphi(\underline{v_i}, \underline{v_j}) = \varphi(\underline{v_j}, \underline{v_i})$, dal momento che il prodotto scalare è simmetrico,
- $\varphi(\underline{v}, \underline{w}) = [\underline{v}]_{\mathcal{B}}^\top M_{\mathcal{B}}(\varphi) [\underline{w}]_{\mathcal{B}}$.

Teorema 1.0.15

(di cambiamento di base per matrici di prodotti scalari) Siano $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$ due basi ordinate di V. Allora, se φ è un prodotto scalare di V e $P = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}(\mathrm{Id}_V)$, vale la seguente identità:

$$\underbrace{M_{\mathcal{B}'}(\varphi)}_{A'} = P^\top \underbrace{M_{\mathcal{B}}}_{A} P.$$

Dimostrazione. Siano $\mathcal{B} = (\underline{v_1}, ..., \underline{v_n})$ e $\mathcal{B}' = (\underline{w_1}, ..., \underline{w_n})$. Allora $A'_{ij} = \varphi(\underline{w_i}, \underline{w_j}) = [\underline{w_i}]_{\mathcal{B}}^\top A [\underline{w_j}]_{\mathcal{B}} = (P^i)^\top A P^j = P_i^\top (AP)^j = (P^\top AP)_{ij}$, da cui la tesi. □

Definizione 1.0.16. Si definisce **congruenza** la relazione di equivalenza $\cong$ (denotata anche come $\equiv$) definita nel seguente modo su $A, B \in M(n, \mathbb{K})$:

$$A \cong B \overset{\text{def}}{\iff} \exists\, P \in GL(n, \mathbb{K}) \mid A = P^\top AP.$$

Osservazione 1.0.17. Si può facilmente osservare che la congruenza è in effetti una relazione di equivalenza.

▶ $A = I^\top A I \implies A \cong A$ (riflessione),
▶ $A \cong B \implies A = P^\top B P \implies B = (P^\top)^{-1} A P^{-1} = (P^{-1})^\top A P^{-1} \implies B \cong A$ (simmetria),
▶ $A \cong B$, $B \cong C \implies A = P^\top B P$, $B = Q^\top C Q$, quindi $A = P^\top Q^\top C Q P = (QP)^\top C (QP) \implies A \cong C$ (transitività).

Osservazione 1.0.18. Si osservano alcune proprietà della congruenza.

▶ Per il teorema di cambiamento di base del prodotto scalare, due matrici associate a uno stesso prodotto scalare sono sempre congruenti (esattamente come due matrici associate a uno stesso endomorfismo sono sempre simili). ▶ Se A e B sono congruenti, $A = P^\top B P \implies \mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(P^\top B P) = \mathrm{rg}(BP) = \mathrm{rg}(B)$, dal momento che P e $P^\top$ sono invertibili; quindi il rango è un invariante per congruenza. Allora si può ben definire il rango $\mathrm{rg}(\varphi)$ di un prodotto scalare come il rango della matrice associata di φ in una qualsiasi base di V.
▶ Se A e B sono congruenti, $A = P^\top B P \implies \det(A) = \det(P^\top B P) = \det(P^\top)\det(B)\det(P) = \det(P)^2\det(B)$. Quindi, per $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, il segno del determinante è un altro invariante per congruenza.

Definizione 1.0.19. Si definisce il **radicale** di un prodotto scalare φ come lo spazio:

$$V^\perp = \{\underline{v} \in V \mid \varphi(\underline{v}, \underline{w}) = 0 \;\forall\, \underline{w} \in V\}$$

Osservazione 1.0.20. Il radicale del prodotto scalare canonico su $\mathbb{R}^n$ ha dimensione nulla, dal momento che $\forall\, \underline{v} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\underline{0}\}$, $q(\underline{v}) = \varphi(\underline{v}, \underline{v}) > 0 \implies \underline{v} \notin V^\perp$. In generale ogni prodotto scalare definito positivo (o negativo) è non degenere, dal momento che ogni vettore non nullo non è isotropo, e dunque non può appartenere a $V^\perp$.

Definizione 1.0.21. Un prodotto scalare si dice **degenere** se il radicale dello spazio su tale prodotto scalare ha dimensione non nulla.

Osservazione 1.0.22. Sia $\alpha_\varphi : V \to V^*$ la mappa[a] tale che $\alpha_\varphi(\underline{v}) = p$, dove $p(\underline{w}) = \varphi(\underline{v}, \underline{w})$ $\forall\, \underline{v}$, $\underline{w} \in V$.

Si osserva che α_φ è un'applicazione lineare. Infatti, $\forall\, \underline{v}$, $\underline{w}$, $\underline{u} \in V$, $\alpha_\varphi(\underline{v} + \underline{w})(\underline{u}) = \varphi(\underline{v} + \underline{w}, \underline{u}) = \varphi(\underline{v}, \underline{u}) + \varphi(\underline{w}, \underline{u}) = \alpha_\varphi(\underline{v})(\underline{u}) + \alpha_\varphi(\underline{w})(\underline{u}) \implies \alpha_\varphi(\underline{v} + \underline{w}) = \alpha_\varphi(\underline{v}) + \alpha_\varphi(\underline{w})$. Inoltre $\forall\, \underline{v}$, $\underline{w} \in V$, $\lambda \in \mathbb{K}$, $\alpha_\varphi(\lambda\underline{v})(\underline{w}) = \varphi(\lambda\underline{v}, \underline{w}) = \lambda\varphi(\underline{v}, \underline{w}) = \lambda\alpha_\varphi(\underline{v})(\underline{w}) \implies \alpha_\varphi(\lambda\underline{v}) = \lambda\alpha_\varphi(\underline{v})$. Si osserva inoltre che $\mathrm{Ker}\,\alpha_\varphi$ raccoglie tutti i vettori $\underline{v} \in V$ tali che $\varphi(\underline{v}, \underline{w}) = 0 \;\forall\, \underline{w} \in W$, ossia esattamente i vettori di $V^\perp$, per cui si conclude che $V^\perp = \mathrm{Ker}\,\alpha_\varphi$ (per cui $V^\perp$ è effettivamente uno spazio vettoriale). Se V ha dimensione finita, $\dim V = \dim V^*$, e si può allora concludere che $\dim V^\perp > 0 \iff \mathrm{Ker}\,\alpha_\varphi \neq \{\underline{0}\} \iff \alpha_\varphi$ non è invertibile (infatti lo spazio di partenza e di arrivo di α_φ hanno la stessa dimensione). In particolare, α_φ non è invertibile se e solo se $\det(\alpha_\varphi) = 0$.

Sia $\mathcal{B} = (\underline{v_1}, ..., \underline{v_n})$ una base ordinata di V. Si consideri allora la base ordinata del duale costruita su $\mathcal{B}$, ossia $\mathcal{B}^* = (\underline{v_1^*}, ..., \underline{v_n^*})$. Allora $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}^*}(\alpha_\varphi)^i = [\alpha_\varphi(\underline{v_i})]_{\mathcal{B}^*} = \begin{pmatrix} \varphi(\underline{v_i}, \underline{v_1}) \\ \vdots \\ \varphi(\underline{v_i}, \underline{v_n}) \end{pmatrix} \underbrace{=}_{\varphi \text{ è simmetrica}} \begin{pmatrix} \varphi(\underline{v_1}, \underline{v_i}) \\ \vdots \\ \varphi(\underline{v_n}, \underline{v_i}) \end{pmatrix} = M_{\mathcal{B}}(\varphi)^i$. Quindi $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}^*}(\alpha_\varphi) = M_{\mathcal{B}}(\varphi)$.

Si conclude allora che φ è degenere se e solo se $\det(M_{\mathcal{B}}(\varphi)) = 0$ e che $V^\perp \cong \operatorname{Ker} M_{\mathcal{B}}(\varphi)$ mediante l'isomorfismo del passaggio alle coordinate.

[a] In letteratura questa mappa, se invertibile, è nota come *isomorfismo musicale*, ed è in realtà indicata come $\flat$.

2 Proprietà e teoremi principali sul prodotto scalare

Nota — Nel corso del documento, per V si intenderà uno spazio vettoriale di dimensione finita n e per φ un suo prodotto scalare. Analogamente si intenderà lo stesso per V' e φ'.

Proposizione 2.0.1

(formula delle dimensioni del prodotto scalare) Sia $W \subseteq V$ un sottospazio di V. Allora vale la seguente identità:

$$\dim W + \dim W^\perp = \dim V + \dim(W \cap V^\perp).$$

Dimostrazione. Si consideri l'applicazione lineare $f : V \to W^*$ tale che $f(\underline{v})$ è un funzionale di W^* tale che $f(\underline{v})(\underline{w}) = \varphi(\underline{v}, \underline{w})\ \forall\, \underline{w} \in W$. Si osserva che $W^\perp = \operatorname{Ker} f$, da cui, per la formula delle dimensioni, $\dim V = \dim W^\perp + \operatorname{rg} f$. Inoltre, si osserva anche che $f = i^\top \circ a_\varphi$, dove $i : W \to V$ è tale che $i(\underline{w}) = \underline{w}$, infatti $f(\underline{v}) = a_\varphi(\underline{v}) \circ i$ è un funzionale di W^* tale che $f(\underline{v})(\underline{w}) = \varphi(\underline{v}, \underline{w})$. Pertanto $\operatorname{rg} f = \operatorname{rg}(i^\top \circ a_\varphi)$.

Si consideri ora l'applicazione $g = a_\varphi \circ i : W \to W^*$. Sia ora $\mathcal{B}_W$ una base di W e $\mathcal{B}_V$ una base di V. Allora le matrice associate di f e di g sono le seguenti:

(i) $M^{\mathcal{B}_V}_{\mathcal{B}_W^*}(f) = M^{\mathcal{B}_V}_{\mathcal{B}_W^*}(i^\top \circ a_\varphi) = \underbrace{M^{\mathcal{B}_V^*}_{\mathcal{B}_W^*}(i^\top)}_{A}\,\underbrace{M^{\mathcal{B}_V}_{\mathcal{B}_V^*}(a_\varphi)}_{B} = AB,$

(ii) $M^{\mathcal{B}_W}_{\mathcal{B}_V^*}(g) = M^{\mathcal{B}_W}_{\mathcal{B}_V^*}(a_\varphi \circ i) = \underbrace{M^{\mathcal{B}_V}_{\mathcal{B}_V^*}(a_\varphi)}_{B}\,\underbrace{M^{\mathcal{B}_W}_{\mathcal{B}_V}(i)}_{A^\top} = BA^\top \overbrace{=}^{B^\top = B} (AB)^\top.$

Poiché $\operatorname{rg}(A) = \operatorname{rg}(A^\top)$, si deduce che $\operatorname{rg}(f) = \operatorname{rg}(g) \implies \operatorname{rg}(i^\top \circ a_\varphi) = \operatorname{rg}(a_\varphi \circ i) = \operatorname{rg}(a_\varphi|_W) = \dim W - \dim \operatorname{Ker} a_\varphi|_W = \dim W - \dim(W \cap \underbrace{\operatorname{Ker} a_\varphi}_{V^\perp}) = \dim W - \dim(W \cap V^\perp)$. Si conclude allora, sostituendo quest'ultima identità nell'identità ricavata a inizio dimostrazione che $\dim V = \dim W^\top + \dim W - \dim(W \cap V^\perp)$, ossia la tesi. $\square$

Osservazione 2.0.2. Si possono fare alcune osservazioni sul radicale di un solo elemento $\underline{w}$ e su quello del suo sottospazio generato $W = \operatorname{Span}(\underline{w})$:

- $\underline{w}^\perp = W^\perp$,
- $\underline{w} \notin W^\perp \iff \operatorname{Rad}(\varphi|_W) = W \cap W^\perp \iff \underline{w}$ non è isotropo $= \{\underline{0}\} \iff V = W \oplus W^\perp$.

Definizione 2.0.3. Si definisce **base ortogonale** di V una base $\underline{v_1}$, ..., $\underline{v_n}$ tale per cui $\varphi(\underline{v_i}, \underline{v_j}) = 0 \impliedby i \neq j$, ossia per cui la matrice associata del prodotto scalare è diagonale.

Proposizione 2.0.4

(formula di polarizzazione) Se $\operatorname{char} \mathbb{K} \neq 2$, un prodotto scalare è univocamente determinato dalla sua forma quadratica q.

Dimostrazione. Si nota infatti che $q(\underline{v} + \underline{w}) - q(\underline{v}) - q(\underline{w}) = 2\varphi(\underline{v}, \underline{w})$, e quindi, poiché 2 è invertibile per ipotesi, che $\varphi(\underline{v}, \underline{w}) = 2^{-1}(q(\underline{v} + \underline{w}) - q(\underline{v}) - q(\underline{w}))$. $\square$

Teorema 2.0.5

(di Lagrange) Ogni spazio vettoriale V su $\mathbb{K}$ tale per cui $\operatorname{char} \mathbb{K} \neq 2$ ammette una base ortogonale.

Dimostrazione. Sia dimostra il teorema per induzione su $n := \dim V$. Per $n \leq 1$, la dimostrazione è triviale. Sia allora il teorema vero per $i \leq n$. Se V ammette un vettore non isotropo $\underline{w}$, sia $W = \operatorname{Span}(\underline{w})$ e si consideri la decomposizione $V = W \oplus W^\perp$. Poiché $W^\perp$ ha dimensione $n - 1$, per ipotesi induttiva ammette una base ortogonale. Inoltre, tale base è anche ortogonale a W, e quindi l'aggiunta di $\underline{w}$ a questa base ne fa una base ortogonale di V. Se invece V non ammette vettori non isotropi, ogni forma quadratica è nulla, e quindi il prodotto scalare è nullo per la proposizione precedente. $\square$

Nota — D'ora in poi, nel corso del documento, si assumerà $\operatorname{char} \mathbb{K} \neq 2$.

Teorema 2.0.6

(di Sylvester, caso complesso) Sia $\mathbb{K}$ un campo i cui elementi sono tutti quadrati di un altro elemento del campo (e.g. $\mathbb{C}$). Allora esiste una base ortogonale $\mathcal{B}$ tale per cui:

$$M_{\mathcal{B}}(\varphi) = \left(\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{array}\right).$$

Dimostrazione. Per il teorema di Lagrange, esiste una base ortogonale $\mathcal{B}'$ di V. Si riordini la base in modo tale che la forma quadratica valutata nei primi elementi sia sempre diversa da zero. Allora, poiché ogni elemento di $\mathbb{K}$ è per ipotesi quadrato di un altro elemento di $\mathbb{K}$, si sostituisca $\mathcal{B}'$ con una base $\mathcal{B}$ tale per cui, se $q(\underline{v_i}) = 0$, $\underline{v_i} \mapsto \underline{v_i}$, e altrimenti $\underline{v_i} \mapsto \frac{v_i}{\sqrt{q(\underline{v_i})}}$. Allora $\mathcal{B}'$ è una base tale per cui la matrice associata del prodotto scalare in tale base è proprio come desiderata nella tesi, dove r è il numero di elementi tali per cui la forma quadratica valutata in essi sia diversa da zero. □

Osservazione 2.0.7. Si possono effettuare alcune considerazioni sul teorema di Sylvester complesso.

▶ Si può immediatamente concludere che il rango è un invariante completo per la congruenza in un campo in cui tutti gli elementi sono quadrati, ossia che $A \cong B \iff \operatorname{rg}(A) = \operatorname{rg}(B)$, se A e B sono matrici simmetriche: infatti ogni matrice simmetrica rappresenta una prodotto scalare, ed è pertanto congruente ad una matrice della forma desiderata nell'enunciato del teorema di Sylvester complesso. Poiché il rango è un invariante della congruenza, si ricava che r nella forma della matrice di Sylvester, rappresentando il rango, è anche il rango di ogni sua matrice congruente. In particolare, se due matrici simmetriche hanno stesso rango, allora sono congruenti alla stessa matrice di Sylvester, e quindi, essendo la congruenza una relazione di congruenza, sono congruenti a loro volta.
▶ Due matrici simmetriche con stesso rango, allora, non solo sono SD-equivalenti, ma sono anche congruenti.
▶ Ogni base ortogonale deve quindi avere lo stesso numero di elementi nulli.

Definizione 2.0.8. (somma diretta ortogonale) Siano i sottospazi U e $W \subseteq V$ in somma diretta. Allora si dice che U e W sono in **somma diretta ortogonale rispetto al prodotto scalare** φ di V, ossia che $U \oplus W = U \oplus^{\perp} W$, se $\varphi(\underline{u}, \underline{w}) = 0 \;\forall\, \underline{u} \in U$, $\underline{w} \in W$.

Definizione 2.0.9. (cono isotropo) Si definisce **cono isotropo** di V rispetto al prodotto scalare φ il seguente insieme:

$$\operatorname{CI}(\varphi) = \{\underline{v} \in V \mid \varphi(\underline{v}, \underline{v}) = 0\},$$

ossia l'insieme dei vettori isotropi di V.

Nota — La notazione $\varphi > 0$ indica che φ è definito positivo (si scrive $\varphi \geq 0$ se invece è semidefinito positivo). Analogamente $\varphi < 0$ indica che φ è definito negativo (e $\varphi \leq 0$ indica che è semidefinito negativo).

Esercizio 2.0.10. Sia $\operatorname{char} \mathbb{K} \neq 2$. Siano $\underline{v_1}$, ..., $\underline{v_k} \in V$ e sia $M = \left(\varphi(\underline{v_i}, \underline{v_j})\right)_{i,j=1—k} \in M(k, \mathbb{K})$, dove φ è un prodotto scalare di V. Sia inoltre $W = \operatorname{Span}(\underline{v_1}, ..., \underline{v_k})$. Si dimostrino allora le seguenti affermazioni.

(i) Se M è invertibile, allora $\underline{v_1}$, ..., $\underline{v_k}$ sono linearmente indipendenti.

(ii) Siano $\underline{v_1}$, ..., $\underline{v_k}$ linearmente indipendenti. Allora M è invertibile $\iff$ $\varphi|_W$ è non degenere $\iff$ $W \cap W^\perp = \{\underline{0}\}$.

(iii) Siano $\underline{v_1}$, ..., $\underline{v_k}$ a due a due ortogonali tra loro. Allora M è invertibile $\iff$ nessun vettore $\underline{v_i}$ è isotropo.

(iv) Siano $\underline{v_1}$, ..., $\underline{v_k}$ a due a due ortogonali tra loro e siano anche linearmente indipendenti. Allora M è invertibile $\implies$ si può estendere $\mathcal{B}_W = \{\underline{v_1}, \ldots, \underline{v_k}\}$ a una base ortogonale di V.

(v) Sia $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Sia inoltre $\varphi > 0$. Allora $\underline{v_1}$, ..., $\underline{v_k}$ sono linearmente indipendenti $\iff$ M è invertibile.

(vi) Sia $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Sia ancora $\varphi > 0$. Allora se $\underline{v_1}$, ..., $\underline{v_k}$ sono a due a due ortogonali e sono tutti non nulli, sono anche linearmente indipendenti.

Soluzione.

(i) Siano a_1, ..., $a_k \in \mathbb{K}$ tali che $a_1\underline{v_1} + \ldots + a_k\underline{v_k} = 0$. Vale in particolare che $\underline{0} = \varphi(\underline{v_i}, \underline{0}) = \varphi(\underline{v_i}, a_1\underline{v_1} + \ldots + a_k\underline{v_k}) = \sum_{j=1}^k a_j\varphi(\underline{v_i}, \underline{v_j})$ $\forall\, 1 \leq i \leq k$. Allora $\sum_{j=1}^k a_j M^j = 0$. Dal momento che M è invertibile, $\mathrm{rg}(M) = k$, e quindi l'insieme delle colonne di M è linearmente indipendente, da cui si ricava che $a_j = 0$ $\forall\, 1 \leq j \leq k$, e quindi che $\underline{v_1}$, ..., $\underline{v_k}$ sono linearmente indipendenti.

(ii) Poiché $\underline{v_1}$, ..., $\underline{v_k}$ sono linearmente indipendenti, tali vettori formano una base di W, detta $\mathcal{B}$. In particolare, allora, vale che $M = M_{\mathcal{B}}(\varphi|_W)$. Pertanto, se M è invertibile, $\mathrm{Rad}(\varphi|_W) = \operatorname{Ker} M = \{\underline{0}\}$, e dunque $\varphi|_W$ è non degenere. Se invece $\varphi|_W$ è non degenere, $\{\underline{0}\} = \mathrm{Rad}(\varphi|_W) = W \cap W^\perp$. Infine, se $W \cap W^\perp = \{\underline{0}\}$, $\{\underline{0}\} = W \cap W^\perp = \mathrm{Rad}(\varphi|_W) = \operatorname{Ker} M$, e quindi M è iniettiva, e dunque invertibile.

(iii) Dal momento che $\underline{v_1}$, ..., $\underline{v_k}$ sono ortogonali tra loro, M è una matrice diagonale. Pertanto M è invertibile se e solo se ogni suo elemento diagonale è diverso da 0, ossia se $\varphi(\underline{v_i}, \underline{v_i}) \neq 0$ $\forall\, 1 \leq i \leq k$, e dunque se e solo se nessun vettore $\underline{v_i}$ è isotropo.

(iv) Se M è invertibile, da (ii) si deduce che $\mathrm{Rad}(\varphi|_W) = W \cap W^\perp = \{\underline{0}\}$, e quindi che W e $W^\perp$ sono in somma diretta. Inoltre, per la formula delle dimensioni del prodotto scalare, $\dim W + \dim W^\perp = \dim V + \underbrace{\dim(W \cap V^\perp)}_{\leq \dim(W \cap W^\perp) = 0} = \dim V$. Pertanto

$$V = W \oplus^\perp W^\perp.$$

Allora, dacché $\operatorname{char} \mathbb{K} \neq 2$, per il teorema di Lagrange, $W^\perp$ ammette una base ortogonale $\mathcal{B}_{W^\perp}$. Si conclude dunque che $\mathcal{B} = \mathcal{B}_W \cup \mathcal{B}_{W^\perp}$ è una base ortogonale di V.

(v) Se M è invertibile, da (i) $\underline{v_1}$, ..., $\underline{v_k}$ sono linearmente indipendenti. Siano ora invece $\underline{v_1}$, ..., $\underline{v_k}$ linearmente indipendenti per ipotesi. Siano a_1, ..., $a_k \in \mathbb{K}$ tali che $a_1M^1 + \ldots + a_kM^k = 0$, allora $a_1\varphi(\underline{v_i}, \underline{v_1}) + \ldots + a_k\varphi(\underline{v_i}, \underline{v_k}) = 0\ \forall\, 1 \leq i \leq k$. Pertanto, detto $\underline{v} = a_1\underline{v_1} + \ldots + a_k\underline{v_k}$, si ricava che:

$$\varphi(\underline{v}, \underline{v}) = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k} a_j\, \varphi(\underline{v_i}, \underline{v_j}) = 0.$$

Tuttavia questo è possibile solo se $\underline{v} = a_1\underline{v_1} + \ldots + a_k\underline{v_k} = 0$. Dal momento che $\underline{v_1}$, ..., $\underline{v_k}$ sono linearmente indipendenti, si conclude che $a_1 = \cdots = a_k = 0$, ossia che le colonne di M sono tutte linearmente indipendenti e quindi che $\mathrm{rg}(M) = k \implies M$ è invertibile.

