Scheda riassuntiva di Geometria 2

Geometria proiettiva

Spazi e trasformazioni proiettive

Sia $\mathbb{K}$ un campo e sia V uno spazio proiettivo. Sia $\sim$ la seguente relazione di equivalenza su $V \setminus \{\underline{0}\}$ tale per cui

$$\underline{v} \sim \underline{w} \overset{\text{def}}{\iff} \exists\, \lambda \in \mathbb{K}^* \mid \underline{v} = \lambda \underline{w}.$$

Allora si definisce lo **spazio proiettivo** associata a V, denotato con $\mathbb{P}(V)$, come:

$$\mathbb{P}(V) = V \setminus \{\underline{0}\}/\sim.$$

In particolare esiste una bigezione tra gli elementi dello spazio proiettivo e le rette di V (i.e. i sottospazi di V con dimensione 1). Si definisce la *dimensione* di $\mathbb{P}(V)$ come:

$$\dim \mathbb{P}(V) := \dim V - 1.$$

Gli spazi proiettivi di dimensione 1 sono detti *rette proiettive*, mentre quelli di dimensione 2 *piani*. Si dice **spazio proiettivo standard di dimensione** n lo spazio proiettivo associato a $\mathbb{K}^{n+1}$, e viene denotato come $\mathbb{P}^n(\mathbb{K}) := \mathbb{P}(\mathbb{K}^{n+1})$.

Sia W uno spazio vettoriale. Una mappa $f : \mathbb{P}(V) \to \mathbb{P}(W)$ si dice **trasformazione proiettiva** se è tale per cui esiste un'applicazione lineare $\varphi \in \mathcal{L}(V, W)$ che soddisfa la seguente identità:

$$f([\underline{v}]) = [\varphi(\underline{w})],$$

dove con $[\cdot]$ si denota la classe di equivalenza in $\mathbb{P}(V)$. Una trasformazione proiettiva invertibile da $\mathbb{P}(V)$ in $\mathbb{P}(W)$ si dice **isomorfismo proiettivo**. Una trasformazione proiettiva da $\mathbb{P}(V)$ in $\mathbb{P}(V)$ si dice **proiettività**.

- Se f è una trasformazione proiettiva, allora φ è necessariamente iniettiva (altrimenti l'identità non sussisterebbe, dacché $[\underline{0}]$ non esiste – la relazione d'equivalenza $\sim$ è infatti definita su $V \setminus \{\underline{0}\}$).
- Allo stesso tempo, un'applicazione lineare φ iniettiva induce sempre una trasformazione proiettiva f,
- Se f è una trasformazione proiettiva, allora f è in particolare