(vi) Poiché $\underline{v_1}$, ..., $\underline{v_k}$ sono ortogonali a due a due tra loro, M è una matrice diagonale. Inoltre, dacché $\varphi > 0$ e $\underline{v_i} \neq \underline{0}\ \forall\, 1 \leq i \leq k$, gli elementi diagonali di M sono sicuramente tutti diversi da zero, e quindi $\det(M) \neq 0 \implies M$ è invertibile. Allora, per il punto (v), $\underline{v_1}$, ..., $\underline{v_k}$ sono linearmente indipendenti.

Definizione 2.0.11. Data una base ortogonale $\mathcal{B}$ di V rispetto al prodotto scalare φ, si definiscono i seguenti indici:

$$\begin{aligned} \iota_+(\varphi) &= \max\{\dim W \mid W \subseteq V \text{ e } \varphi|_W > 0\}, && \textbf{(indice di positività)} \\ \iota_-(\varphi) &= \max\{\dim W \mid W \subseteq V \text{ e } \varphi|_W < 0\}, && \textbf{(indice di negatività)} \\ \iota_0(\varphi) &= \dim V^\perp && \textbf{(indice di nullità)} \end{aligned}$$

Quando il prodotto scalare φ è noto dal contesto, si omette e si scrive solo ι_+, ι_- e ι_0. In particolare, la terna $\sigma(\varphi) = \sigma = (i_+, i_-, i_0)$ è detta **segnatura** del prodotto φ.

Teorema 2.0.12

(di Sylvester, caso reale) Sia $\mathbb{K}$ un campo ordinato i cui elementi positivi sono tutti quadrati (e.g. $\mathbb{R}$). Allora esiste una base ortogonale $\mathcal{B}$ tale per cui:

$$M_{\mathcal{B}}(\varphi) = \left(\begin{array}{c|c|c} I_{\iota_+} & 0 & 0 \\ \hline 0 & -I_{\iota_-} & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \cdot I_{\iota_0} \end{array}\right).$$

Inoltre, per ogni base ortogonale, esistono esattamente ι_+ vettori della base con forma quadratica positiva, ι_- con forma negativa e ι_0 con forma nulla.

Dimostrazione. Per il teorema di Lagrange, esiste una base ortogonale $\mathcal{B}'$ di V. Si riordini la base in modo tale che la forma quadratica valutata nei primi elementi sia strettamente positiva, che nei secondi elementi sia strettamente negativa e che negli ultimi sia nulla. Si sostituisca $\mathcal{B}'$ con una base $\mathcal{B}$ tale per cui, se $q(\underline{v_i}) > 0$, allora $\underline{v_i} \mapsto \frac{\underline{v_i}}{\sqrt{q(\underline{v_i})}}$; se $q(\underline{v_i}) < 0$, allora $\underline{v_i} \mapsto \frac{\underline{v_i}}{\sqrt{-q(\underline{v_i})}}$; altrimenti $\underline{v_i} \mapsto \underline{v_i}$. Si è allora trovata una base la cui matrice associata del prodotto scalare è come desiderata nella tesi.

Sia ora a il numero di vettori della base con forma quadratica positiva, b il numero di vettori con forma negativa e c quello dei vettori con forma nulla. Si consideri $W_+ = \mathrm{Span}(\underline{v_1}, ..., \underline{v_a})$, $W_- = \mathrm{Span}(\underline{v_{a+1}}, ..., \underline{v_b})$, $W_0 = \mathrm{Span}(\underline{v_{b+1}}, ..., \underline{v_c})$.

Sia $M = M_{\mathcal{B}}(\varphi)$. Si osserva che $c = n - \mathrm{rg}(M) = \dim \mathrm{Ker}(M) = \dim V^\perp = \iota_0$. Inoltre $\forall\, \underline{v} \in W_+$, dacché $\mathcal{B}$ è ortogonale, $q(\underline{v}) = q(\sum_{i=1}^a \alpha_i \underline{v_i}) = \sum_{i=1}^a \alpha_i^2 q(\underline{v_i}) > 0$, e quindi $\varphi|_{W_+} > 0$, da cui $\iota_+ \geq a$. Analogamente $\iota_- \geq b$.

Si mostra ora che è impossibile che $\iota_+ > a$. Se così infatti fosse, sia W tale che $\dim W = \iota_+$ e che $\varphi|_W > 0$. $\iota_+ + b + c$ sarebbe maggiore di $a+b+c = n := \dim V$. Quindi, per la formula di Grassman, $\dim(W + W_- + W_0) = \dim W + \dim(W_- + W_0) - \dim(W \cap (W_- + W_0)) \implies \dim(W \cap (W_- + W_0)) = \dim W + \dim(W_- + W_0) - \dim(W + W_- + W_0) > 0$, ossia esisterebbe $\underline{v} \neq \{\underline{0}\} \mid \underline{v} \in W \cap (W_- + W_0)$. Tuttavia questo è assurdo, dacché dovrebbe valere sia $q(\underline{v}) > 0$ che $q(\underline{v}) < 0$, $\lightning$. Quindi $\iota_+ = a$, e analogamente $\iota_- = b$. $\square$

Definizione 2.0.13. Si dice **base di Sylvester** una base di V tale per cui la matrice associata di φ sia esattamente nella forma vista nella dimostrazione del teorema di Sylvester. Analogamente si definisce tale matrice come **matrice di Sylvester**.

Osservazione 2.0.14.
▶ Si può dunque definire la segnatura di una matrice simmetrica come la segnatura di una qualsiasi sua base ortogonale, dal momento che tale segnatura è invariante per cambiamento di base.
▶ La segnatura è un invariante completo per la congruenza nel caso reale. Se infatti due matrici hanno la stessa segnatura, sono entrambe congruenti alla matrice come vista nella dimostrazione della forma reale del teorema di Sylvester, e quindi, essendo la congruenza una relazione di equivalenza, sono congruenti tra loro. Analogamente vale il viceversa, dal momento che ogni base ortogonale di due matrici congruenti devono contenere gli stessi numeri ι_+, ι_- e ι_0 di vettori di base con forma quadratica positiva, negativa e nulla.
▶ Se $\underline{w_1}$, ..., $\underline{w_k}$ sono tutti i vettori di una base ortogonale $\mathcal{B}$ con forma quadratica nulla, si osserva che $W = \mathrm{Span}(\underline{w_1}, ..., \underline{w_k})$ altro non è che $V^\perp$ stesso. Infatti, come visto anche nella dimostrazione del teorema di Sylvester reale, vale che $\dim W = \dim \mathrm{Ker}(M_{\mathcal{B}}(\varphi)) = \dim V^\perp$. Inoltre, se $\underline{w} \in W$ e $\underline{v} \in V$, $\varphi(\underline{w}, \underline{v}) = \varphi(\sum_{i=1}^k \alpha_i \underline{w_i}, \sum_{i=1}^k \beta_i \underline{w_i} + \sum_{i=k+1}^n \beta_i \underline{v_i}) = \sum_{i=1}^k \alpha_i \beta_i q(\underline{w_i}) = 0$, e quindi $W \subseteq V^\perp$, da cui si conclude che $W = V^\perp$.
▶ Vale in particolare che $\mathrm{rg}(\varphi) = \iota_+ + \iota_-$, mentre $\dim \mathrm{Ker}(\varphi) = \iota_0$, e quindi $n = \iota_+ + \iota_- + \iota_0$.
▶ Se $V = U \oplus^\perp W$, allora $\iota_+(\varphi) = \iota_+(\varphi|_V) + \iota_+(\varphi|_W)$, e analogamente per gli altri indici.

Definizione 2.0.15. (isometria) Dati due spazi vettoriali (V, φ) e (V', φ') dotati di prodotto scalare sullo stesso campo $\mathbb{K}$, si dice che V e V' sono **isometrici** se esiste un isomorfismo f, detto *isometria*, che preserva tali che prodotti, ossia tale che:

$$\varphi(\underline{v}, \underline{w}) = \varphi'(f(\underline{v}), f(\underline{w})).$$

Esercizio 2.0.16. Sia $f : V \to V'$ un isomorfismo. Allora f è un'isometria $\iff$ $\forall$ base $\mathcal{B} = \{\underline{v_1}, \ldots, \underline{v_n}\}$ di V, $\mathcal{B}' = \{f(\underline{v_1}), \ldots, f(\underline{v_n})\}$ è una base di V' e $\varphi(\underline{v_i}, \underline{v_j}) = \varphi'(f(\underline{v_i}), f(\underline{v_j}))$ $\forall\, 1 \leq i, j \leq n$ $\iff$ $\exists$ base $\mathcal{B} = \{\underline{v_1}, \ldots, \underline{v_n}\}$ di V tale che $\mathcal{B}' = \{f(\underline{v_1}), \ldots, f(\underline{v_n})\}$ è una base di V' e $\varphi(\underline{v_i}, \underline{v_j}) = \varphi'(f(\underline{v_i}), f(\underline{v_j}))$ $\forall\, 1 \leq i, j \leq n$.

Soluzione. Se f è un'isometria, detta $\mathcal{B}$ una base di V, $\mathcal{B}' = f(\mathcal{B})$ è una base di V' dal momento che f è anche un isomorfismo. Inoltre, dacché f è un'isometria, vale sicuramente che $\varphi(\underline{v_i}, \underline{v_j}) = \varphi'(f(\underline{v_i}), f(\underline{v_j}))$ $\forall\, 1 \leq i, j \leq n$.

Sia ora assunto per ipotesi che $\forall$ base $\mathcal{B} = \{\underline{v_1}, \ldots, \underline{v_n}\}$ di V, $\mathcal{B}' = \{f(\underline{v_1}), \ldots, f(\underline{v_n})\}$ è una base di V' e $\varphi(\underline{v_i}, \underline{v_j}) = \varphi'(f(\underline{v_i}), f(\underline{v_j}))$ $\forall\, 1 \leq i, j \leq n$. Allora, analogamente a prima, detta $\mathcal{B} = \{\underline{v_1}, \ldots, \underline{v_n}\}$ una base di V, $\mathcal{B}' = f(\mathcal{B})$ è una base di V', e in quanto tale, per ipotesi, è tale che $\varphi(\underline{v_i}, \underline{v_j}) = \varphi'(f(\underline{v_i}), f(\underline{v_j}))$ $\forall\, 1 \leq i, j \leq n$.

Sia infine assunto per ipotesi che $\exists$ base $\mathcal{B} = \{\underline{v_1}, \ldots, \underline{v_n}\}$ di V tale che $\mathcal{B}' = \{f(\underline{v_1}), \ldots, f(\underline{v_n})\}$ è una base di V' e $\varphi(\underline{v_i}, \underline{v_j}) = \varphi'(f(\underline{v_i}), f(\underline{v_j}))$ $\forall\, 1 \leq i, j \leq n$. Siano $\underline{v}$, $\underline{w} \in V$. Allora $\exists\, a_1$, ..., a_n, b_1, ..., $b_n \in \mathbb{K}$ tali che $\underline{v} = a_1\underline{v_1} + \ldots + a_n\underline{v_n}$ e $\underline{w} = b_1\underline{v_1} + \ldots + b_n\underline{v_n}$. Si ricava pertanto che:

$$\varphi'(f(\underline{v}), f(\underline{w})) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_i b_j\, \varphi'(f(\underline{v_i}), f(\underline{v_j})) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_i b_j\, \varphi(\underline{v_i}, \underline{v_j}) = \varphi(\underline{v}, \underline{w}),$$

da cui la tesi.

Proposizione 2.0.17

Sono equivalenti le seguenti affermazioni:

(i) V e V' sono isometrici;

(ii) $\forall$ base $\mathcal{B}$ di V, base $\mathcal{B}'$ di V', $M_{\mathcal{B}}(\varphi)$ e $M_{\mathcal{B}'}(\varphi')$ sono congruenti;

(iii) $\exists$ base $\mathcal{B}$ di V, base $\mathcal{B}'$ di V' tale che $M_{\mathcal{B}}(\varphi)$ e $M_{\mathcal{B}'}(\varphi')$ sono congruenti.

Dimostrazione. Se V e V' sono isometrici, sia $f : V \to V'$ un'isometria. Sia $\mathcal{B} = \{\underline{v_1}, \ldots, \underline{v_n}\}$ una base di V. Allora, poiché f è anche un isomorfismo, $\mathcal{B}' = f(\mathcal{B})$ è una base di V tale che $\varphi(\underline{v_i}, \underline{v_j}) = \varphi'(f(\underline{v_i}), f(\underline{v_j}))$ $\forall\, 1 \leq i, j \leq n$. Pertanto $M_{\mathcal{B}}(\varphi) = M_{\mathcal{B}'}(\varphi')$. Si conclude allora che, cambiando base in V (o in V'), la matrice associata al prodotto scalare varia per congruenza dalla formula di cambiamento di base per il prodotto scalare, da cui si ricava che per ogni scelta di $\mathcal{B}$ base di V e di $\mathcal{B}'$ base di V', $M_{\mathcal{B}}(\varphi) \cong M_{\mathcal{B}'}(\varphi')$. Inoltre, se tale risultato è vero per ogni $\mathcal{B}$ base di V e di $\mathcal{B}'$ base di V', dal momento che sicuramente esistono due basi $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$ di V e V', vale anche (ii) $\implies$ (iii).

Si dimostra ora (iii) $\implies$ (i). Per ipotesi $M_{\mathcal{B}}(\varphi) \cong M_{\mathcal{B}'}(\varphi')$, quindi $\exists\, P \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{K}) \mid M_{\mathcal{B}'}(\varphi') = P^\top M_{\mathcal{B}}(\varphi) P$. Allora $\exists\, \mathcal{B}''$ base di V' tale che $P = M_{\mathcal{B}''}^{\mathcal{B}'}(\mathrm{Id}_V)$, da cui $P^{-1} = M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}''}(\varphi)$. Per la formula di cambiamento di base del prodotto scalare, $M_{\mathcal{B}''}(\varphi) = (P^{-1})^\top M_{\mathcal{B}'} P^{-1} = M_{\mathcal{B}}(\varphi)$. Detta $\mathcal{B}'' = \{\underline{w_1}, \ldots, \underline{w_n}\}$, si costruisce allora l'isomorfismo $f : V \to V'$ tale che $f(\underline{v_i}) = \underline{w_i}$ $\forall\, 1 \leq i \leq n$.. Dal momento che per costruzione $M_{\mathcal{B}}(\varphi) = M_{\mathcal{B}''}(\varphi')$, $\varphi(\underline{v_i}, \underline{v_j}) = \varphi'(\underline{w_i}, \underline{w_j}) = \varphi'(f(\underline{v_i}), f(\underline{v_j}))$ $\forall\, 1 \leq i, j \leq n$. Si conclude dunque che $\varphi(\underline{v}, \underline{w}) = \varphi'(f(\underline{v}), f(\underline{w}))$ $\forall\, \underline{v}, \underline{w} \in V$, e dunque che f è un'isometria, come desiderato dalla tesi. □

Proposizione 2.0.18

(V, φ) e (V', φ') spazi vettoriali su $\mathbb{R}$ sono isometrici $\iff$ φ e φ' hanno la stessa segnatura.

Dimostrazione.

($\implies$) Per la precedente proposizione, esistono due basi $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$, una di V e una di V', tali che $M_{\mathcal{B}}(\varphi) \cong M_{\mathcal{B}'}(\varphi)$. Allora queste due matrici condividono la stessa segnatura, e così quindi anche φ e φ'.

($\impliedby$) Se φ e φ' hanno la stessa segnatura, esistono due basi $\mathcal{B} = \{\underline{v_1}, \ldots, \underline{v_n}\}$ e $\mathcal{B}' = \{\underline{w_1}, \ldots, \underline{w_n}\}$, una di V e una di V', tali che $M = M_{\mathcal{B}}(\varphi) = M_{\mathcal{B}'}(\varphi')$ e che M è una matrice di Sylvester. Allora si costruisce $f : V \to V'$ tale che $f(\underline{v_i}) = \underline{w_i}$. Esso è un isomorfismo, e per costruzione $\varphi(\underline{v_i}, \underline{v_j}) = \varphi'(\underline{w_i}, \underline{w_j}) = \varphi'(f(\underline{v_i}), f(\underline{v_j}))$ $\forall\, 1 \leq i, j \leq n$, da cui si conclude che $\varphi(\underline{v}, \underline{w}) = \varphi'(f(\underline{v}), f(\underline{w}))$ $\forall\, \underline{v}$, $\underline{w} \in V$, e quindi che V e V' sono isometrici. □

Definizione 2.0.19. (sottospazio isotropo) Sia W un sottospazio di V. Allora W si dice **sottospazio isotropo** di V se $\varphi|_W = 0$.

Osservazione 2.0.20.
- $V^\perp$ è un sottospazio isotropo di V.
- $\underline{v}$ è un vettore isotropo $\iff$ $W = \mathrm{Span}(\underline{v})$ è un sottospazio isotropo di V.
- $W \subseteq V$ è isotropo $\iff$ $W \subseteq W^\perp$.

Proposizione 2.0.21

Sia φ non degenere. Se W è un sottospazio isotropo di V, allora $\dim W \leq \frac{1}{2} \dim V$.

Dimostrazione. Poiché W è un sottospazio isotropo di V, $W \subseteq W^\perp \implies \dim W \leq \dim W^\perp$. Allora, poiché φ è non degenere, $\dim W + \dim W^\perp = \dim V$, $\dim W \leq \dim V - \dim W$, da cui $\dim W \leq \frac{1}{2} \dim V$. □

Definizione 2.0.22. Si definisce **indice di Witt** $W(\varphi)$ di (V, φ) come la massima dimensione di un sottospazio isotropo.

Osservazione 2.0.23.
- Se $\varphi > 0$ o $\varphi < 0$, $W(\varphi) = 0$.

Proposizione 2.0.24

Sia $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Sia φ non degenere e sia $\sigma(\varphi) = (\iota_+(\varphi), \iota_-(\varphi), 0)$. Allora $W(\varphi) = \min\{\iota_+(\varphi), \iota_-(\varphi)\}$.

Dimostrazione. Senza perdità di generalità si assuma $\iota_-(\varphi) \leq \iota_+(\varphi)$ (il caso $\iota_-(\varphi) > \iota_+(\varphi)$ è analogo). Sia W un sottospazio con $\dim W > \iota_-(\varphi)$. Sia W^+ un sottospazio con $\dim W^+ = \iota_+(\varphi)$ e $\varphi|_{W^+} > 0$. Allora, per la formula di Grassmann, $\dim W + \dim W^+ > n \implies \dim W + \dim W^+ > \dim W + \dim W^+ - \dim(W \cap W^+) \implies \dim(W \cap W^+) > 0$. Quindi $\exists\, \underline{w} \in W$, $\underline{w} \neq \underline{0}$ tale che $\varphi(\underline{w}, \underline{w}) > 0$, da cui si ricava che W non è isotropo. Pertanto $W(\varphi) \leq \iota_-(\varphi)$.

Sia $a := \iota_+(\varphi)$ e sia $b := \iota_-(\varphi)$. Sia ora $\mathcal{B} = \{\underline{v_1}, \ldots, \underline{v_a}, \underline{w_1}, \ldots, \underline{w_b}\}$ una base tale per cui $M_{\mathcal{B}}(\varphi)$ è la matrice di Sylvester per φ. Siano $\underline{v_1}$, ..., $\underline{v_a}$ tali che $\varphi(\underline{v_i}, \underline{v_i}) = 1$ con $1 \leq i \leq a$. Analogamente siano $\underline{w_1}$, ..., $\underline{w_b}$ tali che $\varphi(\underline{w_i}, \underline{w_i}) = -1$ con $1 \leq i \leq b$. Detta allora $\mathcal{B}' = \{\underline{v_1}' := \underline{v_1} + \underline{w_1}, \ldots, \underline{v_b}' := \underline{v_b} + \underline{w_b}\}$, sia $W = \operatorname{Span}(\mathcal{B}')$.

Si osserva che $\mathcal{B}'$ è linearmente indipendente, e dunque che $\dim W = \iota_-$. Inoltre $\varphi(\underline{v_i}', \underline{v_j}') = \varphi(\underline{v_i} + \underline{w_i}, \underline{v_j} + \underline{w_j})$. Se $i \neq j$, allora $\varphi(\underline{v_i}', \underline{v_j}') = 0$, dal momento che i vettori di $\mathcal{B}$ sono a due a due ortogonali tra loro. Se invece $i = j$, allora $\varphi(\underline{v_i}', \underline{v_j}') = \varphi(\underline{v_i}, \underline{v_i}) + \varphi(\underline{w_i}, \underline{w_i}) = 1 - 1 = 0$. Quindi $M_{\mathcal{B}'}(\varphi|_W) = 0$, da cui si conclude che $\varphi|_W = 0$. Pertanto $W(\varphi) \geq i_-(\varphi)$, e quindi $W(\varphi) = i_-(\varphi)$, da cui la tesi. $\square$

3 Prodotti hermitiani, spazi euclidei e teorema spettrale

Nota — Nel corso del documento, per V si intenderà uno spazio vettoriale di dimensione finita n e per φ un suo prodotto, hermitiano o scalare dipendentemente dal contesto.

Definizione 3.0.1. (prodotto hermitiano) Sia $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Una mappa $\varphi : V \times V \to \mathbb{C}$ si dice **prodotto hermitiano** se:

(i) φ è $\mathbb{C}$-lineare nel secondo argomento, ossia se $\varphi(\underline{v}, \underline{u} + \underline{w}) = \varphi(\underline{v}, \underline{u}) + \varphi(\underline{v}, \underline{w})$ e $\varphi(\underline{v}, a\underline{w}) = a\,\varphi(\underline{v}, \underline{w})$,

(ii) $\varphi(\underline{u}, \underline{w}) = \overline{\varphi(\underline{w}, \underline{u})}$.

Definizione 3.0.2. (prodotto hermitiano canonico in $\mathbb{C}^n$) Si definisce **prodotto hermitiano canonico** di $\mathbb{C}^n$ il prodotto $\varphi : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ tale per cui, detti $\underline{v} = (z_1 \cdots z_n)^\top$ e $\underline{w} = (w_1 \cdots w_n)^\top$, $\varphi(\underline{v}, \underline{w}) = \sum_{i=1}^n \overline{z_i} w_i$.

Osservazione 3.0.3.
- $\varphi(\underline{u} + \underline{w}, \underline{v}) = \overline{\varphi(\underline{v}, \underline{u} + \underline{w})} = \overline{\varphi(\underline{v}, \underline{u}) + \varphi(\underline{v}, \underline{w})} = \overline{\varphi(\underline{v}, \underline{u})} + \overline{\varphi(\underline{v}, \underline{u})} = \varphi(\underline{w}, \underline{v}) + \varphi(\underline{u}, \underline{v})$, ossia φ è additiva anche nel primo argomento.
- $\varphi(a\underline{v}, \underline{w}) = \overline{\varphi(\underline{w}, a\underline{v})} = \overline{a}\overline{\varphi(\underline{w}, \underline{v})} = \overline{a}\,\varphi(\underline{v}, \underline{w})$.
- $\varphi(\underline{v}, \underline{v}) = \overline{\varphi(\underline{v}, \underline{v})}$, e quindi $\varphi(\underline{v}, \underline{v}) \in \mathbb{R}$.
- Sia $\underline{v} = \sum_{i=1}^n x_i \underline{v_i}$ e sia $\underline{w} = \sum_{i=1}^n y_i \underline{v_i}$, allora $\varphi(\underline{v}, \underline{w}) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \overline{x_i} y_i \varphi(\underline{v_i}, \underline{v_j})$.
- $\varphi(\underline{v}, \underline{w}) = 0 \iff \varphi(\underline{w}, \underline{v}) = 0$.

Proposizione 3.0.4

Data la forma quadratica $q : V \to \mathbb{R}$ del prodotto hermitiano φ tale che $q(\underline{v}) = \varphi(\underline{v}, \underline{v}) \in \mathbb{R}$, tale forma quadratica individua univocamente il prodotto hermitiano φ.

Dimostrazione. Innanzitutto si osserva che:

$$\varphi(\underline{v}, \underline{w}) = \frac{\varphi(\underline{v}, \underline{w}) + \overline{\varphi(\underline{v}, \underline{w})}}{2} + \frac{\varphi(\underline{v}, \underline{w}) . \overline{\varphi(\underline{v}, \underline{w})}}{2}.$$

Si considerano allora le due identità:

$$q(\underline{v} + \underline{w}) - q(\underline{v}) - q(\underline{w}) = \varphi(\underline{v}, \underline{w}) + \overline{\varphi(\underline{w}, \underline{v})} = 2\,\Re(\varphi(\underline{v}, \underline{w})),$$

$$q(i\underline{v}+\underline{w})-q(\underline{v})-q(\underline{w})=-i(\varphi(\underline{v},\underline{w})-\overline{\varphi(\underline{v},\underline{w})})=2\,\Im(\varphi(\underline{v},\underline{w})),$$

da cui si conclude che il prodotto φ è univocamente determinato dalla sua forma quadratica. □

Definizione 3.0.5. Si definisce **matrice aggiunta** di $A \in M(n, \mathbb{K})$ la matrice coniugata della trasposta di A, ossia:

$$A^* = \overline{A^\top} = \overline{A}^\top.$$

Osservazione 3.0.6. Per quanto riguarda la matrice aggiunta valgono le principali proprietà della matrice trasposta:

- $(A+B)^* = A^* + B^*$,
- $(AB)^* = B^* A^*$,
- $(A^{-1})^* = (A^*)^{-1}$, se A è invertibile.

Definizione 3.0.7. (matrice associata del prodotto hermitiano) Analogamente al caso del prodotto scalare, data una base $\mathcal{B} = \{\underline{v_1}, \ldots, \underline{v_n}\}$ si definisce come **matrice associata del prodotto hermitiano** φ la matrice $M_\mathcal{B}(\varphi) = (\varphi(\underline{v_i}, \underline{v_j}))_{i,j=1—n}$.

Osservazione 3.0.8. Si osserva che, analogamente al caso del prodotto scalare, vale la seguente identità:

$$\varphi(\underline{v}, \underline{w}) = [\underline{v}]_\mathcal{B}^* M_\mathcal{B}(\varphi)[\underline{w}]_\mathcal{B}.$$

Proposizione 3.0.9

(formula del cambiamento di base per i prodotto hermitiani) Siano $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$ due basi di V. Allora vale la seguente identità:

$$M_{\mathcal{B}'} = M_\mathcal{B}^{\mathcal{B}'}(\mathrm{Id}_V)^* M_\mathcal{B}(\varphi) M_\mathcal{B}^{\mathcal{B}'}(\mathrm{Id}_V).$$

Dimostrazione. Siano $\mathcal{B} = \{\underline{v_1}, \ldots, \underline{v_n}\}$ e $\mathcal{B}' = \{\underline{w_1}, \ldots, \underline{w_n}\}$. Allora $\varphi(\underline{w_i}, \underline{w_j}) = [\underline{w_i}]_\mathcal{B}^* M_\mathcal{B}(\varphi)[\underline{w_j}]_\mathcal{B} = \left(M_\mathcal{B}^{\mathcal{B}'}(\mathrm{Id}_V)^i\right)^* M_\mathcal{B}(\varphi) M_\mathcal{B}^{\mathcal{B}'}(\mathrm{Id}_V)^j = \left(M_\mathcal{B}^{\mathcal{B}'}(\mathrm{Id}_V)\right)_i^* M_\mathcal{B}(\varphi) M_\mathcal{B}^{\mathcal{B}'}(\mathrm{Id}_V)^j$, da cui si ricava l'identità desiderata. □

Definizione 3.0.10. (radicale di un prodotto hermitiano) Analogamente al caso del prodotto scalare, si definisce il **radicale** del prodotto φ come il seguente sottospazio:

$$V^\perp = \{\underline{v} \in V \mid \varphi(\underline{v}, \underline{w}) = 0 \;\forall\, \underline{w} \in V\}.$$

Proposizione 3.0.11

Sia $\mathcal{B}$ una base di V e φ un prodotto hermitiano. Allora $V^\perp = [\cdot]_\mathcal{B}^{-1}(\operatorname{Ker} M_\mathcal{B}(\varphi))$[a].

[a] Stavolta non è sufficiente considerare la mappa $f : V \to V^*$ tale che $f(\underline{v}) = [\underline{w} \mapsto \varphi(\underline{v}, \underline{w})]$, dal momento che f non è lineare, bensì antilineare, ossia $f(a\underline{v}) = \overline{a} f(\underline{v})$.

Dimostrazione. Sia $\mathcal{B} = \{\underline{v_1}, \ldots, \underline{v_n}\}$ e sia $\underline{v} \in V^\perp$. Siano a_1, ..., $a_n \in \mathbb{K}$ tali che $\underline{v} = a_1\underline{v_1} + \ldots + a_n\underline{v_n}$. Allora, poiché $\underline{v} \in V$, $0 = \varphi(\underline{v_i}, \underline{v}) = a_1\varphi(\underline{v_i}, \underline{v_1}) + \ldots + a_n\varphi(\underline{v_i}, \underline{v_n}) = M_i[\underline{v}]_\mathcal{B}$, da cui si ricava che $[\underline{v}]_\mathcal{B} \in \operatorname{Ker} M_\mathcal{B}(\varphi)$, e quindi che $V^\perp \subseteq [\cdot]_\mathcal{B}^{-1}(\operatorname{Ker} M_\mathcal{B}(\varphi))$.

Sia ora $\underline{v} \in V$ tale che $[\underline{v}]_\mathcal{B} \in \operatorname{Ker} M_\mathcal{B}(\varphi)$. Allora, per ogni $\underline{w} \in V$, $\varphi(\underline{w}, \underline{v}) = [\underline{w}]_\mathcal{B}^* M_\mathcal{B}(\varphi)[\underline{v}]_\mathcal{B} = [\underline{w}]_\mathcal{B}^* 0 = 0$, da cui si conclude che $\underline{v} \in V^\perp$, e quindi che $V^\perp \supseteq [\cdot]_\mathcal{B}^{-1}(\operatorname{Ker} M_\mathcal{B}(\varphi))$, da cui $V^\perp = [\cdot]_\mathcal{B}^{-1}(\operatorname{Ker} M_\mathcal{B}(\varphi))$, ossia la tesi. $\square$

Osservazione 3.0.12. Come conseguenza della proposizione appena dimostrata, valgono le principali proprietà già viste per il prodotto scalare.

▶ $\det(M_\mathcal{B}(\varphi)) = 0 \iff V^\perp \neq \{\underline{0}\} \iff \varphi$ è degenere,
▶ Vale il teorema di Lagrange, e quindi quello di Sylvester, benché con alcune accortezze: si introduce, come nel caso di $\mathbb{R}$, il concetto di segnatura, che diventa l'invariante completo della nuova congruenza hermitiana, che ancora una volta si dimostra essere una relazione di equivalenza.
▶ Come mostrato nei momenti finali del documento (vd. *Esercizio 3*), vale la formula delle dimensioni anche nel caso del prodotto hermitiano.

Definizione 3.0.13. (restrizione ai reali di uno spazio) Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{C}$ con base $\mathcal{B}$. Si definisce allora lo spazio $V_\mathbb{R}$, detto **spazio di restrizione su** $\mathbb{R}$ di V, come uno spazio su $\mathbb{R}$ generato da $\mathcal{B}_\mathbb{R} = \mathcal{B} \cup i\mathcal{B}$.

Esempio 3.0.14

Si consideri $V = \mathbb{C}^3$. Una base di $\mathbb{C}^3$ è chiaramente $\{\underline{e_1}, \underline{e_2}, \underline{e_3}\}$. Allora $V_\mathbb{R}$ sarà uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ generato dai vettori $\{\underline{e_1}, \underline{e_2}, \underline{e_3}, i\underline{e_1}, i\underline{e_2}, i\underline{e_3}\}$.

Osservazione 3.0.15. Si osserva che lo spazio di restrizione su $\mathbb{R}$ e lo spazio di partenza condividono lo stesso insieme di vettori. Infatti, $\mathrm{Span}_{\mathbb{C}}(\mathcal{B}) = \mathrm{Span}_{\mathbb{R}}(\mathcal{B} \cup i\mathcal{B})$. Ciononostante, $\dim V_{\mathbb{R}} = 2 \dim V$ [a], se $\dim V \in \mathbb{N}$.

[a] Si sarebbe potuto ottenere lo stesso risultato utilizzando il teorema delle torri algebriche: $[V_{\mathbb{R}} : \mathbb{R}] = [V : \mathbb{C}][\mathbb{C} : \mathbb{R}] = 2[V : \mathbb{C}]$.

Definizione 3.0.16. (complessificazione di uno spazio) Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$. Si definisce allora lo **spazio complessificato** $V_{\mathbb{C}} = V \times V$ su $\mathbb{C}$ con le seguenti operazioni:

- $(\underline{v}, \underline{w}) + (\underline{v}', \underline{w}') = (\underline{v} + \underline{v}', \underline{w} + \underline{w}')$,
- $(a + bi)(\underline{v}, \underline{w}) = (a\underline{v} - b\underline{w}, a\underline{w} + b\underline{v})$.

Osservazione 3.0.17. La costruzione dello spazio complessificato emula in realtà la costruzione di $\mathbb{C}$ come spazio $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Infatti se $z = (c, d)$, vale che $(a + bi)(c, d) = (ac - bd, ad + bc)$, mentre si mantiene l'usuale operazione di addizione. In particolare si può identificare l'insieme $V \times \{\underline{0}\}$ come V, mentre $\{\underline{0}\} \times V$ viene identificato come l'insieme degli immaginari iV di $V_{\mathbb{C}}$. Infine, moltiplicare per uno scalare reale un elemento di $V \times \{\underline{0}\}$ equivale a moltiplicare la sola prima componente con l'usuale operazione di moltiplicazione di V. Allora, come accade per $\mathbb{C}$, si può sostituire la notazione $(\underline{v}, \underline{w})$ con la più comoda notazione $\underline{v} + i\underline{w}$.

Osservazione 3.0.18. Sia $\mathcal{B} = \{\underline{v_1}, \ldots, \underline{v_n}\}$ una base di V. Innanzitutto si osserva che $(a + bi)(\underline{v}, \underline{0}) = (a\underline{v}, b\underline{v})$. Pertanto si può concludere che $\mathcal{B} \times \{\underline{0}\}$ è una base dello spazio complessificato $V_{\mathbb{C}}$ su $\mathbb{C}$.

Infatti, se $(a_1 + b_1 i)(\underline{v_1}, \underline{0}) + \ldots + (a_n + b_n i)(\underline{v_n}, \underline{0}) = (\underline{0}, \underline{0})$, allora $(a_1\underline{v_1} + \ldots + a_n\underline{v_n}, b_1\underline{v_1} + \ldots + b_n\underline{v_n}) = (\underline{0}, \underline{0})$. Poiché però $\mathcal{B}$ è linearmente indipendente per ipotesi, l'ultima identità implica che $a_1 = \cdots = a_n = b_1 = \cdots = b_n = 0$, e quindi che $\mathcal{B} \times \{\underline{0}\}$ è linearmente indipendente.

Inoltre $\mathcal{B} \times \{\underline{0}\}$ genera $V_{\mathbb{C}}$. Se infatti $\underline{v} = (\underline{u}, \underline{w})$, e vale che:

$$\underline{u} = a_1\underline{v_1} + \ldots + a_n\underline{v_n}, \quad \underline{w} = b_1\underline{v_1} + \ldots + b_n\underline{v_n},$$

allora $\underline{v} = (a_1 + b_1 i)(\underline{v_1}, \underline{0}) + \ldots + (a_n + b_n i)(\underline{v_n}, \underline{0})$. Quindi $\dim V_{\mathbb{C}} = \dim V$.

Definizione 3.0.19. Sia f un'applicazione $\mathbb{C}$-lineare di V spazio vettoriale su $\mathbb{C}$. Allora si definisce la **restrizione su** $\mathbb{R}$ di f, detta $f_{\mathbb{R}} : V_{\mathbb{R}} \to V_{\mathbb{R}}$, in modo tale che $f_{\mathbb{R}}(\underline{v}) = f(\underline{v})$.

Osservazione 3.0.20. Sia $\mathcal{B} = \{\underline{v_1}, \ldots, \underline{v_n}\}$ una base di V su $\mathbb{C}$. Sia $A = M_{\mathcal{B}}(f)$. Si osserva allora che, se $\mathcal{B}' = \mathcal{B} \cup i\mathcal{B}$ e $A = A' + iA''$ con A', $A'' \in M(n, \mathbb{R})$, vale la seguente identità:

$$M_{\mathcal{B}'}(f_{\mathbb{R}}) = \left(\begin{array}{c|c} A' & -A'' \\ A'' & A' \end{array}\right).$$

Infatti, se $f(\underline{v_i}) = (a_1 + b_1 i)\underline{v_1} + \ldots + (a_n + b_n i)\underline{v_n}$, vale che $f_\mathbb{R}(\underline{v_i}) = a_1\underline{v_1} + \ldots + a_n\underline{v_n} + b_1(i\underline{v_1}) + \ldots + b_n(i\underline{v_n})$, mentre $f_\mathbb{R}(i\underline{v_i}) = if(\underline{v_i}) = -b_1\underline{v_1} + \ldots - b_n\underline{v_n} + a_1(i\underline{v_1}) + \ldots + a_n(i\underline{v_n})$.

Definizione 3.0.21. Sia f un'applicazione $\mathbb{R}$-lineare di V spazio vettoriale su $\mathbb{R}$. Allora si definisce la **complessificazione** di f, detta $f_\mathbb{C} : V_\mathbb{C} \to V_\mathbb{C}$, in modo tale che $f_\mathbb{C}(\underline{v} + i\underline{w}) = f(\underline{v}) + if(\underline{w})$.

Osservazione 3.0.22. Si verifica infatti che $f_\mathbb{C}$ è $\mathbb{C}$-lineare.

- $f_\mathbb{C}((\underline{v_1} + i\underline{w_1}) + (\underline{v_2} + i\underline{w_2})) = f_\mathbb{C}((\underline{v_1} + \underline{v_2}) + i(\underline{w_1} + \underline{w_2})) = f(\underline{v_1} + \underline{v_2}) + if(\underline{w_1} + \underline{w_2}) = (f(\underline{v_1}) + if(\underline{w_1})) + (f(\underline{v_2}) + if(\underline{w_2})) = f_\mathbb{C}(\underline{v_1} + i\underline{w_1}) + f_\mathbb{C}(\underline{v_2} + i\underline{w_2})$.
- $f_\mathbb{C}((a + bi)(\underline{v} + i\underline{w})) = f_\mathbb{C}(a\underline{v} - b\underline{w} + i(a\underline{w} + b\underline{v})) = f(a\underline{v} - b\underline{w}) + if(a\underline{w} + b\underline{v}) = af(\underline{v}) - bf(\underline{w}) + i(af(\underline{w}) + bf(\underline{v})) = (a + bi)(f(\underline{v}) + if(\underline{w})) = (a + bi)f_\mathbb{C}(\underline{v} + i\underline{w})$.

Proposizione 3.0.23

Sia $f_\mathbb{C}$ la complessificazione di $f \in \mathrm{End}(V)$, dove V è uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$. Sia inoltre $\mathcal{B} = \{\underline{v_1}, \ldots, \underline{v_n}\}$ una base di V. Valgono allora i seguenti risultati:

(i) $(f_\mathbb{C})_\mathbb{R}|_V$ assume gli stessi valori di f,

(ii) $M_\mathcal{B}(f_\mathbb{C}) = M_\mathcal{B}(f) \in M(n, \mathbb{R})$,

(iii) $M_{\mathcal{B} \cup i\mathcal{B}}((f_\mathbb{C})_\mathbb{R}) = \left(\begin{array}{c|c} M_\mathcal{B}(f) & 0 \\ \hline 0 & M_\mathcal{B}(f) \end{array}\right)$.

Dimostrazione. Si dimostrano i risultati separatamente.

(i) Si osserva che $(f_\mathbb{C})_\mathbb{R}(\underline{v_i}) = f_\mathbb{C}(\underline{v_i}) = f(\underline{v_i})$. Dal momento che $(f_\mathbb{C})_\mathbb{R}$ è $\mathbb{R}$-lineare, si conclude che $(f_\mathbb{C})_\mathbb{R}$ assume gli stessi valori di f.

(ii) Dal momento che $\mathcal{B}$, nell'identificazione di $(\underline{v}, \underline{0})$ come $\underline{v}$, è sempre una base di $V_\mathbb{C}$, e $f_\mathbb{C}(\underline{v_i}) = f(\underline{v_i})$, chiaramente $[f_\mathbb{C}(\underline{v_i})]_\mathcal{B} = [f(\underline{v_i})]_\mathcal{B}$, e quindi $M_\mathcal{B}(f_\mathbb{C}) = M_\mathcal{B}(f)$, dove si osserva anche che $M_\mathcal{B}(f) \in M(n, \mathbb{R})$, essendo V uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$.

(iii) Sia $f(\underline{v_i}) = a_1\underline{v_1} + \ldots + a_n\underline{v_n}$ con a_1, ..., $a_n \in \mathbb{R}$. Come osservato in (i), $(f_\mathbb{C})_\mathbb{R}|_\mathcal{B} = (f_\mathbb{C})_\mathbb{R}|_\mathcal{B}$, e quindi la prima metà di $M_{\mathcal{B} \cup i\mathcal{B}}((f_\mathbb{C})_\mathbb{R})$ è formata da due blocchi: uno verticale coincidente con $M_\mathcal{B}(f)$ e un altro completamente nullo, dal momento che non compare alcun termine di $i\mathcal{B}$ nella scrittura di $(f_\mathbb{C})_\mathbb{R}(\underline{v_i})$. Al contrario, per $i\mathcal{B}$, $(f_\mathbb{C})_\mathbb{R}(i\underline{v_i}) = f_\mathbb{C}(i\underline{v_i}) = if(\underline{v_i}) = a_1(i\underline{v_1}) + \ldots + a_n(i\underline{v_n})$; pertanto la seconda metà della matrice avrà i due blocchi della prima metà, benché scambiati.

□

Osservazione 3.0.24. Dal momento che $M_\mathcal{B}(f_\mathbb{C}) = M_\mathcal{B}(f)$, $f_\mathbb{C}$ e f condividono lo stesso polinomio caratteristico e vale che $\mathrm{sp}(f) \subseteq \mathrm{sp}(f_\mathbb{C})$, dove vale l'uguaglianza se e solo se tale polinomio caratteristico è completamente riducibile in $\mathbb{R}$. Inoltre, se V_λ è l'autospazio su V dell'autovalore λ, l'autospazio su $V_\mathbb{C}$, rispetto a $f_\mathbb{C}$, è invece $V_{\mathbb{C}\lambda} = V_\lambda + iV_\lambda$, la cui dimensione rimane invariata rispetto a V_λ, ossia $\dim V_\lambda = \dim V_{\mathbb{C}\lambda}$ (infatti, analogamente a prima, una base di V_λ può essere identificata come base anche per $V_{\mathbb{C}\lambda}$).

Proposizione 3.0.25

Sia $f_\mathbb{C}$ la complessificazione di $f \in \mathrm{End}(V)$, dove V è uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$. Sia inoltre $\mathcal{B} = \{\underline{v_1}, \ldots, \underline{v_n}\}$ una base di V. Allora un endomorfismo $\tilde{g} : V_\mathbb{C} \to V_\mathbb{C}$ complessifica un endomorfismo $g \in \mathrm{End}(V) \iff M_\mathcal{B}(\tilde{g}) \in M(n, \mathbb{R})$.

Dimostrazione. Se $\tilde{g}$ complessifica $g \in \mathrm{End}(V)$, allora, per la proposizione precedente, $M_\mathcal{B}(\tilde{g}) = M_\mathcal{B}(g) \in M(n, \mathbb{R})$. Se invece $A = M_\mathcal{B}(\tilde{g}) \in M(n, \mathbb{R})$, si considera $g = M_\mathcal{B}^{-1}(A) \in \mathrm{End}(V)$. Si verifica facilmente che $\tilde{g}$ non è altro che il complessificato di tale g:

- $\tilde{g}(\underline{v_i}) = g(\underline{v_i})$, dove l'uguaglianza è data dal confronto delle matrici associate, e quindi $\tilde{g}|_V = g$;
- $\tilde{g}(\underline{v} + i\underline{w}) = \tilde{g}(\underline{v}) + i\tilde{g}(\underline{w}) = g(\underline{v}) + ig(\underline{w})$, da cui la tesi.

□

Proposizione 3.0.26

Sia φ un prodotto scalare di V spazio vettoriale su $\mathbb{R}$. Allora esiste un unico prodotto hermitiano $\varphi_\mathbb{C} : V_\mathbb{C} \times V_\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ che estende φ (ossia tale che $\varphi_\mathbb{C}|_{V \times V} = \varphi$), il quale assume la stessa segnatura di φ.

Dimostrazione. Sia $\mathcal{B}$ una base di Sylvester per φ. Si consideri allora il prodotto $\varphi_\mathbb{C}$ tale che:

$$\varphi_\mathbb{C}(\underline{v_1} + i\underline{w_1}, \underline{v_2} + i\underline{w_2}) = \varphi(\underline{v_1}, \underline{v_2}) + \varphi(\underline{w_1}, \underline{w_2}) + i(\varphi(\underline{v_1}, \underline{w_1}) - \varphi(\underline{w_1}, \underline{v_2})).$$

Chiaramente $\varphi_\mathbb{C}|_{V \times V} = \varphi$. Si verifica allora che $\varphi_\mathbb{C}$ è hermitiano:

- $\varphi_\mathbb{C}(\underline{v} + i\underline{w}, (\underline{v_1} + i\underline{w_1}) + (\underline{v_2} + i\underline{w_2})) = \varphi(\underline{v}, \underline{v_1} + \underline{v_2}) + \varphi(\underline{w}, \underline{w_1} + \underline{w_2}) + i(\varphi(\underline{v}, \underline{w_1} + \underline{w_2}) - \varphi(\underline{w}, \underline{v_1} + \underline{v_2})) = [\varphi(\underline{v}, \underline{v_1}) + \varphi(\underline{w}, \underline{w_1}) + i(\varphi(\underline{v}, \underline{w_1}) - \varphi(\underline{w}, \underline{v_1}))] + [\varphi(\underline{v}, \underline{v_2}) + \varphi(\underline{w}, \underline{w_2}) + i(\varphi(\underline{v}, \underline{w_2}) - \varphi(\underline{w}, \underline{v_2}))] = \varphi_\mathbb{C}(\underline{v} + i\underline{w}, \underline{v_1} + i\underline{w_1}) + \varphi_\mathbb{C}(\underline{v} + i\underline{w}, \underline{v_2} + i\underline{w_2})$ (additività nel secondo argomento),

- $\varphi_{\mathbb{C}}(\underline{v}+i\underline{w},(a+bi)(\underline{v_1}+i\underline{w_1})) = \varphi_{\mathbb{C}}(\underline{v}+i\underline{w}, a\underline{v_1}-b\underline{w_1}+i(b\underline{v_1}+a\underline{w_1})) = \varphi(\underline{v}, a\underline{v_1}-b\underline{w_1})+\varphi(\underline{w}, b\underline{v_1}+a\underline{w_1})+i(\varphi(\underline{v}, b\underline{v_1}+a\underline{w_1})-\varphi(\underline{w}, a\underline{v_1}-b\underline{w_1})) = a\varphi(\underline{v},\underline{v_1})-b\varphi(\underline{v},\underline{w_1})+b\varphi(\underline{w},\underline{v_1})+a\varphi(\underline{w},\underline{w_1})+i(b\varphi(\underline{v},\underline{v_1})+a\varphi(\underline{v},\underline{w_1})-a\varphi(\underline{w},\underline{v_1})+b\varphi(\underline{w},\underline{w_1})) = a(\varphi(\underline{v},\underline{v_1})+\varphi(\underline{w},\underline{w_1}))-b(\varphi(\underline{v},\underline{w_1})-\varphi(\underline{w},\underline{v_1}))+i(a(\varphi(\underline{v},\underline{w_1})-\varphi(\underline{w},\underline{v_1}))+b(\varphi(\underline{v},\underline{v_1})+\varphi(\underline{w},\underline{w_1}))) = (a+bi)(\varphi(\underline{v},\underline{v_1})+\varphi(\underline{w},\underline{w_1})+i(\varphi(\underline{v},\underline{w_1})-\varphi(\underline{w},\underline{v_1}))) = (a+bi)\varphi_{\mathbb{C}}(\underline{v}+\underline{w},\underline{v_1}+i\underline{w_1})$ (omogeneità nel secondo argomento),

- $\varphi_{\mathbb{C}}(\underline{v_1}+i\underline{w_1},\underline{v_2}+i\underline{w_2}) = \varphi(\underline{v_1},\underline{v_2})+\varphi(\underline{w_1},\underline{w_2})+i(\varphi(\underline{v_1},\underline{w_2})-\varphi(\underline{w_1},\underline{v_2})) = \overline{\varphi(\underline{v_1},\underline{v_2})+\varphi(\underline{w_1},\underline{w_2})+i(\varphi(\underline{w_1},\underline{v_2})-\varphi(\underline{v_1},\underline{w_2}))} = \overline{\varphi(\underline{v_2},\underline{v_1})+\varphi(\underline{w_2},\underline{w_1})+i(\varphi(\underline{v_2},\underline{w_1})-\varphi(\underline{w_2},\underline{v_1}))} = \overline{\varphi_{\mathbb{C}}(\underline{v_2}+\underline{w_2},\underline{v_1}+\underline{w_1})}$ (coniugio nello scambio degli argomenti).

Ogni prodotto hermitiano τ che estende il prodotto scalare φ ha la stessa matrice associata nella base $\mathcal{B}$, essendo $\tau(\underline{v_i},\underline{v_i}) = \varphi(\underline{v_i},\underline{v_i})$ vero per ipotesi. Pertanto τ è unico, e vale che $\tau = \varphi_{\mathbb{C}}$. Dal momento che $M_{\mathcal{B}}(\varphi_{\mathbb{C}}) = M_{\mathcal{B}}(\varphi)$ è una matrice di Sylvester, $\varphi_{\mathbb{C}}$ mantiene anche la stessa segnatura di φ. □

Teorema 3.0.27

(di rappresentazione di Riesz per il prodotto scalare) Sia V uno spazio vettoriale e sia φ un suo prodotto scalare non degenere. Allora per ogni $f \in V^*$ esiste un unico $\underline{v} \in V$ tale che $f(\underline{w}) = \varphi(\underline{v},\underline{w})\ \forall\,\underline{w} \in V$.

Dimostrazione. Si consideri l'applicazione a_φ. Poiché φ non è degenere, $\operatorname{Ker} a_\varphi = V^\perp = \{\underline{0}\}$, da cui si deduce che a_φ è un isomorfismo. Quindi $\forall\, f \in V^*$ esiste un unico $\underline{v} \in V$ tale per cui $a_\varphi(\underline{v}) = f$, e dunque tale per cui $\varphi(\underline{v},\underline{w}) = a_\varphi(\underline{v})(\underline{w}) = f(\underline{w})\ \forall\,\underline{w} \in V$. □

Dimostrazione costruttiva. Sia $\mathcal{B} = \{\underline{v_1},\ldots,\underline{v_n}\}$ una base ortogonale di V per φ. Allora $\mathcal{B}^*$ è una base di V^*. In particolare $f = f(\underline{v_1})\underline{v_1}^* + \ldots + f(\underline{v_n})\underline{v_n}^*$. Sia $\underline{v} = \frac{f(\underline{v_1})}{\varphi(\underline{v_1},\underline{v_1})}\underline{v_1} + \ldots + \frac{f(\underline{v_n})}{\varphi(\underline{v_n},\underline{v_n})}$. Detto $\underline{w} = a_1\underline{v_1} + \ldots + a_n\underline{v_n}$, si deduce che $\varphi(\underline{v},\underline{w}) = a_1 f(\underline{v_1}) + \ldots + a_n f(\underline{v_n}) = f(\underline{w})$. Se esistesse $\underline{v}' \in V$ con la stessa proprietà di $\underline{v}$, $\varphi(\underline{v},\underline{w}) = \varphi(\underline{v}',\underline{w}) \implies \varphi(\underline{v}-\underline{v}',\underline{w})\ \forall\,\underline{w} \in V$. Si deduce dunque che $\underline{v}-\underline{v}' \in V^\perp$, contenente solo $\underline{0}$ dacché φ è non degenere; e quindi si conclude che $\underline{v} = \underline{v}'$, ossia che esiste solo un vettore con la stessa proprietà di $\underline{v}$. □

Teorema 3.0.28

(di rappresentazione di Riesz per il prodotto hermitiano) Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{C}$ e sia φ un suo prodotto hermitiano non degenere. Allora per ogni $f \in V^*$ esiste un unico $\underline{v} \in V$ tale che $f(\underline{w}) = \varphi(\underline{v},\underline{w})\ \forall\,\underline{w} \in V$.

Dimostrazione. Sia $\mathcal{B} = \{\underline{v_1}, \ldots, \underline{v_n}\}$ una base ortogonale di V per φ. Allora $\mathcal{B}^*$ è una base di V^*. In particolare $f = f(\underline{v_1})\underline{v_1}^* + \ldots + f(\underline{v_n})\underline{v_n}^*$. Sia $\underline{v} = \frac{\overline{f(\underline{v_1})}}{\varphi(\underline{v_1},\underline{v_1})}\underline{v_1} + \ldots + \frac{\overline{f(\underline{v_n})}}{\varphi(\underline{v_n},\underline{v_n})}$. Detto $\underline{w} = a_1\underline{v_1} + \ldots + a_n\underline{v_n}$, si deduce che $\varphi(\underline{v}, \underline{w}) = a_1 f(\underline{v_1}) + \ldots + a_n f(\underline{v_n}) = f(\underline{w})$. Se esistesse $\underline{v}' \in V$ con la stessa proprietà di $\underline{v}$, $\varphi(\underline{v}, \underline{w}) = \varphi(\underline{v}', \underline{w}) \implies \varphi(\underline{v} - \underline{v}', \underline{w})\ \forall\, \underline{w} \in V$. Si deduce dunque che $\underline{v} - \underline{v}' \in V^\perp$, contenente solo $\underline{0}$ dacché φ è non degenere; e quindi si conclude che $\underline{v} = \underline{v}'$, ossia che esiste solo un vettore con la stessa proprietà di $\underline{v}$. □

Proposizione 3.0.29

Sia V uno spazio vettoriale con prodotto scalare φ non degenere. Sia $f \in \mathrm{End}(V)$. Allora esiste un unico endomorfismo $f_\varphi^\top : V \to V$, detto il **trasposto di** f e indicato con $f^\top$ in assenza di ambiguità[a], tale che:

$$a_\varphi \circ g = f^\top \circ a_\varphi,$$

ossia che:

$$\varphi(\underline{v}, f(\underline{w})) = \varphi(g(\underline{v}), \underline{w})\ \forall\, \underline{v}, \underline{w} \in V.$$

[a] Si tenga infatti in conto della differenza tra $f_\varphi^\top : V \to V$, di cui si discute nell'enunciato, e $f^\top : V^* \to V^*$ che invece è tale che $f^t op(g) = g \circ f$.

Dimostrazione. Si consideri $(f^\top \circ a_\varphi)(\underline{v}) \in V^*$. Per il teorema di rappresentazione di Riesz per il prodotto scalare, esiste un unico $\underline{v}'$ tale che $(f^\top \circ a_\varphi)(\underline{v})(\underline{w}) = \varphi(\underline{v}', \underline{w}) \implies \varphi(\underline{v}, f(\underline{w})) = \varphi(\underline{v}', \underline{w})\ \forall\, \underline{w} \in V$. Si costruisce allora una mappa $f_\varphi^\top : V \to V$ che associa a $\underline{v}$ tale $\underline{v}'$. Si dimostra che $f_\varphi^\top$ è un'applicazione lineare, e che dunque è un endomorfismo:

(i) Siano $\underline{v_1}$, $\underline{v_2} \in V$. Si deve dimostrare innanzitutto che $f_\varphi^\top(\underline{v_1}+\underline{v_2}) = f_\varphi^\top(\underline{v_1})+f_\varphi^\top(\underline{v_2})$, ossia che $\varphi(f_\varphi^\top(\underline{v_1}) + f_\varphi^\top(\underline{v_2}), \underline{w}) = \varphi(\underline{v_1} + \underline{v_2}, f(\underline{w}))\ \forall\, \underline{w} \in V$.

Si osservano le seguenti identità:

$$\varphi(\underline{v_1} + \underline{v_2}, f(\underline{w})) = \varphi(\underline{v_1}, f(\underline{w})) + \varphi(\underline{v_2}, f(\underline{w})) = (*),$$
$$\varphi(f_\varphi^\top(\underline{v_1}) + f_\varphi^\top(\underline{v_2}), \underline{w}) = \varphi(f_\varphi^\top(\underline{v_1}), \underline{w}) + \varphi(f_\varphi^\top(\underline{v_2}), \underline{w}) = (*),$$

da cui si deduce l'uguaglianza desiderata, essendo $f_\varphi^\top(\underline{v_1} + \underline{v_2})$ l'unico vettore di V con la proprietà enunciata dal teorema di rappresentazione di Riesz.

(ii) Sia $\underline{v} \in V$. Si deve dimostrare che $f_\varphi^\top(a\underline{v}) = af_\varphi^\top(\underline{v})$, ossia che $\varphi(af_\varphi^\top(\underline{v}), \underline{w}) = \varphi(a\underline{v}, f(\underline{w}))\ \forall\, a \in \mathbb{K}$, $\underline{w} \in V$. È sufficiente moltiplicare per a l'identità $\varphi(f_\varphi^\top(\underline{v}), \underline{w}) = \varphi(\underline{v}, f(\underline{w}))$. Analogamente a prima, si deduce che $f_\varphi^\top(a\underline{v}) = af_\varphi^\top(\underline{v})$, essendo $f_\varphi^\top(a\underline{v})$ l'unico vettore di V con la proprietà enunciata dal teorema di rappresentazione di Riesz.

Infine si dimostra che $f_\varphi^\top$ è unico. Sia infatti g un endomorfismo di V che condivide la stessa proprietà di $f_\varphi^\top$. Allora $\varphi(f_\varphi^\top(\underline{v}), \underline{w}) = \varphi(\underline{v}, f(\underline{w})) = \varphi(g(\underline{v}), \underline{w})$ $\forall\, \underline{v},\ \underline{w} \in V$, da cui si deduce che $\varphi(f_\varphi^\top(\underline{v}) -' (\underline{v}), \underline{w}) = 0$ $\forall\, \underline{v},\ \underline{w} \in V$, ossia che $f_\varphi^\top(\underline{v}) - g(\underline{v}) \in V^\perp$ $\forall\, \underline{v} \in V$. Tuttavia φ è non degenere, e quindi $V^\perp = \{\underline{0}\}$, da cui si deduce che deve valere l'identità $f_\varphi^\top(\underline{v}) = g(\underline{v})$ $\forall\, \underline{v} \in V$, ossia $g = f_\varphi^\top$. □

Proposizione 3.0.30

Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{C}$ e sia φ un suo prodotto hermitiano. Allora esiste un'unica mappa[a] $f^* : V \to V$, detta **aggiunto di** f, tale che $\varphi(\underline{v}, f(\underline{w})) = \varphi(f^*(\underline{v}), \underline{w})$ $\forall\, \underline{v},\ \underline{w} \in V$.

[a] Si osservi che f^* non è un'applicazione lineare, benché sia invece *antilineare*.

Dimostrazione. Sia $\underline{v} \in V$. Si consideri il funzionale σ tale che $\sigma(\underline{w}) = \varphi(\underline{v}, f(\underline{w}))$. Per il teorema di rappresentazione di Riesz per il prodotto scalare esiste un unico $\underline{v}' \in V$ tale per cui $\varphi(\underline{v}, f(\underline{w})) = \sigma(\underline{w}) = \varphi(\underline{v}', \underline{w})$. Si costruisce allora una mappa f^* che associa $\underline{v}$ a tale $\underline{v}'$.

Si dimostra infine che la mappa f^* è unica. Sia infatti $\mu : V \to V$ che condivide la stessa proprietà di f^*. Allora $\varphi(f^*(\underline{v}), \underline{w}) = \varphi(\underline{v}, f(\underline{w})) = \varphi(\mu(\underline{v}), \underline{w})$ $\forall\, \underline{v},\ \underline{w} \in V$, da cui si deduce che $\varphi(f^*(\underline{v}) - \mu(\underline{v}), \underline{w}) = 0$ $\forall\, \underline{v},\ \underline{w} \in V$, ossia che $f^*(\underline{v}) - \mu(\underline{v}) \in V^\perp$ $\forall\, \underline{v} \in V$. Tuttavia φ è non degenere, e quindi $V^\perp = \{\underline{0}\}$, da cui si deduce che deve valere l'identità $f^*(\underline{v}) = \mu(\underline{v})$ $\forall\, \underline{v} \in V$, ossia $\mu = f^*$. □

Osservazione 3.0.31. L'operazione di trasposizione di un endomorfismo sul prodotto scalare non degenere φ è un'involuzione. Infatti valgono le seguenti identità $\forall\, \underline{v},\ \underline{w} \in V$:

$$\begin{cases} \varphi(\underline{w}, f^\top(\underline{v})) = \varphi(f^\top(\underline{v}), \underline{w}) = \varphi(\underline{v}, f(\underline{w})), \\ \varphi(\underline{w}, f^\top(\underline{v})) = \varphi((f^\top)^\top(\underline{w}), \underline{v}) = \varphi(\underline{v}, (f^\top)^\top(\underline{w})). \end{cases}$$

Si conclude allora, poiché φ è non degenere, che $f(\underline{w}) = (f^\top)^\top(\underline{w})$ $\forall\, \underline{w} \in V$, ossia che $f = (f^\top)^\top$.

Osservazione 3.0.32. Analogamente si può dire per l'operazione di aggiunta per un prodotto hermitiano φ non degenere. Valgono infatti le seguenti identità $\forall\, \underline{v},\ \underline{w} \in V$:

$$\begin{cases} \overline{\varphi(\underline{w}, f^*(\underline{v}))} = \varphi(f^*(\underline{v}), \underline{w}) = \varphi(\underline{v}, f(\underline{w})), \\ \overline{\varphi(\underline{w}, f^*(\underline{v}))} = \overline{\varphi((f^*)^*(\underline{w}), \underline{v})} = \varphi(\underline{v}, (f^*)^*(\underline{w})), \end{cases}$$

da cui si deduce, come prima, che $f = (f^*)^*$.

Definizione 3.0.33. (base ortonormale) Si definisce **base ortonormale** di uno spazio vettoriale V su un suo prodotto φ una base ortogonale $\mathcal{B} = \{\underline{v_1}, \ldots, \underline{v_n}\}$ tale che $\varphi(\underline{v_i}, \underline{v_j}) = \delta_{ij}$.

Proposizione 3.0.34

Sia φ un prodotto scalare non degenere di V. Sia $f \in \mathrm{End}(V)$. Allora vale la seguente identità:

$$M_{\mathcal{B}}(f_\varphi^\top) = M_{\mathcal{B}}(\varphi)^{-1} M_{\mathcal{B}}(f)^\top M_{\mathcal{B}}(\varphi),$$

dove $\mathcal{B}$ è una base di V.

Dimostrazione. Sia $\mathcal{B}^*$ la base relativa a $\mathcal{B}$ in V^*. Per la proposizione precedente vale la seguente identità:

$$a_\varphi \circ f_\varphi^\top = f^\top \circ a_\varphi.$$

Pertanto, passando alle matrici associate, si ricava che:

$$M_{\mathcal{B}^*}^{\mathcal{B}}(a_\varphi) M_{\mathcal{B}}(f_\varphi^\top) = M_{\mathcal{B}^*}(f^\top) M_{\mathcal{B}^*}^{\mathcal{B}}(a_\varphi).$$

Dal momento che valgono le seguenti due identità:

$$M_{\mathcal{B}^*}^{\mathcal{B}}(a_\varphi) = M_{\mathcal{B}}(\varphi), \qquad M_{\mathcal{B}^*}(f^\top) = M_{\mathcal{B}}(f)^\top,$$

e a_φ è invertibile (per cui anche $M_{\mathcal{B}}(\varphi)$ lo è), si conclude che:

$$M_{\mathcal{B}}(\varphi) M_{\mathcal{B}}(f_\varphi^\top) = M_{\mathcal{B}}(f)^\top M_{\mathcal{B}}(\varphi) \implies M_{\mathcal{B}}(f_\varphi^\top) = M_{\mathcal{B}}(\varphi)^{-1} M_{\mathcal{B}}(f)^\top M_{\mathcal{B}}(\varphi),$$

da cui la tesi. □

Corollario 3.0.35

Sia φ un prodotto scalare di V. Se $\mathcal{B}$ è una base ortonormale, φ è non degenere e $M_{\mathcal{B}}(f_\varphi^\top) = M_{\mathcal{B}}(f)^\top$.

Dimostrazione. Se $\mathcal{B}$ è una base ortonormale, $M_{\mathcal{B}}(\varphi) = I_n$. Pertanto φ è non degenere. Allora, per la proposizione precedente:

$$M_{\mathcal{B}}(f_\varphi^\top) = M_{\mathcal{B}}(\varphi)^{-1} M_{\mathcal{B}}(f)^\top M_{\mathcal{B}}(\varphi) = M_{\mathcal{B}}(f)^\top.$$

□

Proposizione 3.0.36

Sia φ un prodotto hermitiano non degenere di V. Sia $f \in \operatorname{End}(V)$. Allora vale la seguente identità:

$$M_{\mathcal{B}}(f_\varphi^*) = M_{\mathcal{B}}(\varphi)^{-1} M_{\mathcal{B}}(f)^* M_{\mathcal{B}}(\varphi),$$

dove $\mathcal{B}$ è una base di V.

Dimostrazione. Sia $\mathcal{B} = \{\underline{v_1}, \ldots, \underline{v_n}\}$. Dal momento che φ è non degenere, $\operatorname{Ker} M_{\mathcal{B}}(\varphi) = V^\perp = \{\underline{0}\}$, e quindi $M_{\mathcal{B}}(\varphi)$ è invertibile.

Dacché allora $\varphi(f^*(\underline{v}), \underline{w}) = \varphi(\underline{v}, f(\underline{w}))\ \forall\, \underline{v},\, \underline{w} \in V$, vale la seguente identità:

$$[f^*(\underline{v})]_{\mathcal{B}}^* M_{\mathcal{B}}(\varphi)[\underline{w}]_{\mathcal{B}} = [\underline{v}]_{\mathcal{B}}^* M_{\mathcal{B}}(\varphi)[f(\underline{w})]_{\mathcal{B}},$$

ossia si deduce che:

$$[\underline{v}]_{\mathcal{B}}^* M_{\mathcal{B}}(f^*)^* M_{\mathcal{B}}(\varphi)[\underline{w}]_{\mathcal{B}} = [\underline{v}]_{\mathcal{B}}^* M_{\mathcal{B}}(\varphi) M_{\mathcal{B}}(f)[\underline{w}]_{\mathcal{B}}.$$

Sostituendo allora a $\underline{v}$ e $\underline{w}$ i vettori della base $\mathcal{B}$, si ottiene che:

$$\begin{aligned}(M_{\mathcal{B}}(f^*)^* M_{\mathcal{B}}(\varphi))_{ij} &= [\underline{v_i}]_{\mathcal{B}}^* M_{\mathcal{B}}(f^*)^* M_{\mathcal{B}}(\varphi)[\underline{v_j}]_{\mathcal{B}} = \\ &= [\underline{v_i}]_{\mathcal{B}}^* M_{\mathcal{B}}(\varphi) M_{\mathcal{B}}(f)[\underline{v_j}]_{\mathcal{B}} = (M_{\mathcal{B}}(\varphi) M_{\mathcal{B}}(f))_{ij},\end{aligned}$$

e quindi che $M_{\mathcal{B}}(f^*)^* M_{\mathcal{B}}(\varphi) = M_{\mathcal{B}}(\varphi) M_{\mathcal{B}}(f)$. Moltiplicando a destra per l'inversa di $M_{\mathcal{B}}(\varphi)$ e prendendo l'aggiunta di ambo i membri (ricordando che $M_{\mathcal{B}}(\varphi)^* = M_{\mathcal{B}}(\varphi)$, essendo φ un prodotto hermitiano), si ricava l'identità desiderata.

□

Corollario 3.0.37

Sia φ un prodotto hermitiano di V spazio vettoriale su $\mathbb{C}$. Se $\mathcal{B}$ è una base ortonormale, φ è non degenere e $M_{\mathcal{B}}(f_\varphi^*) = M_{\mathcal{B}}(f)^*$.

Dimostrazione. Se $\mathcal{B}$ è una base ortonormale, $M_{\mathcal{B}}(\varphi) = I_n$. Pertanto φ è non degenere. Allora, per la proposizione precedente:

$$M_{\mathcal{B}}(f_\varphi^*) = M_{\mathcal{B}}(\varphi)^{-1} M_{\mathcal{B}}(f)^* M_{\mathcal{B}}(\varphi) = M_{\mathcal{B}}(f)^*.$$

□

Nota — D'ora in poi, nel corso del documento, s'intenderà per φ un prodotto scalare (o eventualmente hermitiano) non degenere di V.

Definizione 3.0.38. (operatori simmetrici) Sia $f \in \mathrm{End}(V)$. Si dice allora che f è **simmetrico** (o *autoaggiunto*) se $f = f^\top$.

Definizione 3.0.39. (applicazioni e matrici ortogonali) Sia $f \in \mathrm{End}(V)$. Si dice allora che f è **ortogonale** se $\varphi(\underline{v}, \underline{w}) = \varphi(f(\underline{v}), f(\underline{w}))$, ossia se è un'isometria in V. Sia $A \in M(n, \mathbb{K})$. Si dice dunque che A è **ortogonale** se $A^\top A = AA^\top = I_n$.

Definizione 3.0.40. Le matrici ortogonali di $M(n, \mathbb{K})$ formano un sottogruppo moltiplicativo di $\mathrm{GL}(n, \mathbb{K})$, detto **gruppo ortogonale**, e indicato con O_n. Il sottogruppo di O_n contenente solo le matrici con determinante pari a 1 è detto **gruppo ortogonale speciale**, e si denota con SO_n.

Osservazione 3.0.41. Si possono classificare in modo semplice alcuni di questi gruppi ortogonali per $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

▶ $A \in O_n \implies 1 = \det(I_n) = \det(AA^\top) = \det(A)^2 \implies \det(A) = \pm 1$.
▶ $A = (a) \in O_1 \iff A^\top A = I_1 \iff a^2 = 1 \iff a = \pm 1$, da cui si ricava che l'unica matrice di SO_1 è (1). Si osserva inoltre che O_1 è abeliano di ordine 2, e quindi che $O_1 \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.
▶ $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in O_2 \iff \begin{pmatrix} a^2 + b^2 & ab + cd \\ ab + cd & c^2 + d^2 \end{pmatrix} = A^\top A = I_2$.

Pertanto deve essere soddisfatto il seguente sistema di equazioni:

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = c^2 + d^2 = 1, \\ ac + bd = 0. \end{cases}$$

Si ricava dunque che si può identificare A con le funzioni trigonometriche $\cos(\theta)$ e $\sin(\theta)$ con $\theta \in [0, 2\pi)$ nelle due forme:

$$A = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \qquad (\det(A) = 1, A \in SO_2),$$

$$A = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix} \qquad (\det(A) = -1).$$

Definizione 3.0.42. (applicazioni e matrici hermitiane) Sia $f \in \mathrm{End}(V)$ e si consideri il prodotto hermitiano φ. Si dice allora che f è **hermitiano** se $f = f^*$. Sia $A \in M(n, \mathbb{C})$. Si dice dunque che A è **hermitiana** se $A = A^*$.

Definizione 3.0.43. (applicazioni e matrici unitarie) Sia $f \in \text{End}(V)$ e si consideri il prodotto hermitiano φ. Si dice allora che f è **unitario** se $\varphi(\underline{v}, \underline{w}) = \varphi(f(\underline{v}), f(\underline{w}))$. Sia $A \in M(n, \mathbb{C})$. Si dice dunque che A è **unitaria** se $A^*A = AA^* = I_n$.

Definizione 3.0.44. Le matrici unitarie di $M(n, \mathbb{C})$ formano un sottogruppo moltiplicativo di $\text{GL}(n, \mathbb{C})$, detto **gruppo unitario**, e indicato con U_n. Il sottogruppo di U_n contenente solo le matrici con determinante pari a 1 è detto **gruppo unitario speciale**, e si denota con SU_n.

Osservazione 3.0.45.
Si possono classificare in modo semplice alcuni di questi gruppi unitari.
▶ $A \in U_n \implies 1 = \det(I_n) = \det(AA^*) = \det(A)\overline{\det(A)} = |\det(A)|^2 = 1$. ▶ $A = (a) \in U_1 \iff A^*A = I_1 \iff |a|^2 = 1 \iff a = e^{i\theta}$, $\theta \in [0, 2\pi)$, ossia il numero complesso a appartiene alla circonferenza di raggio unitario. ▶ $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SU_2 \iff AA^* = \begin{pmatrix} |a|^2 + |b|^2 & a\overline{c} + b\overline{d} \\ \overline{a}c + \overline{b}d & |c|^2 + |d|^2 \end{pmatrix} = I_2$, $\det(A) = 1$, ossia se il seguente sistema di equazioni è soddisfatto:

$$\begin{cases} |a|^2 + |b|^2 = |c|^2 + |d|^2 = 1, \\ a\overline{c} + b\overline{d} = 0, \\ ad - bc = 1, \end{cases}$$

le cui soluzioni riassumono il gruppo SU_2 nel seguente modo:

$$SU_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x & -y \\ \overline{y} & \overline{x} \end{pmatrix} \in M(2, \mathbb{C}) \;\middle|\; |x|^2 + |y|^2 = 1 \right\}.$$

Definizione 3.0.46. (spazio euclideo reale) Si definisce **spazio euclideo reale** uno spazio vettoriale V su $\mathbb{R}$ dotato del prodotto scalare standard $\varphi = \langle \cdot, \cdot \rangle$.

Definizione 3.0.47. (spazio euclideo complesso) Si definisce **spazio euclideo complesso** uno spazio vettoriale V su $\mathbb{C}$ dotato del prodotto hermitiano standard $\varphi = \langle \cdot, \cdot \rangle$.

Proposizione 3.0.48

Sia (V, φ) uno spazio euclideo reale e sia $\mathcal{B}$ una base ortonormale di V. Allora $f \in \text{End}(V)$ è simmetrico $\iff M_\mathcal{B}(f) = M_\mathcal{B}(f)^\top \iff M_\mathcal{B}(f)$ è simmetrica.

Dimostrazione. Per il corollario precedente, f è simmetrico $\iff f = f^\top \iff M_\mathcal{B}(f) = M_\mathcal{B}(f^\top) = M_\mathcal{B}(f)^\top$. □

Proposizione 3.0.49

Sia (V, φ) uno spazio euclideo reale e sia $\mathcal{B}$ una base ortonormale di V. Allora $f \in \mathrm{End}(V)$ è ortogonale $\iff M_\mathcal{B}(f) M_\mathcal{B}(f)^\top = M_\mathcal{B}(f)^\top M_\mathcal{B}(f) = I_n \overset{\text{def}}{\iff} M_\mathcal{B}(f)$ è ortogonale.

Dimostrazione. Si osserva che $M_\mathcal{B}(\varphi) = I_n$. Sia $\mathcal{B} = \{\underline{v_1}, \ldots, \underline{v_n}\}$. Se f è ortogonale, allora $[\underline{v}]_\mathcal{B}^\top [\underline{w}]_\mathcal{B} = [\underline{v}]_\mathcal{B}^\top M_\mathcal{B}(\varphi)[\underline{w}]_\mathcal{B} = \varphi(\underline{v}, \underline{w}) = \varphi(f(\underline{v}), f(\underline{w})) = (M_\mathcal{B}(f)[\underline{v}]_\mathcal{B})^\top M_\mathcal{B}(\varphi)(M_\mathcal{B}(f)[\underline{w}]_\mathcal{B}) = [\underline{v}]_\mathcal{B}^\top M_\mathcal{B}(f)^\top M_\mathcal{B}(\varphi) M_\mathcal{B}(f)[\underline{w}]_\mathcal{B} = [\underline{v}]_\mathcal{B}^\top M_\mathcal{B}(f)^\top M_\mathcal{B}(f)[\underline{w}]_\mathcal{B}$. Allora, come visto nel corollario precedente, si ricava che $M_\mathcal{B}(f)^\top M_\mathcal{B}(f) = I_n$. Dal momento che gli inversi sinistri sono anche inversi destri, $M_\mathcal{B}(f)^\top M_\mathcal{B}(f) = M_\mathcal{B}(f) M_\mathcal{B}(f)^\top = I_n$.

Se invece $M_\mathcal{B}(f)^\top M_\mathcal{B}(f) = M_\mathcal{B}(f) M_\mathcal{B}(f)^\top = I_n$, $\varphi(\underline{v}, \underline{w}) = [\underline{v}]_\mathcal{B}^\top [\underline{w}]_\mathcal{B} = [\underline{v}]_\mathcal{B}^\top M_\mathcal{B}(f)^\top M_\mathcal{B}(f)[\underline{w}]_\mathcal{B} = (M_\mathcal{B}(f)[\underline{v}]_\mathcal{B})^\top (M_\mathcal{B}(f)[\underline{w}]_\mathcal{B}) = (M_\mathcal{B}(f)[\underline{v}]_\mathcal{B})^\top M_\mathcal{B}(\varphi)(M_\mathcal{B}(f)[\underline{w}]_\mathcal{B}) = \varphi(f(\underline{v}), f(\underline{w}))$, e quindi f è ortogonale. □

Proposizione 3.0.50

Sia (V, φ) uno spazio euclideo complesso e sia $\mathcal{B}$ una base ortonormale di V. Allora $f \in \mathrm{End}(V)$ è hermitiano $\iff M_\mathcal{B}(f) = M_\mathcal{B}(f)^* \overset{\text{def}}{\iff} M_\mathcal{B}(f)$ è hermitiana.

Dimostrazione. Per il corollario precedente, f è hermitiana $\iff f = f^* \iff M_\mathcal{B}(f) = M_\mathcal{B}(f^*) = M_\mathcal{B}(f)^*$. □

Proposizione 3.0.51

Sia (V, φ) uno spazio euclideo complesso e sia $\mathcal{B}$ una base ortonormale di V. Allora $f \in \mathrm{End}(V)$ è unitario $\iff M_\mathcal{B}(f) M_\mathcal{B}(f)^* = M_\mathcal{B}(f)^* M_\mathcal{B}(f) = I_n \overset{\text{def}}{\iff} M_\mathcal{B}(f)$ è unitaria.

Dimostrazione. Si osserva che $M_\mathcal{B}(\varphi) = I_n$. Sia $\mathcal{B} = \{\underline{v_1}, \ldots, \underline{v_n}\}$. Se f è unitario, allora $[\underline{v}]_\mathcal{B}^* [\underline{w}]_\mathcal{B} = [\underline{v}]_\mathcal{B}^* M_\mathcal{B}(\varphi)[\underline{w}]_\mathcal{B} = \varphi(\underline{v}, \underline{w}) = \varphi(f(\underline{v}), f(\underline{w})) = (M_\mathcal{B}(f)[\underline{v}]_\mathcal{B})^* M_\mathcal{B}(\varphi)(M_\mathcal{B}(f)[\underline{w}]_\mathcal{B}) = [\underline{v}]_\mathcal{B}^* M_\mathcal{B}(f)^* M_\mathcal{B}(\varphi) M_\mathcal{B}(f)[\underline{w}]_\mathcal{B} = [\underline{v}]_\mathcal{B}^* M_\mathcal{B}(f)^* M_\mathcal{B}(f)[\underline{w}]_\mathcal{B}$. Allora, come visto nel corollario precedente, si ricava che $M_\mathcal{B}(f)^* M_\mathcal{B}(f) = I_n$. Dal momento che gli inversi sinistri sono anche inversi destri, $M_\mathcal{B}(f)^* M_\mathcal{B}(f) = M_\mathcal{B}(f) M_\mathcal{B}(f)^* = I_n$.

Se invece $M_\mathcal{B}(f)^* M_\mathcal{B}(f) = M_\mathcal{B}(f) M_\mathcal{B}(f)^* = I_n$, $\varphi(\underline{v}, \underline{w}) = [\underline{v}]_\mathcal{B}^* [\underline{w}]_\mathcal{B} = [\underline{v}]_\mathcal{B}^* M_\mathcal{B}(f)^* M_\mathcal{B}(f)[\underline{w}]_\mathcal{B}$

$= (M_\mathcal{B}(f)[\underline{v}]_\mathcal{B})^*(M_\mathcal{B}(f)[\underline{w}]_\mathcal{B}) = (M_\mathcal{B}(f)[\underline{v}]_\mathcal{B})^* M_\mathcal{B}(\varphi)(M_\mathcal{B}(f)[\underline{w}]_\mathcal{B}) = \varphi(f(\underline{v}), f(\underline{w}))$, e quindi f è unitario. $\square$

Osservazione 3.0.52. Se $\mathcal{B}$ è una base ortonormale di (V, φ), ricordando che $M_\mathcal{B}(f^\top) = M_\mathcal{B}(f)^\top$ e che $M_\mathcal{B}(f^*) = M_\mathcal{B}(f)^*$, sono equivalenti allora i seguenti fatti:

- $f \circ f^\top = f^\top \circ f = \mathrm{Id}_V \iff M_\mathcal{B}(f)$ è ortogonale $\iff f$ è ortogonale,
- $f \circ f^* = f^* \circ f = \mathrm{Id}_V \iff M_\mathcal{B}(f)$ è unitaria $\iff f$ è unitario (se V è uno spazio vettoriale su $\mathbb{C}$).

Proposizione 3.0.53

Sia $V = \mathbb{R}^n$ uno spazio vettoriale col prodotto scalare standard φ. Allora sono equivalenti i seguenti fatti:

(i) $A \in O_n$,

(ii) f_A è un operatore ortogonale,

(iii) le colonne e le righe di A formano una base ortonormale di V.

Dimostrazione. Sia $\mathcal{B}$ la base canonica di V. Allora $M_\mathcal{B}(f_A) = A$, e quindi, per una proposizione precedente, f_A è un operatore ortogonale. Viceversa si deduce che se f_A è un operatore ortogonale, $A \in O_n$. Dunque è sufficiente dimostrare che $A \in O_n \iff$ le colonne e le righe di A formano una base ortonormale di V.

($\implies$) Se $A \in O_n$, in particolare $A \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$, e quindi A è invertibile. Allora le sue colonne e le sue righe formano già una base di V, essendo n vettori di V linearmente indipendenti. Inoltre, poiché $A \in O_n$, $\varphi(\underline{e_i}, \underline{e_j}) = \varphi(A\underline{e_i}, A\underline{e_j})$, e quindi le colonne di A si mantengono a due a due ortogonali tra di loro, mentre $\varphi(A\underline{e_i}, A\underline{e_i}) = \varphi(\underline{e_i}, \underline{e_i}) = 1$. Pertanto le colonne di A formano una base ortonormale di V.

Si osserva che anche $A^\top \in O_n$. Allora le righe di A, che non sono altro che le colonne di $A^\top$, formano anch'esse una base ortonormale di V.

($\impliedby$) Nel moltiplicare $A^\top$ con A altro non si sta facendo che calcolare il prodotto scalare φ tra ogni riga di $A^\top$ e ogni colonna di A , ossia $(A^*A)_{ij} = \varphi((A^\top)_i, A^j) = \varphi(A^i, A^j) = \delta_{ij}$. Quindi $A^\top A = AA^\top = I_n$, da cui si deduce che $A \in O_n$. $\square$

Proposizione 3.0.54

Sia $V = \mathbb{C}^n$ uno spazio vettoriale col prodotto hermitiano standard φ. Allora sono equivalenti i seguenti fatti:

(i) $A \in U_n$,

(ii) f_A è un operatore unitario,

(iii) le colonne e le righe di A formano una base ortonormale di V.

Dimostrazione. Sia $\mathcal{B}$ la base canonica di V. Allora $M_{\mathcal{B}}(f_A) = A$, e quindi, per una proposizione precedente, f_A è un operatore unitario. Viceversa si deduce che se f_A è un operatore unitario, $A \in U_n$. Dunque è sufficiente dimostrare che $A \in U_n \iff$ le colonne e le righe di A formano una base ortonormale di V.

($\implies$) Se $A \in U_n$, in particolare $A \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$, e quindi A è invertibile. Allora le sue colonne e le sue righe formano già una base di V, essendo n vettori di V linearmente indipendenti. Inoltre, poiché $A \in U_n$, $\varphi(\underline{e_i}, \underline{e_j}) = \varphi(A\underline{e_i}, A\underline{e_j})$, e quindi le colonne di A si mantengono a due a due ortogonali tra di loro, mentre $\varphi(A\underline{e_i}, A\underline{e_i}) = \varphi(\underline{e_i}, \underline{e_i}) = 1$. Pertanto le colonne di A formano una base ortonormale di V.

Si osserva che anche $A^\top \in U_n$. Allora le righe di A, che non sono altro che le colonne di $A^\top$, formano anch'esse una base ortonormale di V.

($\impliedby$) Nel moltiplicare A^* con A altro non si sta facendo che calcolare il prodotto hermitiano φ tra ogni riga coniugata di A^* e ogni colonna di A, ossia $(A^*A)_{ij} = \varphi((A^\top)_i, A^j) = \varphi(A^i, A^j) = \delta_{ij}$. Quindi $A^*A = AA^* = I_n$, da cui si deduce che $A \in U_n$. □

Proposizione 3.0.55

Sia (V, φ) uno spazio euclideo reale. Allora valgono i seguenti tre risultati:

(i) $(V_\mathbb{C}, \varphi_\mathbb{C})$ è uno spazio euclideo complesso.

(ii) Se $f \in \mathrm{End}(V)$ è simmetrico, allora $f_\mathbb{C} \in \mathrm{End}(V)$ è hermitiano.

(iii) Se $f \in \mathrm{End}(V)$ è ortogonale, allora $f_\mathbb{C} \in \mathrm{End}(V)$ è unitario.

Dimostrazione. Dacché φ è il prodotto scalare standard dello spazio euclideo reale V, esiste una base ortnormale di V. Sia allora $\mathcal{B}$ una base ortonormale di V. Si dimostrano i tre risultati separatamente.

- È sufficiente dimostrare che $\varphi_\mathbb{C}$ altro non è che il prodotto hermitiano standard. Come si è già osservato precedentemente, $M_\mathcal{B}(\varphi_\mathbb{C}) = M_\mathcal{B}(\varphi)$, e quindi, dacché $M_\mathcal{B}(\varphi) = I_n$, essendo $\mathcal{B}$ ortonormale, vale anche che $M_\mathcal{B}(\varphi_\mathbb{C}) = I_n$, ossia $\varphi_\mathbb{C}$ è proprio il prodotto hermitiano standard.

- Poiché f è simmetrico, $M_\mathcal{B}(f) = M_\mathcal{B}(f)^\top$, e quindi anche $M_\mathcal{B}(f_\mathbb{C}) = M_\mathcal{B}(f_\mathbb{C})^\top$. Dal momento che $M_\mathcal{B}(f) \in M(n, \mathbb{R})$, $M_\mathcal{B}(f) = \overline{M_\mathcal{B}(f)} \implies M_\mathcal{B}(f_\mathbb{C})^\top = M_\mathcal{B}(f_\mathbb{C})^*$. Quindi $M_\mathcal{B}(f_\mathbb{C}) = M_\mathcal{B}(f_\mathbb{C})^*$, ossia $M_\mathcal{B}(f_\mathbb{C})$ è hermitiana, e pertanto anche $f_\mathbb{C}$ è hermitiano.

- Poiché f è ortogonale, $M_\mathcal{B}(f)M_\mathcal{B}(f)^\top = I_n$, e quindi anche $M_\mathcal{B}(f_\mathbb{C})M_\mathcal{B}(f_\mathbb{C})^\top = I_n$. Allora, come prima, si deduce che $M_\mathcal{B}(f_\mathbb{C})^\top = M_\mathcal{B}(f_\mathbb{C})^*$, essendo $M_\mathcal{B}(f_\mathbb{C}) = M_\mathcal{B}(f) \in M(n, \mathbb{R})$, da cui si ricava che $M_\mathcal{B}(f_\mathbb{C})M_\mathcal{B}(f_\mathbb{C})^* = M_\mathcal{B}(f_\mathbb{C})M_\mathcal{B}(f_\mathbb{C})^\top = I_n$, ossia che $f_\mathbb{C}$ è unitario.

□

Esercizio 3.0.56. Sia (V, φ) uno spazio euclideo reale. Allora valgono i seguenti risultati:

- Se f, $g \in \mathrm{End}(V)$ commutano, allora anche $f_\mathbb{C}$, $g_\mathbb{C} \in \mathrm{End}(V_\mathbb{C})$ commutano.
- Se $f \in \mathrm{End}(V)$, $(f^\top)_\mathbb{C} = (f_\mathbb{C})^*$.
- Se $f \in \mathrm{End}(V)$, f diagonalizzabile $\iff$ $f^\top$ diagonalizzabile.

Soluzione. Dacché φ è il prodotto scalare standard dello spazio euclideo reale V, esiste una base ortonormale $\mathcal{B} = \{\underline{v_1}, \ldots, \underline{v_n}\}$ di V. Si dimostrano allora separatamente i tre risultati.

- Si osserva che $M_\mathcal{B}(f_\mathbb{C})M_\mathcal{B}(g_\mathbb{C}) = M_\mathcal{B}(f)M_\mathcal{B}(g) = M_\mathcal{B}(g)M_\mathcal{B}(f) = M_\mathcal{B}(g_\mathbb{C})M_\mathcal{B}(f_\mathbb{C})$, e quindi che $f_\mathbb{C} \circ g_\mathbb{C} = g_\mathbb{C} \circ f_\mathbb{C}$.

- Si osserva che $M_\mathcal{B}(f) \in M(n, \mathbb{R}) \implies M_\mathcal{B}(f)^\top = M_\mathcal{B}(f)^*$, e quindi che $M_\mathcal{B}((f^\top)_\mathbb{C}) = M_\mathcal{B}(f^\top) = M_\mathcal{B}(f)^\top = M_\mathcal{B}(f)^* = M_\mathcal{B}(f_\mathbb{C})^* = M_\mathcal{B}((f_\mathbb{C})^*)$. Allora $(f^\top)_\mathbb{C} = (f_\mathbb{C})^*$.

- Poiché $\mathcal{B}$ è ortonormale, $M_\mathcal{B}(f^\top) = M_\mathcal{B}(f)^\top$. Allora, se f è diagonalizzabile, anche $M_\mathcal{B}(f)$ lo è, e quindi $\exists\, P \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{K})$, $D \in M(n, \mathbb{K})$ diagonale tale che $M_\mathcal{B}(f) = PDP^{-1}$. Allora $M_\mathcal{B}(f^\top) = M_\mathcal{B}(f)^\top = (P^\top)^{-1}D^\top P^\top$ è simile ad una matrice diagonale, e pertanto $M_\mathcal{B}(f^\top)$ è diagonalizzabile. Allora anche $f^\top$ è diagonalizzabile. Vale anche il viceversa considerando l'identità $f = (f^\top)^\top$ e l'implicazione appena dimostrata.

Nota — D'ora in poi, qualora non specificato diversamente, si assumerà che V sia uno spazio euclideo, reale o complesso.

Definizione 3.0.57. (norma euclidea) Sia (V, φ) un qualunque spazio euclideo. Si definisce **norma** la mappa $\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}^+$ tale che $\|\underline{v}\| = \sqrt{\varphi(\underline{v}, \underline{v})}$.

Definizione 3.0.58. (distanza euclidea tra due vettori) Sia (V, φ) un qualunque spazio euclideo. Si definisce **distanza** la mappa $d : V \times V \to \mathbb{R}^+$ tale che $d(\underline{v}, \underline{w}) = \|\underline{v} - \underline{w}\|$.

Osservazione 3.0.59.
▶ Si osserva che in effetti $\varphi(\underline{v}, \underline{v}) \in \mathbb{R}^+ \ \forall \underline{v} \in V$. Infatti, sia per il caso reale che per il caso complesso, φ è definito positivo.
▶ Vale che $\|\underline{v}\| = 0 \iff \underline{v} = \underline{0}$. Infatti, se $\underline{v} = \underline{0}$, chiaramente $\varphi(\underline{v}, \underline{v}) = 0 \implies \|\underline{v}\| = 0$; se invece $\|\underline{v}\| = 0$, $\varphi(\underline{v}, \underline{v}) = 0$, e quindi $\underline{v} = \underline{0}$, dacché $V^\perp = \{\underline{0}\}$, essendo φ definito positivo.
▶ Inoltre, vale chiaramente che $\|\alpha\underline{v}\| = |\alpha| \, \|\underline{v}\|$.
▶ Se f è un operatore ortogonale (o unitario), allora f mantiene sia le norme che le distanze tra vettori. Infatti $\|\underline{v} - \underline{w}\|^2 = \varphi(\underline{v} - \underline{w}, \underline{v} - \underline{w}) = \varphi(f(\underline{v} - \underline{w}), f(\underline{v} - \underline{w})) = \varphi(f(\underline{v}) - f(\underline{w}), f(\underline{v}) - f(\underline{w})) = \|f(\underline{v}) - f(\underline{w})\|^2$, da cui segue che $\|\underline{v} - \underline{w}\| = \|f(\underline{v}) - f(\underline{w})\|$.

Proposizione 3.0.60 (disuguaglianza di Cauchy-Schwarz)
Vale che $\|\underline{v}\| \, \|\underline{w}\| \geq |\varphi(\underline{v}, \underline{w})|$, $\forall \, \underline{v}, \, \underline{w} \in V$, dove l'uguaglianza è raggiunta soltanto se $\underline{v}$ e $\underline{w}$ sono linearmente dipendenti.

Dimostrazione. Si consideri innanzitutto il caso $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, e quindi il caso in cui φ è il prodotto scalare standard. Siano $\underline{v}, \, \underline{w} \in V$. Si consideri la disuguaglianza $\|\underline{v} + t\underline{w}\|^2 \geq 0$, valida per ogni elemento di V. Allora $\|\underline{v} + t\underline{w}\|^2 = \|\underline{v}\|^2 + 2\varphi(\underline{v}, \underline{w})t + \|\underline{w}\|^2 t^2 \geq 0$. L'ultima disuguaglianza è possibile se e solo se $\frac{\Delta}{4} \leq 0$, e quindi se e solo se $\varphi(\underline{v}, \underline{w})^2 - \|\underline{v}\|^2 \|\underline{w}\|^2 \leq 0 \iff \|\underline{v}\| \, \|\underline{w}\| \geq \varphi(\underline{v}, \underline{w})$. Vale in particolare l'equivalenza se e solo se $\|\underline{v} + t\underline{w}\| = 0$, ossia se $\underline{v} + t\underline{w} = \underline{0}$, da cui la tesi.

Si consideri ora il caso $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, e dunque il caso in cui φ è il prodotto hermitiano standard. Siano $\underline{v}, \, \underline{w} \in V$, e siano $\alpha, \, \beta \in \mathbb{C}$. Si consideri allora la disuguaglianza $\|\alpha\underline{v} + \beta\underline{w}\|^2 \geq 0$, valida per ogni elemento di V. Allora $\|\alpha\underline{v} + \beta\underline{w}\|^2 = \|\alpha\underline{v}\|^2 + \varphi(\alpha\underline{v}, \beta\underline{w}) + \varphi(\beta\underline{w}, \alpha\underline{v}) + \|\beta\underline{w}\|^2 = |\alpha|^2 \|\underline{v}\|^2 \underline{+ \overline{\alpha}\beta \, \varphi(\underline{v}, \underline{w})} + \alpha\overline{\beta} \, \varphi(\underline{w}, \underline{v}) + |\beta|^2 \|\underline{w}\|^2 \geq 0$. Ponendo allora $\alpha = \|\underline{w}\|^2$ e $\beta = -\varphi(\underline{w}, \underline{v}) = \overline{-\varphi(\underline{v}, \underline{w})}$, si deduce che:

$$\|\underline{v}\|^2 \|\underline{w}\|^4 - \|\underline{w}\|^2 |\varphi(\underline{v}, \underline{w})| \geq 0.$$

Se $\underline{w} = \underline{0}$, la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz è già dimostrata. Altrimenti, è sufficiente dividere per $\|\underline{w}\|^2$ (dal momento che $\underline{w} \neq \underline{0} \iff \|\underline{w}\| \neq 0$) per ottenere la tesi. Come prima, is osserva che l'uguaglianza si ottiene se e solo se $\underline{v}$ e $\underline{w}$ sono linearmente dipendenti. □

Proposizione 3.0.61 (disuguaglianza triangolare)
$\|\underline{v}+\underline{w}\| \leq \|\underline{v}\| + \|\underline{w}\|$.

Dimostrazione. Si osserva che $\|\underline{v}+\underline{w}\|^2 = \|\underline{v}\|^2 + \varphi(\underline{v},\underline{w}) + \varphi(\underline{w},\underline{v}) + \|\underline{w}\|^2$. Se φ è il prodotto scalare standard, si ricava che:

$$\|\underline{v}+\underline{w}\|^2 = \|\underline{v}\|^2 + 2\varphi(\underline{v},\underline{w}) + \|\underline{w}\|^2 \leq \|\underline{v}\|^2 + 2\,\|\underline{v}\|\,\|\underline{w}\| + \|\underline{w}\|^2 = (\|\underline{v}\| + \|\underline{w}\|)^2,$$

dove si è utilizzata la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz. Da quest'ultima disuguaglianza si ricava, prendendo la radice quadrata, la disuguaglianza desiderata.

Se invece φ è il prodotto hermitiano standard, $\|\underline{v}+\underline{w}\|^2 = \|\underline{v}\|^2 + 2\,\Re(\varphi(\underline{v},\underline{w})) + \|\underline{w}\|^2 \leq \|\underline{v}\|^2 + 2\,|\varphi(\underline{v},\underline{w})| + \|\underline{w}\|^2$. Allora, riapplicando la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz, si ottiene che:

$$\|\underline{v}+\underline{w}\|^2 \leq (\|\underline{v}\| + \|\underline{w}\|)^2,$$

da cui, come prima, si ottiene la disuguaglianza desiderata. □

Osservazione 3.0.62. Utilizzando il concetto di norma euclidea, si possono ricavare due teoremi fondamentali della geometria, e già noti dalla geometria euclidea.

- ▶ Se $\underline{v} \perp \underline{w}$, allora $\|\underline{v}+\underline{w}\|^2 = \|\underline{v}\|^2 + \overbrace{(\varphi(\underline{v},\underline{w}) + \varphi(\underline{w},\underline{v}))}^{=0} + \|\underline{w}\|^2 = \|\underline{v}\|^2 + \|\underline{w}\|^2$ (teorema di Pitagora),
- ▶ Se $\|\underline{v}\| = \|\underline{w}\|$ e φ è un prodotto scalare, allora $\varphi(\underline{v}+\underline{w}, \underline{v}-\underline{w}) = \|\underline{v}\|^2 - \varphi(\underline{v},\underline{w}) + \varphi(\underline{w},\underline{v}) - \|\underline{w}\|^2 = \|\underline{v}\|^2 - \|\underline{w}\|^2 = 0$, e quindi $\underline{v}+\underline{w} \perp \underline{v}-\underline{w}$ (le diagonali di un rombo sono ortogonali tra loro).

Osservazione 3.0.63. Sia $\mathcal{B} = \{\underline{v_1}, \ldots, \underline{v_n}\}$ è una base ortogonale di V per φ.

- ▶ Se $\underline{v} = a_1\underline{v_1} + \ldots + a_n\underline{v_n}$, con a_1, ..., $a_n \in \mathbb{K}$, si osserva che $\varphi(\underline{v},\underline{v_i}) = a_i\varphi(\underline{v_i},\underline{v_i})$. Quindi $\underline{v} = \sum_{i=1}^n \frac{\varphi(\underline{v},\underline{v_i})}{\varphi(\underline{v_i},\underline{v_i})}\,\underline{v_i}$. In particolare, $\frac{\varphi(\underline{v},\underline{v_i})}{\varphi(\underline{v_i},\underline{v_i})}$ è detto **coefficiente di Fourier** di $\underline{v}$ rispetto a $\underline{v_i}$, e si indica con $C(\underline{v},\underline{v_i})$. Se $\mathcal{B}$ è ortonormale, $\underline{v} = \sum_{i=1}^n \varphi(\underline{v},\underline{v_i})\,\underline{v_i}$.
- ▶ Quindi $\|\underline{v}\|^2 = \varphi(\underline{v},\underline{v}) = \sum_{i=1}^n \frac{\varphi(\underline{v},\underline{v_i})^2}{\varphi(\underline{v_i},\underline{v_i})}$. In particolare, se $\mathcal{B}$ è ortonormale, $\|\underline{v}\|^2 = \sum_{i=1}^n \varphi(\underline{v},\underline{v_i})^2$. In tal caso, si può esprimere la disuguaglianza di Bessel: $\|\underline{v}\|^2 \geq \sum_{i=1}^k \varphi(\underline{v},\underline{v_i})^2$ per $k \leq n$.

Osservazione 3.0.64. (algoritmo di ortogonalizzazione di Gram-Schmidt) Se φ è non degenere (o in generale, se $\mathrm{CI}(\varphi) = \{\underline{0}\}$) ed è data una base $\mathcal{B} = \{\underline{v_1}, \ldots, \underline{v_n}\}$ per V (dove si ricorda che deve valere char $\mathbb{K} \neq 2$), è possibile applicare l'**algoritmo di ortogonalizzazione di Gram-Schmidt** per ottenere da $\mathcal{B}$ una nuova base $\mathcal{B}' = \{\underline{v_1}', \ldots, \underline{v_n}'\}$ con le seguenti proprietà:

(i) $\mathcal{B}'$ è una base ortogonale,

(ii) $\mathcal{B}'$ mantiene la stessa bandiera di $\mathcal{B}$ (ossia $\mathrm{Span}(\underline{v_1}, \ldots, \underline{v_i}) = \mathrm{Span}(\underline{v_1}', \ldots, \underline{v_i}')$ per ogni $1 \leq i \leq n$).

L'algoritmo si applica nel seguente modo: si prenda in considerazione $\underline{v_1}$ e sottragga ad ogni altro vettore della base il vettore $C(\underline{v_1}, \underline{v_i})\underline{v_1} = \frac{\varphi(\underline{v_1}, \underline{v_i})}{\varphi(\underline{v_1}, \underline{v_1})}\underline{v_1}$, rendendo ortogonale ogni altro vettore della base con $\underline{v_1}$. Pertanto si applica la mappa $\underline{v_i} \mapsto \underline{v_i} - \frac{\varphi(\underline{v_1}, \underline{v_i})}{\varphi(\underline{v_1}, \underline{v_1})}\underline{v_i} = \underline{v_i}^{(1)}$. Si verifica infatti che $\underline{v_1}$ e $\underline{v_i}^{(1)}$ sono ortogonali per $2 \leq i \leq n$:

$$\varphi(\underline{v_1}, \underline{v_i}^{(1)}) = \varphi(\underline{v_1}, \underline{v_i}) - \varphi\left(\underline{v_1}, \frac{\varphi(\underline{v_1}, \underline{v_i})}{\varphi(\underline{v_1}, \underline{v_1})}\underline{v_i}\right) = \varphi(\underline{v_1}, \underline{v_i}) - \varphi(\underline{v_1}, \underline{v_i}) = 0.$$

Poiché $\underline{v_1}$ non è isotropo, si deduce la decomposizione $V = \mathrm{Span}(\underline{v_1}) \oplus \mathrm{Span}(\underline{v_1})^\perp$. In particolare $\dim \mathrm{Span}(\underline{v_1})^\perp = n - 1$: essendo allora i vettori $\underline{v_2}^{(1)}, \ldots, \underline{v_n}^{(1)}$ linearmente indipendenti e appartenenti a $\mathrm{Span}(\underline{v_1})^\perp$, ne sono una base. Si conclude quindi che vale la seguente decomposizione:

$$V = \mathrm{Span}(\underline{v_1}) \oplus^\perp \mathrm{Span}(\underline{v_2}^{(1)}, \ldots, \underline{v_n}^{(1)}).$$

Si riapplica dunque l'algoritmo di Gram-Schmidt prendendo come spazio vettoriale lo spazio generato dai vettori a cui si è applicato precedentemente l'algoritmo, ossia $V' = \mathrm{Span}(\underline{v_2}^{(1)}, \ldots, \underline{v_n}^{(1)})$, fino a che non si ottiene $V' = \{\underline{0}\}$.

Si può addirittura ottenere una base ortonormale a partire da $\mathcal{B}'$ normalizzando ogni vettore (ossia dividendo per la propria norma), se si sta considerando uno spazio euclideo.

Osservazione 3.0.65. Poiché la base ottenuta tramite Gram-Schmidt mantiene la stessa bandiera della base di partenza, ogni matrice triangolabile è anche triangolabile mediante una base ortogonale.

Esempio 3.0.66

Si consideri $V = (\mathbb{R}^3, \langle \cdot, \cdot \rangle)$, ossia $\mathbb{R}^3$ dotato del prodotto scalare standard. Si applica l'algoritmo di ortogonalizzazione di Gram-Schmidt sulla seguente base:

$$\mathcal{B} = \left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\underline{v_1} = \underline{e_1}}, \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\underline{v_2}}, \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\underline{v_3}} \right\}.$$

Alla prima iterazione dell'algoritmo si ottengono i seguenti vettori:

- $\underline{v_2}^{(1)} = \underline{v_2} - \frac{\varphi(\underline{v_1}, \underline{v_2})}{\varphi(\underline{v_1}, \underline{v_1})} \underline{v_1} = \underline{v_2} - \underline{v_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \underline{e_2}$,
- $\underline{v_3}^{(1)} = \underline{v_3} - \frac{\varphi(\underline{v_1}, \underline{v_3})}{\varphi(\underline{v_1}, \underline{v_1})} \underline{v_1} = \underline{v_3} - \underline{v_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Si considera ora $V' = \operatorname{Span}(\underline{v_2}^{(1)}, \underline{v_3}^{(1)})$. Alla seconda iterazione dell'algoritmo si ottiene allora il seguente vettore:

- $\underline{v_3}^{(2)} = \underline{v_3}^{(1)} - \frac{\varphi(\underline{v_2}^{(1)}, \underline{v_3}^{(1)})}{\varphi(\underline{v_2}^{(1)}, \underline{v_2}^{(1)})} \underline{v_2}^{(1)} = \underline{v_3}^{(1)} - \underline{v_2}^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \underline{e_3}$.

Quindi la base ottenuta è $\mathcal{B}' = \{\underline{e_1}, \underline{e_2}, \underline{e_3}\}$, ossia la base canonica di $\mathbb{R}^3$, già ortonormale.

Osservazione 3.0.67. Si osserva adesso che se (V, φ) è uno spazio euclideo (e quindi $\varphi > 0$), e W è un sottospazio di V, vale la seguente decomposizione:

$$V = W \oplus^{\perp} W^{\perp}.$$

Pertanto ogni vettore $\underline{v} \in V$ può scriversi come $\underline{w} + \underline{w}'$ dove $\underline{w} \in W$ e $\underline{w}' \in W^{\perp}$, dove $\varphi(\underline{w}, \underline{w}') = 0$.

Definizione 3.0.68. (proiezione ortogonale) Si definisce l'applicazione $\mathrm{pr}_W : V \to V$, detta **proiezione ortogonale** su W, in modo tale che $\mathrm{pr}_W(\underline{v}) = \underline{w}$, dove $\underline{v} = \underline{w} + \underline{w}'$, con $\underline{w} \in W$ e $\underline{w}' \in W^{\perp}$.

Osservazione 3.0.69.
▶ Dacché la proiezione ortogonale è un caso particolare della classica applicazione lineare di proiezione su un sottospazio di una somma diretta, pr_W è un'applicazione lineare.
▶ Vale chiaramente che $\mathrm{pr}_W^2 = \mathrm{pr}_W$, da cui si ricava, se $W^\perp \neq \{\underline{0}\}$, che $\varphi_{\mathrm{pr}_W}(\lambda) = \lambda(\lambda - 1)$, ossia che $\mathrm{sp}(\mathrm{pr}_W) = \{0, 1\}$. Infatti $\mathrm{pr}_W(\underline{v})$ appartiene già a W, ed essendo la scrittura in somma di due elementi, uno di W e uno di W', unica, $\mathrm{pr}_W(\mathrm{pr}_W(\underline{v})) = \mathrm{pr}_W(\underline{v})$, da cui l'identità $\mathrm{pr}_W^2 = \mathrm{pr}_W$.
▶ Seguendo il ragionamento di prima, vale anche che $\mathrm{pr}_W|_W = \mathrm{Id}_W$ e che $\mathrm{pr}_W|_{W^\perp} = 0$.
▶ Inoltre, vale la seguente riscrittura di $\underline{v} \in V$: $\underline{v} = \mathrm{pr}_W(\underline{v}) + \mathrm{pr}_{W^\perp}(\underline{v})$.
▶ Se $\mathcal{B} = \{\underline{v_1}, \ldots, \underline{v_n}\}$ è una base ortogonale di W, allora $\mathrm{pr}_W(\underline{v}) = \sum_{i=1}^n \frac{\varphi(\underline{v}, \underline{v_i})}{\varphi(\underline{v_i}, \underline{v_i})} \underline{v_i} = \sum_{i=1}^n C(\underline{v}, \underline{v_i}) \underline{v_i}$. Infatti $\underline{v} - \sum_{i=1}^n C(\underline{v}, \underline{v_i}) \underline{v_i} \in W^\perp$.
▶ pr_W è un operatore simmetrico (o hermitiano se lo spazio è complesso). Infatti $\varphi(\mathrm{pr}_W(\underline{v}), \underline{w}) = \varphi(\mathrm{pr}_W(\underline{v}), \mathrm{pr}_W(\underline{w}) + \mathrm{pr}_{W^\perp}(\underline{w})) = \varphi(\mathrm{pr}_W(\underline{v}), \mathrm{pr}_W(\underline{w})) = \varphi(\mathrm{pr}_W(\underline{v}) + \mathrm{pr}_{W^\perp}(\underline{v}), \mathrm{pr}_W(\underline{w})) = \varphi(\underline{v}, \mathrm{pr}_W(\underline{w}))$.

Proposizione 3.0.70

Sia (V, φ) uno spazio euclideo. Allora valgono i seguenti risultati:

(i) Siano U, $W \subseteq V$ sono sottospazi di V, allora $U \perp W$, ossia[a] $U \subseteq W^\perp$, $\iff \mathrm{pr}_U \circ \mathrm{pr}_W = \mathrm{pr}_W \circ \mathrm{pr}_U = 0$.

(ii) Sia $V = W_1 \oplus \cdots \oplus W_n$. Allora $\underline{v} = \sum_{i=1}^n \mathrm{pr}_{W_i}(\underline{v}) \iff W_i \perp W_j \; \forall i \neq j$, $1 \leq i, j \leq n$.

[a] È sufficiente che valga $U \subseteq W^\perp$ affinché valga anche $W \subseteq U^\perp$. Infatti $U \subseteq W^\perp \implies W = W^{\perp\perp} \subseteq U^\perp$. Si osserva che in generale vale che $W \subseteq W^{\perp\perp}$, dove vale l'uguaglianza nel caso di un prodotto φ non degenere, com'è nel caso di uno spazio euclideo, essendo $\varphi > 0$ per ipotesi.

Dimostrazione. Si dimostrano i due risultati separatamente.

(i) Sia $\underline{v} \in V$. Allora $\mathrm{pr}_W(\underline{v}) \in W = W^{\perp\perp} \subseteq U^\perp$. Pertanto $\mathrm{pr}_U(\mathrm{pr}_W(\underline{v})) = \underline{0}$. Analogamente $\mathrm{pr}_W(\mathrm{pr}_U(\underline{v})) = \underline{0}$, da cui la tesi.

(ii) Sia vero che $\underline{v} = \sum_{i=1}^n \mathrm{pr}_{W_i}(\underline{v}) \; \forall \underline{v} \in V$. Sia $\underline{w} \in W_j$. Allora $\underline{w} = \sum_{i=1}^n \mathrm{pr}_{W_i}(\underline{w}) = \underline{w} + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}} \mathrm{pr}_{W_i}(\underline{w}) \implies \mathrm{pr}_{W_i}(\underline{w}) = \underline{0} \; \forall i \neq j$. Quindi $\underline{w} \in W_i^\perp \; \forall i \neq j$, e si conclude che $W_i \subseteq W_j^\perp \implies W_i \perp W_j$. Se invece $W_i \perp W_j \; \forall i \neq j$, sia $\mathcal{B}_i = \left\{ \underline{w}_i^{(1)}, \ldots, \underline{w}_i^{(k_i)} \right\}$ una base ortogonale di W_i. Allora $\mathcal{B} = \cup_{i=1}^n \mathcal{B}_i$ è anch'essa una base ortogonale di V, essendo $\varphi\left(\underline{w}_i^{(t_i)}, \underline{w}_j^{(t_j)}\right) = 0$ per ipotesi. Pertanto $\underline{v} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{k_i} C\left(\underline{v}, \underline{w}_i^{(j)}\right) \underline{w}_i^{(j)} = \sum_{i=1}^n \mathrm{pr}_{W_i}(\underline{v})$, da cui la tesi. □

Definizione 3.0.71. (inversione ortogonale) Si definisce l'applicazione $\rho_W : V \to V$, detta **inversione ortogonale**, in modo tale che, detto $\underline{v} = \underline{w} + \underline{w}' \in V$ con $\underline{w} \in W$, $\underline{w} \in W^\perp$, $\rho_W(\underline{v}) = \underline{w} - \underline{w}'$. Se $\dim W = \dim V - 1$, si dice che ρ_W è una **riflessione**.

Osservazione 3.0.72.
▶ Si osserva che ρ_W è un'applicazione lineare.
▶ Vale l'identità $\rho_W^2 = \mathrm{Id}_V$, da cui si ricava che $\varphi_{\rho_W}(\lambda) \mid (\lambda - 1)(\lambda + 1)$. In particolare, se $W^\perp \neq \{\underline{0}\}$, vale proprio che $\mathrm{sp}(\rho_W) = \{\pm 1\}$, dove $V_1 = W$ e $V_{-1} = W^\perp$.
▶ ρ_W è ortogonale (o unitaria, se V è uno spazio euclideo complesso). Infatti se $\underline{v_1} = \underline{w_1} + \underline{w_1}'$ e $\underline{v_2} = \underline{w_2} + \underline{w_2}'$, con $\underline{w_1}$, $\underline{w_2} \in W$ e $\underline{w_1}'$, $\underline{w_2}' \in W$, $\varphi(\rho_W(\underline{v_1}), \rho_W(\underline{v_2})) = \varphi(\underline{w_1} - \underline{w_1}', \underline{w_2} - \underline{w_2}') = \varphi(\underline{w_1}, \underline{w_2}) \underbrace{-\varphi(\underline{w_1}', \underline{w_2}) - \varphi(\underline{w_1}, \underline{w_2}')}_{=0} + \varphi(\underline{w_1}', \underline{w_2}') = \varphi(\underline{w_1} - \underline{w_1}', \underline{w_2} - \underline{w_2}')$.
Quindi $\varphi(\rho_W(\underline{v_1}), \rho_W(\underline{v_2})) = \varphi(\underline{w_1}, \underline{w_2}) + \varphi(\underline{w_1}', \underline{w_2}) + \varphi(\underline{w_1}, \underline{w_2}') + \varphi(\underline{w_1}', \underline{w_2}') = \varphi(\underline{v_1}, \underline{v_2})$.

Lemma 3.0.73

Sia (V, φ) uno spazio euclideo reale. Siano $\underline{u}$, $\underline{w} \in V$. Se $\|\underline{u}\| = \|\underline{w}\|$, allora esiste un sottospazio W di dimensione $n - 1$ per cui la riflessione ρ_W relativa a φ è tale che $\rho_W(\underline{u}) = \underline{w}$.

Dimostrazione. Se $\underline{v}$ e $\underline{w}$ sono linearmente dipendenti, dal momento che $\|v\| = \|w\|$, deve valere anche che $\underline{v} = \underline{w}$. Sia $\underline{u} \neq \underline{0}$, $\underline{u} \in \mathrm{Span}(\underline{v})^\perp$. Si consideri $U = \mathrm{Span}(\underline{u})$: si osserva che $\dim U = 1$ e che, essendo φ non degenere, $\dim U^\perp = n - 1$. Posto allora $W = U^\perp$, si ricava, sempre perché φ è non degenere, che $U = U^{\perp\perp} = W^\perp$. Si conclude pertanto che $\rho_W(\underline{v}) = \underline{v} = \underline{w}$.

Siano adesso $\underline{v}$ e $\underline{w}$ linearmente indipendenti e sia $U = \mathrm{Span}(\underline{v} - \underline{w})$. Dal momento che $\dim U = 1$ e φ è non degenere, $\dim U^\perp = n - 1$. Sia allora $W = U^\perp$. Allora, come prima, $U = U^{\perp\perp} = W^\perp$. Si consideri dunque la riflessione ρ_W: dacché $\underline{v} = \frac{\underline{v}+\underline{w}}{2} + \frac{\underline{v}-\underline{w}}{2}$, e $\varphi(\frac{\underline{v}+\underline{w}}{2}, \frac{\underline{v}-\underline{w}}{2}) = \frac{\|\underline{v}\| - \|\underline{w}\|}{4} = 0$, $\underline{v}$ è già decomposto in un elemento di W e in uno di $W^\perp$, per cui si conclude che $\rho_W(\underline{v}) = \frac{\underline{v}+\underline{w}}{2} - \frac{\underline{v}-\underline{w}}{2} = \underline{w}$, ottenendo la tesi. □

Teorema 3.0.74 (di Cartan–Dieudonné)

Sia (V, φ) uno spazio euclideo reale. Ogni isometria di V è allora prodotto di al più n riflessioni.

Dimostrazione. Si dimostra la tesi applicando il principio di induzione sulla dimensione n di V.

(*passo base*) Sia $n = 1$ e sia inoltre f un'isometria di V. Sia $\underline{v_1}$ l'unico elemento di una base ortonormale $\mathcal{B}$ di V. Allora $\|f(\underline{v_1})\| = \|\underline{v_1}\| = 1$, da cui si ricava che[1] $f(\underline{v_1}) = \pm\underline{v_1}$, ossia che $f = \pm \operatorname{Id}_V$. Se $f = \operatorname{Id}_V$, f è un prodotto vuoto, e già verifica la tesi; altrimenti $f = \rho_{\{\underline{0}\}}$, dove si considera $V = V \oplus^\perp \{\underline{0}\}$. Pertanto f è prodotto di al più una riflessione.

(*passo induttivo*) Sia $\mathcal{B} = \{\underline{v_1}, \ldots, \underline{v_n}\}$ una base di V. Sia f un'isometria di V. Si assuma inizialmente l'esistenza di $\underline{v_i}$ tale per cui $f(\underline{v_i}) = \underline{v_i}$. Allora, detto $W = \operatorname{Span}(\underline{v_i})$, si può decomporre V come $W \oplus^\perp W^\perp$. Si osserva che $W^\perp$ è f-invariante: infatti, se $\underline{u} \in W^\perp$, $\varphi(\underline{v_i}, f(\underline{u})) = \varphi(f(\underline{v_i}), f(\underline{u})) = \varphi(\underline{v_i}, \underline{u}) = 0 \implies f(\underline{u}) \in W^\perp$. Pertanto si può considerare l'isometria $f|_{W^\perp}$. Dacché $\dim W^\perp = n - 1$, per il passo induttivo esistono W_1, ..., W_k sottospazi di $W^\perp$ con $k \leq n - 1$ per cui ρ_{W_1}, ..., $\rho_{W_k} \in \operatorname{End}(W^\perp)$ sono tali che $f|_{W^\perp} = \rho_{W_1} \circ \cdots \circ \rho_{W_k}$.

Si considerino allora le riflessioni $\rho_{W_1 \oplus^\perp W}$, ..., $\rho_{W_k \oplus^\perp W}$. Si mostra che $\rho_{W_1 \oplus^\perp W} \circ \cdots \circ \rho_{W_k \oplus^\perp W}|_W = \operatorname{Id}_W = f|_W$. Affinché si faccia ciò è sufficiente mostrare che $(\rho_{W_1 \oplus^\perp W} \circ \cdots \circ \rho_{W_k \oplus^\perp W})(\underline{v_i}) = \underline{v_i}$. Si osserva che $\underline{v_i} \in W_i \oplus^\perp W$ $\forall 1 \leq i \leq k$, e quindi che $\rho_{W_k \oplus^\perp W}(\underline{v_i}) = \underline{v_i}$. Reiterando l'applicazione di questa identità nel prodotto, si ottiene infine il risultato desiderato. Infine, si dimostra che $\rho_{W_1 \oplus^\perp W} \circ \cdots \circ \rho_{W_k \oplus^\perp W}|_{W^\perp} = \rho_{W_1} \circ \cdots \circ \rho_{W_k} = f|_{W^\perp}$. Analogamente a prima, è sufficiente mostrare che $\rho_{W_k \oplus^\perp W}(\underline{u}) = \rho_{W_k}(\underline{u})$ $\forall \underline{u} \in W^\perp$. Sia $\underline{u} = \rho_{W_k}(\underline{u}) + \underline{u}'$ con $\underline{u}' \in W_k^\perp \cap W^\perp \subseteq (W_k \oplus^\perp W)^\perp$, ricordando che $W^\perp = W_k \oplus^\perp (W^\perp \cap W_k^\perp)$. Allora, poiché $\rho_{W_k}(\underline{u}) \in W_k \subseteq (W_k \oplus^\perp W)$, si conclude che $\rho_{W_k \oplus^\perp W}(\underline{u}) = \rho_{W_k}(\underline{u})$. Pertanto, dacché vale che $V = W \oplus^\perp W^\perp$ e che $\rho_{W_1 \oplus^\perp W} \circ \cdots \circ \rho_{W_k \oplus^\perp W}$ e f, ristretti su W o su $W^\perp$, sono le stesse identiche mappe, allora in particolare vale l'uguaglianza più generale:

$$f = \rho_{W_1 \oplus^\perp W} \circ \cdots \circ \rho_{W_k \oplus^\perp W},$$

e quindi f è prodotto di $k \leq n - 1$ riflessioni.

Se invece non esiste alcun $\underline{v_i}$ tale per cui $f(\underline{v_i}) = \underline{v_i}$, per il *Lemma 1* esiste una riflessione τ tale per cui $\tau(f(\underline{v_i})) = \underline{v_i}$. In particolare $\tau \circ f$ è anch'essa un'isometria, essendo composizione di due isometrie. Allora, da prima, esistono U_1, ..., U_k sottospazi di V con $k \leq n - 1$ tali per cui $\tau \circ f = \rho_{U_1} \circ \cdots \circ \rho_{U_k}$, da cui $f = \tau \circ \rho_{U_1} \circ \cdots \circ \rho_{U_k}$, ossia f è prodotto di al più n riflessioni, concludendo il passo induttivo. □

---

[1] Infatti, detto $\lambda \in \mathbb{R}$ tale che $f(\underline{v_1}) = \lambda \underline{v_1}$, $\|\underline{v_1}\| = \|f(\underline{v_1})\| = \lambda^2 \|\underline{v_1}\| \implies \lambda = \pm 1$, ossia $f = \pm \operatorname{Id}$, come volevasi dimostrare.

Lemma 3.0.1

Sia $f \in \mathrm{End}(V)$ simmetrico (o hermitiano). Allora f ha solo autovalori reali[a].

[a]Nel caso di f simmetrico, si intende in particolare che tutte le radici del suo polinomio caratteristico sono reali.

Dimostrazione. Si assuma che V è uno spazio euclideo complesso, e quindi che φ è un prodotto hermitiano. Allora, se f è hermitiano, sia $\lambda \in \mathbb{C}$ un suo autovalore[2] e sia $\underline{v} \in V_\lambda$. Allora $\varphi(\underline{v}, f(\underline{v})) = \varphi(f(\underline{v}), \underline{v}) = \overline{\varphi(\underline{v}, f(\underline{v}))} \implies \varphi(\underline{v}, f(\underline{v})) \in \mathbb{R}$. Inoltre vale la seguente identità:

$$\varphi(\underline{v}, f(\underline{v})) = \varphi(\underline{v}, \lambda\underline{v}) = \lambda\varphi(\underline{v}, \underline{v}),$$

da cui, ricordando che φ è non degenere e che $\varphi(\underline{v}, \underline{v}) \in \mathbb{R}$, si ricava che:

$$\lambda = \frac{\varphi(\underline{v}, f(\underline{v}))}{\varphi(\underline{v}, \underline{v})} \in \mathbb{R}.$$

Sia ora invece V è uno spazio euclideo reale e φ è un prodotto scalare. Allora, $(V_\mathbb{C}, \varphi_\mathbb{C})$ è uno spazio euclideo complesso, e $f_\mathbb{C}$ è hermitiano. Sia $\mathcal{B}$ una base di V. Allora, come visto all'inizio di questa dimostrazione, $f_\mathbb{C}$ ha solo autovalori reali, da cui si ricava che il polinomio caratteristico di $f_\mathbb{C}$ è completamente riducibile in $\mathbb{R}$. Si osserva inoltre che $p_f(\lambda) = \det(M_\mathcal{B}(f) - \lambda I_n) = \det(M_\mathcal{B}(f_\mathbb{C}) - \lambda I_n) = p_{f_\mathbb{C}}(\lambda)$. Si conclude dunque che anche p_f è completamente riducibile in $\mathbb{R}$. □

Osservazione 3.0.2. Dal lemma precedente consegue immediatamente che se $A \in M(n, \mathbb{R})$ è simmetrica (o se appartiene a $M(n, \mathbb{C})$ ed è hermitiana), considerando l'operatore simmetrico f_A indotto da A in $\mathbb{R}^n$ (o $\mathbb{C}^n$), f_A ha tutti autovalori reali, e dunque così anche A.

Lemma 3.0.3

Sia $f \in \mathrm{End}(V)$ simmetrico (o hermitiano). Allora se λ, μ sono due autovalori distinti di f, $V_\lambda \perp V_\mu$.

Dimostrazione. Siano $\underline{v} \in V_\lambda$ e $\underline{w} \in V_\mu$. Allora[3] $\lambda\varphi(\underline{v}, \underline{w}) = \varphi(\lambda\underline{v}, \underline{w}) = \varphi(f(\underline{v}), \underline{w}) = \varphi(\underline{v}, f(\underline{w})) = \varphi(\underline{v}, \mu\underline{w}) = \mu\varphi(\underline{v}, \underline{w})$. Pertanto vale la seguente identità:

$$(\lambda - \mu)\varphi(\underline{v}, \underline{w}) = 0.$$

In particolare, valendo $\lambda - \mu \neq 0$ per ipotesi, $\varphi(\underline{v}, \underline{w}) = 0 \implies V_\lambda \perp V_\mu$, da cui la tesi. □

[2]Tale autovalore esiste sicuramente dal momento che $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ è un campo algebricamente chiuso.
[3]Si osserva che non è stato coniugato λ nei passaggi algebrici, valendo $\lambda \in \mathbb{R}$ dallo scorso lemma.

Lemma 3.0.4

Sia $f \in \mathrm{End}(V)$ simmetrico (o hermitiano). Se $W \subseteq V$ è f-invariante, allora anche $W^\perp$ lo è.

Dimostrazione. Siano $\underline{w} \in W$ e $\underline{v} \in W^\perp$. Allora $\varphi(\underline{w}, f(\underline{v})) = \varphi(\underbrace{f(\underline{w})}_{\in W}, \underline{v}) = 0$, da cui si ricava che $f(\underline{v}) \in W^\perp$, ossia la tesi. □

Teorema 3.0.5 (spettrale reale)

Sia (V, φ) uno spazio euclideo reale (o complesso) e sia $f \in \mathrm{End}(V)$ simmetrico (o hermitiano). Allora esiste una base ortogonale $\mathcal{B}$ di V composta di autovettori per f.

Dimostrazione. Siano λ_1, ..., λ_k tutti gli autovalori reali di f. Sia inoltre $W = V_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus V_{\lambda_k}$. Per i lemmi precedenti, vale che:

$$W = V_{\lambda_1} \oplus^\perp \cdots \oplus^\perp V_{\lambda_k}.$$

Sicuramente $W \subset V$. Si assuma però che $W \subsetneq V$. Allora $V = W \oplus^\perp W^\perp$. In particolare, per il lemma precedente, $W^\perp$ è f-invariante. Quindi $f|_{W^\perp}$ è un endomorfismo di uno spazio di dimensione non nulla. Si osserva che $f|_{W^\perp}$ è chiaramente simmetrico (o hermitiano), essendo solo una restrizione di f. Allora $f|_{W^\perp}$ ammette autovalori reali per i lemmi precedenti; tuttavia questo è un assurdo, dal momento che ogni autovalore di $f|_{W^\perp}$ è anche autovalore di f e si era supposto che[4] λ_1, ..., λ_k fossero tutti gli autovalori di f, $\lightning$. Quindi $W = V$. Pertanto, detta $\mathcal{B}_i$ una base ortonormale di V_{λ_i}, $\mathcal{B} = \cup_{i=1}^k \mathcal{B}_i$ è una base ortonormale di V, da cui la tesi. □

Corollario 3.0.6 (teorema spettrale per le matrici)

Sia $A \in M(n, \mathbb{R})$ simmetrica (o appartenente a $M(n, \mathbb{C})$ ed hermitiana). Allora $\exists\, P \in O_n$ (o $P \in U_n$) tale che $P^{-1}AP = P^\top AP$ (o $P^{-1}AP = P^*AP$ nel caso hermitiano) sia una matrice diagonale reale.

Dimostrazione. Si consideri f_A, l'operatore indotto dalla matrice A in $\mathbb{R}^n$ (o $\mathbb{C}^n$). Allora f_A è un operatore simmetrico (o hermitiano) sul prodotto scalare (o hermitiano) standard. Pertanto, per il teorema spettrale reale, esiste una base ortonormale $\mathcal{B} = \{\underline{v_1}, \ldots, \underline{v_n}\}$ composta di autovettori di f_A. In particolare, detta $\mathcal{B}'$ la base canonica di $\mathbb{R}^n$ (o $\mathbb{C}^n$), vale la seguente identità:

[4] Infatti tale autovalore λ non può già comparire tra questi autovalori, altrimenti, detto $i \in \mathbb{N}$ tale che $\lambda = \lambda_i$, $V_{\lambda_i} \cap W^\perp \neq \{\underline{0}\}$, violando la somma diretta supposta.

$$M_{\mathcal{B}}(f) = M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}(\mathrm{Id})^{-1} M_{\mathcal{B}'}(f) M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}(\mathrm{Id}),$$

dove $M_{\mathcal{B}'}(f) = A$, $M_{\mathcal{B}}(f)$ è diagonale, essendo $\mathcal{B}$ composta di autovettori, e $P = M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}$ si configura nel seguente modo:

$$M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}(f) = \left(\underline{v_1} \mid \cdots \mid \underline{v_n} \right).$$

Dacché $\mathcal{B}$ è ortogonale, P è anch'essa ortogonale, da cui la tesi. □

Osservazione 3.0.7.
▶ Un importante risultato che consegue direttamente dal teorema spettrale per le matrici riguarda la segnatura di un prodotto scalare (o hermitiano). Infatti, detta $A = M_{\mathcal{B}}(\varphi)$, $D = P^\top AP$, e dunque $D \cong A$. Allora, essendo D diagonale, l'indice di positività è esattamente il numero di valori positivi sulla diagonale, ossia il numero di autovalori positivi di A. Analogamente l'indice di negatività è il numero di autovalori negativi, e quello di nullità è la molteplicità algebrica di 0 come autovalore (ossia esattamente la dimensione di $V_\varphi^\perp = \operatorname{Ker} a_\varphi$).

Teorema 3.0.8 (di triangolazione con base ortonormale)
Sia $f \in \mathrm{End}(V)$, dove (V, φ) è uno spazio euclideo su $\mathbb{K}$. Allora, se p_f è completamente riducibile in $\mathbb{K}$, esiste una base ortonormale $\mathcal{B}$ tale per cui $M_{\mathcal{B}}(f)$ è triangolare superiore (ossia esiste una base ortonormale a bandiera per f).

Dimostrazione. Per il teorema di triangolazione, esiste una base $\mathcal{B}$ a bandiera per f. Allora, applicando l'algoritmo di ortogonalizzazione di Gram-Schmidt, si può ottenere da $\mathcal{B}$ una nuova base $\mathcal{B}'$ ortonormale e che mantenga le stesse bandiere. Allora, se $\mathcal{B}' = \{\underline{v_1}, \ldots, \underline{v_n}\}$ è ordinata, dacché $\mathrm{Span}(\underline{v_1}, \ldots, \underline{v_i})$ è f-invariante, $f(\underline{v_i}) \in \mathrm{Span}(\underline{v_1}, \ldots, \underline{v_i})$, e quindi $M_{\mathcal{B}'}(f)$ è triangolare superiore, da cui la tesi. □

Corollario 3.0.9
Sia $A \in M(n, \mathbb{R})$ (o $M(n, \mathbb{C})$) tale per cui p_A è completamente riducibile. Allora $\exists\, P \in O_n$ (o U_n) tale per cui $P^{-1}AP = P^\top AP$ (o $P^{-1}AP = P^*AP$) è triangolare superiore.

Dimostrazione. Si consideri l'operatore f_A indotto da A in $\mathbb{R}^n$ (o $\mathbb{C}^n$). Sia $\mathcal{B}$ la base canonica di $\mathbb{R}^n$ (o di $\mathbb{C}^n$). Allora, per il teorema di triangolazione con base ortonormale, esiste una base ortonormale $\mathcal{B}' = \{\underline{v_1}, \ldots, \underline{v_n}\}$ di $\mathbb{R}^n$ (o di $\mathbb{C}^n$) tale per cui $T = M_{\mathcal{B}'}(f_A)$ è triangolare superiore. Si osserva inoltre che $M_{\mathcal{B}}(f_A) = A$ e che $P = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}(f_A) = \left(\underline{v_1} \mid \cdots \mid \underline{v_n} \right)$ è ortogonale (o unitaria), dacché le sue colonne formano una base ortonormale. Allora, dalla formula del cambiamento di base per la applicazioni lineari, si ricava che:

$$A = PTP^{-1} \implies T = P^{-1}TP,$$

da cui, osservando che $P^{-1} = P^\top$ (o $P^{-1} = P^*$), si ricava la tesi. □

Definizione 3.0.10 (operatore normale)**.** Sia (V, φ) uno spazio euclideo reale. Allora $f \in \mathrm{End}(V)$ si dice **normale** se commuta con il suo trasposto (i.e. se $ff^\top = f^\top f$). Analogamente, se (V, φ) è uno spazio euclideo complesso, allora f si dice normale se commuta con il suo aggiunto (i.e. se $ff^* = f^*f$).

Definizione 3.0.11 (matrice normale)**.** Una matrice $A \in M(n, \mathbb{R})$ (o $M(n, \mathbb{C})$) si dice **normale** se $AA^\top = A^\top A$ (o $AA^* = A^*A$).

Osservazione 3.0.12.
▶ Se $A \in M(n, \mathbb{R})$ e A è simmetrica ($A = A^\top$), antisimmetrica ($A = -A^\top$) o ortogonale ($AA^\top = A^\top A = I_n$), sicuramente A è normale.
▶ Se $A \in M(n, \mathbb{C})$ e A è hermitiana ($A = A^*$), antihermitiana ($A = -A^*$) o unitaria ($AA^* = A^*A = I_n$), sicuramente A è normale.
▶ f è normale $\iff$ $M_\mathcal{B}(f)$ è normale, con $\mathcal{B}$ ortonormale di V.
▶ A è normale $\iff$ f_A è normale, considerando che la base canonica di $\mathbb{C}^n$ è già ortonormale rispetto al prodotto hermitiano standard.
▶ Se V è euclideo reale, f è normale $\iff$ $f_\mathbb{C}$ è normale. Infatti, se f è normale, f e $f^\top$ commutano. Allora anche $f_\mathbb{C}$ e $(f^\top)_\mathbb{C} = (f_\mathbb{C})^*$ commutano, e quindi $f_\mathbb{C}$ è normale. Ripercorrendo i passaggi al contrario, si osserva infine che vale anche il viceversa.

Lemma 3.0.1

Sia $A \in M(n, \mathbb{C})$ triangolare superiore e normale (i.e. $AA^* = A^*A$). Allora A è diagonale.

Dimostrazione. Se A è normale, allora $(A^*)_i A^i = \overline{A}^i A^i$ deve essere uguale a $A_i (A^*)^i = A_i \overline{A}_i$ $\forall\, 1 \leq i \leq n$. Si dimostra per induzione su i da 1 a n che tutti gli elementi, eccetto per quelli diagonali, delle righe A_1, ..., A_i sono nulli.

(*passo base*) Si osserva che valgono le seguenti identità:

$$\overline{A}^1 A^1 = |a_{11}|^2,$$
$$A_1 \overline{A}_1 = |a_{11}|^2 + |a_{12}|^2 + \ldots + |a_{1n}|^2.$$

Dovendo vale l'uguaglianza, si ricava che $|a_{12}|^2 \ldots + |a_{1n}|^2$, e quindi che $|a_{1i}|^2 = 0 \implies a_{1i} = 0 \quad \forall\, 2 \leq i \leq n$, dimostrando il passo base[5].

[5] Gli altri elementi sono infatti già nulli per ipotesi, essendo A triangolare superiore

(*passo induttivo*) Analogamente a prima, si considerano le seguenti identità:

$$\overline{A}^i A^i = |a_{1i}|^2 + \ldots + |a_{ii}|^2 = |a_{ii}|^2 \,,$$
$$A_i \overline{A}_i = |a_{ii}|^2 + \left|a_{i(i+1)}\right|^2 + \ldots + |a_{in}|^2 \,,$$

dove si è usato che, per il passo induttivo, tutti gli elementi, eccetto per quelli diagonali, delle righe A_1, ..., A_{i-1} sono nulli. Allora, analogamente a prima, si ricava che $a_{ij} = 0$ $\forall\, i < j \leq n$, dimostrando il passo induttivo, e quindi la tesi. □

Osservazione 3.0.2.
▶ Chiaramente vale anche il viceversa del precedente lemma: se infatti $A \in M(n, \mathbb{C})$ è diagonale, A è anche normale, dal momento che commuta con A^*.
▶ Reiterando la stessa dimostrazione del precedente lemma per $A \in M(n, \mathbb{R})$ triangolare superiore e normale reale (i.e. $AA^\top = A^\top A$) si può ottenere una tesi analoga.

Teorema 3.0.3
Sia (V, φ) uno spazio euclideo complesso. Allora f è un operatore normale $\iff$ esiste una base ortonormale $\mathcal{B}$ di autovettori per f.

Dimostrazione. Si dimostrano le due implicazioni separatamente.

($\implies$) Poiché $\mathbb{C}$ è algebricamente chiuso, p_f è sicuramente riducibile. Pertanto, per il teorema di triangolazione con base ortonormale, esiste una base ortonormale $\mathcal{B}$ a bandiera per f. In particolare, $M_\mathcal{B}(f)$ è sia normale che triangolare superiore. Allora, per il *Lemma 1*, $M_\mathcal{B}(f)$ è diagonale, e dunque $\mathcal{B}$ è anche una base di autovettori per f.

($\impliedby$) Se esiste una base ortonormale $\mathcal{B}$ di autovettori per f, $M_\mathcal{B}(f)$ è diagonale, e dunque anche normale. Allora, poiché $\mathcal{B}$ è ortonormale, anche f è normale. □

Corollario 3.0.4
Sia $A \in M(n, \mathbb{C})$. Allora A è normale $\iff$ $\exists\, U \in U_n$ tale che $U^{-1}AU = U^*AU$ è diagonale.

Dimostrazione. Si dimostrano le due implicazioni separatamente.

($\implies$) Sia $\mathcal{B}$ la base canonica di $\mathbb{C}^n$. Si consideri l'applicazione lineare f_A indotta da A su $\mathbb{C}^n$. Se A è normale, allora anche f_A lo è. Pertanto, per il precedente teorema, esiste una base ortonormale $\mathcal{B}' = \{\underline{v_1}, \ldots, \underline{v_n}\}$ di autovettori per f_A. In particolare, $U = M_\mathcal{B}^{\mathcal{B}'}(\mathrm{Id}) = \left(\underline{v_1} \mid \cdots \mid \underline{v_n}\right)$ è unitaria ($U \in U_n$), dacché le colonne di U sono ortonormali.

Si osserva inoltre che $M_{\mathcal{B}}(f_A) = A$ e che $D = M_{\mathcal{B}'}(f_A)$ è diagonale. Allora, per la formula del cambiamento di base per le applicazioni lineari, si conclude che:

$$A = UDU^{-1} \implies D = U^{-1}AU = U^*AU,$$

ossia che U^*AU è diagonale.

$(\impliedby)$ Sia $D = U^*AU$. Dacché D è diagonale, D è anche normale. Pertanto $DD^* = D^*D$. Sostituendo, si ottiene che $U^*AUU^*A^*U = U^*A^*UU^*AU$. Ricordando che $U^*U = I_n$ e che $U \in U_n$ è sempre invertibile, si conclude che $AA^* = A^*A$, ossia che A è normale a sua volta, da cui la tesi. $\square$

Osservazione 3.0.5.
► Si può osservare mediante l'applicazione dell'ultimo corollario che, se A è hermitiana (ed è dunque anche normale), $\exists\, U \in U_n \mid U^*AU = D$, dove $D \in M(n, \mathbb{R})$, ossia tale corollario implica il teorema spettrale in forma complessa. Infatti $\overline{D} = D^* = U^*A^*U = U^*AU = D \implies D \in M(n, \mathbb{R})$.

► Se $A \in M(n, \mathbb{R})$ è una matrice normale reale (i.e. $AA^\top = A^\top A$) con p_A completamente riducibile in $\mathbb{R}$, allora è possibile reiterare la dimostrazione del precedente teorema per concludere che $\exists\, O \in O_n \mid O^\top AO = D$ con $D \in M(n, \mathbb{R})$, ossia che $A = ODO^\top$. Tuttavia questo implica che $A^\top = (ODO^\top) = OD^\top O^\top = ODO^\top = A$, ossia che A è simmetrica. In particolare, per il teorema spettrale reale, vale anche il viceversa. Pertanto, se $A \in M(n, \mathbb{R})$, A è una matrice normale reale con p_A completamente riducibile in $\mathbb{R} \iff A = A^\top$.

Esercizio 3.0.6. Sia V uno spazio dotato del prodotto φ. Sia $W \subseteq V$ un sottospazio di V. Sia $\mathcal{B}_W = \{\underline{w_1}, \ldots, \underline{w_k}\}$ una base di W e sia $\mathcal{B} = \{\underline{w_1}, ..., \underline{w_k}, \underline{v_{k+1}}, ..., \underline{v_n}\}$ una base di V. Sia $A = M_{\mathcal{B}}(\varphi)$. Si dimostrino allora i seguenti risultati.

(i) $W^\perp = \{\underline{v} \in V \mid \varphi(\underline{v}, \underline{w_i}) = 0\}$,

(ii) $W^\perp = \{\underline{v} \in V \mid A_{1,\ldots,k}[\underline{v}]_{\mathcal{B}} = 0\} = [\cdot]_{\mathcal{B}}^{-1}(\operatorname{Ker} A_{1,\ldots,k})$,

(iii) $\dim W^\top = \dim V - \operatorname{rg}(A_{1,\ldots,k})$,

(iv) Se φ è non degenere, $\dim W + \dim W^\perp = \dim V$.

Soluzione. Chiaramente vale l'inclusione $W^\perp \subseteq \{\underline{v} \in V \mid \varphi(\underline{v}, \underline{w_i}) = 0\}$. Sia allora $\underline{v} \in V \mid \varphi(\underline{v}, \underline{w_i}) = 0\ \forall 1 \leq i \leq k$ e sia $\underline{w} \in W$. Allora esistono α_1, ..., α_k tali che $\underline{w} = \alpha_1\underline{w_1} + \ldots + \alpha_k\underline{w_k}$. Pertanto si conclude che $\varphi(\underline{v}, \alpha_1\underline{w_1} + \ldots + \alpha_k\underline{w_k}) = \alpha_1\varphi(\underline{v}, \underline{w_1}) + \ldots + \alpha_k\varphi(\underline{v}, \underline{w_k}) = 0 \implies \underline{v} \in W^\top$. Pertanto $W^\top = \{\underline{v} \in V \mid \varphi(\underline{v}, \underline{w_i}) = 0\}$, dimostrando (i).

Si osserva che $\varphi(\underline{v}, \underline{w_i}) = 0 \iff \varphi(\underline{w_i}, \underline{v}) = 0$. Se φ è scalare, allora $\varphi(\underline{w_i}, \underline{v}) = 0 \overset{\text{def}}{\iff} [\underline{w_i}]_{\mathcal{B}}^\top A[\underline{v}]_{\mathcal{B}} = (\underline{e_i})^\top A[\underline{v}]_{\mathcal{B}} = A_i[\underline{v}]_{\mathcal{B}} = 0$. Pertanto $\underline{v} \in W^\top \iff A_i[\underline{v}]_{\mathcal{B}} = 0\ \forall 1 \leq i \leq k$, ossia se $A_{1,\ldots,k}[\underline{v}]_{\mathcal{B}} = 0$ e $[\underline{v}]_{\mathcal{B}} \in \operatorname{Ker} A_{1,\ldots,k}$, dimostrando (ii). Analogamente si ottiene la tesi se φ è hermitiano. Applicando la formula delle dimensioni, si ricava dunque che $\dim W^\top = \dim \operatorname{Ker} A_{1,\ldots,k} = \dim V - \operatorname{rg} A_{1,\ldots,k}$, dimostrando (iii).

Se φ è non degenere, A è invertibile, dacché $\dim V^\perp = \dim \operatorname{Ker} A = 0$. Allora ogni minore di taglia k di A ha determinante diverso da zero. Dacché ogni minore di taglia k di $A_{1,\ldots,k}$ è anche un minore di taglia k di A, si ricava che anche ogni minore di taglia k di $A_{1,\ldots,k}$ ha determinante diverso da zero, e quindi che $\operatorname{rg}(A_{1,\ldots,k}) \geq k$. Dacché deve anche valere $\operatorname{rg}(A_{1,\ldots,k}) \leq \min\{k,n\} = k$, si conclude che $\operatorname{rg}(A_{1,\ldots,k})$ vale esattamente $k = \dim W$. Allora, dal punto (iii), vale che $\dim W^\perp + \dim W = \dim W^\perp + \operatorname{rg}(A_{1,\ldots,k}) = \dim V$, dimostrando il punto (iv). □

Esercizio 3.0.7. Sia V uno spazio dotato del prodotto φ. Sia $U \subseteq V$ un sottospazio di V. Si dimostrino allora i seguenti due risultati.

(i) Il prodotto φ induce un prodotto $\tilde{\varphi} : V/U \times V/U \to \mathbb{K}$ tale che $\tilde{\varphi}(\underline{v} + U, \underline{v}' + U) = \varphi(\underline{v}, \underline{v}')$ se e soltanto se $U \subseteq V^\perp$, ossia se e solo se $U \perp V$.

(ii) Se $U = V^\perp$, allora il prodotto $\tilde{\varphi}$ è non degenere.

(iii) Sia $\pi : V \to V/V^\perp$ l'applicazione lineare di proiezione al quoziente. Allora $U^\perp = \{\underline{v} \in V \mid \tilde{\varphi}(\pi(\underline{v}), \pi(\underline{u})) = 0 \; \forall \underline{u} \in U\} = \pi^{-1}(\pi(U)^\perp)$.

(iv) Vale la formula delle dimensioni per il prodotto φ: $\dim U + \dim U^\perp = \dim V + \dim(U \cap V^\perp)$.

Soluzione. Sia $\underline{w} = \underline{v} + \underline{u_1} \in \underline{v} + U$, con $\underline{u_1} \in U$. Se $\tilde{\varphi}$ è ben definito, allora deve valere l'uguaglianza $\varphi(\underline{v}, \underline{v}') = \varphi(\underline{w}, \underline{v}') = \varphi(\underline{v} + \underline{u_1}, \underline{v}') = \varphi(\underline{v}, \underline{v}') + \varphi(\underline{u_1}, \underline{v}')$, ossia $\varphi(\underline{u_1}, \underline{v}') = 0$ $\forall \underline{v}' \in V \implies \underline{u_1} \in V^\perp \implies U \subseteq V^\perp$. Viceversa, se $U \subseteq V^\perp$, sia $\underline{w}' = \underline{v}' + \underline{u_2} \in \underline{v}' + U$, con $\underline{u_2} \in U$. Allora vale la seguente identità:

$$\varphi(\underline{w}, \underline{w}') = \varphi(\underline{v} + \underline{u_1}, \underline{v}' + \underline{u_2}) = \varphi(\underline{v}, \underline{v}') + \underbrace{\varphi(\underline{v}, \underline{u_2}) + \varphi(\underline{u_1}, \underline{v}') + \varphi(\underline{u_1}, \underline{u_2})}_{=0}.$$

Pertanto $\tilde{\varphi}$ è ben definito, dimostrando (i).

Sia ora $U = V/V^\perp$. Sia $\underline{v} + U \in (V/U)^\perp = \operatorname{Rad}(\tilde{\varphi})$. Allora, $\forall \underline{v}' + U \in V/U$, $\tilde{\varphi}(\underline{v} + U, \underline{v}' + U) = \varphi(\underline{v}, \underline{v}') = 0$, ossia $\underline{v} \in V^\perp = U$. Pertanto $\underline{v} + U = U \implies \operatorname{Rad}(\tilde{\varphi}) = \{V^\perp\}$, e quindi $\tilde{\varphi}$ è non degenere, dimostrando (ii).

Si dimostra adesso l'uguaglianza $U^\perp = \pi^{-1}(\pi(U)^\perp)$. Sia $\underline{v} \in U^\perp$. Allora $\tilde{\varphi}(\pi(\underline{v}), \pi(\underline{u})) = \tilde{\varphi}(\underline{v} + V^\perp, \underline{u} + V^\perp) = \varphi(\underline{v}, \underline{u}) = 0 \; \forall \underline{u} \in U$, da cui si ricava che vale l'inclusione $U^\perp \subseteq \pi^{-1}(\pi(U)^\perp)$. Sia ora $\underline{v} \in \pi^{-1}(\pi(U)^\perp)$, e sia $\underline{u} \in U$. Allora $\varphi(\underline{v}, \underline{u}) = \tilde{\varphi}(\underline{v} + V^\perp, \underline{u} + V^\perp) = \tilde{\varphi}(\pi(\underline{v}), \pi(\underline{u})) = 0$, da cui vale la doppia inclusione, e dunque l'uguaglianza desiderata, dimostrando (iii).

Dall'uguaglianza del punto (iii), l'applicazione della formula delle dimensioni e l'identità ottenuta dal punto (iv) dell'*Esercizio 2* rispetto al prodotto $\tilde{\varphi}$ non degenere, si ricavano le seguenti identità:

$$\begin{cases} \dim \pi(U) = \dim U - \dim(U \cap \operatorname{Ker} \pi) = \dim U - \dim(U \cap V^\perp), \\ \dim \pi(U)^\perp = \dim V/V^\perp - \dim \pi(U) = \dim V - \dim V^\perp - \dim \pi(U), \\ \dim U^\perp = \dim \pi(U)^\perp + \dim \operatorname{Ker} \pi = \dim \pi(U)^\perp + \dim V^\perp, \end{cases}$$

dalle quali si ricava la seguente identità:

$$\dim U^\perp = \dim V - \dim V^\perp - (\dim U - \dim(U \cap V^\perp)) + \dim V^\perp,$$

da cui si ricava che $\dim U + \dim U^\perp = \dim V + \dim(U \cap V^\perp)$, dimostrando (iv). $\square$

Esercizio 3.0.8. Sia V uno spazio vettoriale dotato del prodotto φ. Si dimostri allora che $(W^\perp)^\perp = W + V^\perp$.

Soluzione. Sia $\underline{v} = \underline{w}' + \underline{v}' \in W + V^\perp$, con $\underline{w}' \in W$ e $\underline{v}' \in V^\perp$. Sia inoltre $\underline{w} \in W^\perp$. Allora $\varphi(\underline{v}, \underline{w}) = \varphi(\underline{w}' + \underline{v}', \underline{w}) = \varphi(\underline{w}', \underline{w}) + \varphi(\underline{v}', \underline{w}) = 0$, dove si è usato che $\underline{w}' \perp \underline{w}$ dacché $\underline{w} \in W^\perp$ e $\underline{w}' \in W$ e che $\underline{v}' \in V^\perp$. Allora vale l'inclusione $W + V^\perp \subseteq (W^\perp)^\perp$.

Applicando le rispettive formule delle dimensioni a $W^\perp$, $(W^\perp)^\perp$ e $W + V^\perp$ si ottengono le seguenti identità:

$$\begin{cases} \dim W^\perp = \dim V + \dim(W \cap V^\perp) - \dim W, \\ \dim (W^\perp)^\perp = \dim V + \dim(W^\perp \cap V^\perp) - \dim W^\perp, \\ \dim(W + V^\perp) = \dim W + \dim V^\perp - \dim(W \cap V^\perp), \end{cases}$$

da cui si ricava che:

$$\dim(W^\perp)^\perp = \dim W + \dim V^\perp - \dim(W \cap V^\perp) = \dim(W + V^\perp).$$

Dal momento che vale un'inclusione e l'uguaglianza dimensionale, si conclude che $(W^\perp)^\perp = W + V^\perp$, da cui la tesi. $\square$

Esercizio 3.0.9. Sia $A \in M(n, \mathbb{C})$ anti-hermitiana (i.e. $A = -A^*$). Si dimostri allora che A è normale e che ammette solo autovalori immaginari.

Soluzione. Si mostra facilmente che A è normale. Infatti $AA^* = A(-A) = -A^2 = (-A)A = A^*A$. Sia allora $\lambda \in \mathbb{C}$ un autovalore di A e sia $\underline{v} \neq \underline{0}$, $\underline{v} \in V_\lambda$. Si consideri il prodotto hermitiano standard φ su $\mathbb{C}^n$. Allora vale la seguente identità:

$$\lambda\, \varphi(\underline{v}, \underline{v}) = \varphi(\underline{v}, \lambda \underline{v}) = \varphi(\underline{v}, A\underline{v}) = \varphi(A^*\underline{v}, \underline{v}) =$$
$$\varphi(-A\underline{v}, \underline{v}) = \varphi(-\lambda \underline{v}, \underline{v}) = -\overline{\lambda}\, \varphi(\underline{v}, \underline{v}).$$

Dacché φ è definito positivo, $\varphi(\underline{v}, \underline{v}) \neq 0 \implies \lambda = -\overline{\lambda}$. Allora $\Re(\lambda) = \frac{\lambda + \overline{\lambda}}{2} = 0$, e quindi λ è immaginario, da cui la tesi. $\square$

Esercizio 3.0.10. Sia V uno spazio vettoriale dotato del prodotto φ. Siano U, $W \subseteq V$ due sottospazi di V. Si dimostrino allora le due seguenti identità.

(i) $(U+W)^\perp = U^\perp \cap W^\perp$,

(ii) $(U \cap W)^\perp \supseteq U^\perp + W^\perp$, dove vale l'uguaglianza insiemistica se φ è non degenere.

Soluzione. Sia $\underline{v} \in (U+W)^\perp$ e siano $\underline{u} \in U \subseteq U+W$, $\underline{w} \in W \subseteq U+W$. Allora $\varphi(\underline{v}, \underline{u}) = 0 \implies \underline{v} \in U^\perp$ e $\varphi(\underline{v}, \underline{w}) = 0 \implies \underline{v} \in W^\perp$, da cui si conclude che $(U+W)^\perp \subseteq U^\perp \cap W^\perp$. Sia adesso $\underline{v} \in U^\perp \cap W^\perp$ e $\underline{v}' = \underline{u} + \underline{w} \in U+W$ con $\underline{u} \in V$ e $\underline{w} \in W$. Allora $\varphi(\underline{v}, \underline{v}') = \varphi(\underline{v}, \underline{u}) + \varphi(\underline{v}, \underline{w}) = 0 \implies \underline{v} \in (U+W)^\perp$, da cui si deduca che vale la doppia inclusione, e quindi che $(U+W)^\perp = U^\perp \cap W^\perp$, dimostrando (i).

Sia ora $\underline{v}' = \underline{u}' + \underline{w}' \in U^\perp + W^\perp$ con $\underline{u}' \in U^\perp$ e $\underline{w}' \in W^\perp$. Sia $\underline{v} \in U \cap W$. Allora $\varphi(\underline{v}, \underline{v}') = \varphi(\underline{v}, \underline{u}') + \varphi(\underline{v}, \underline{w}') = 0 \implies \underline{v}' \in (U \cap W)^\perp$, da cui si deduce che $(U \cap W)^\perp \supseteq U^\perp + W^\perp$. Se φ è non degenere, $\dim(U^\perp + W^\perp) = \dim U^\perp + \dim W^\perp - \dim(U^\perp \cap W^\perp) = 2\dim V - \dim U - \dim W - \dim(U+W)^\perp = \dim V - \dim U - \dim W + \dim(U+W) = \dim V - \dim(U+W) = \dim(U+W)^\perp$. Valendo pertanto l'uguaglianza dimensionale, si conclude che in questo caso $(U \cap W)^\perp = U^\perp + W^\perp$, dimostrando (ii).

□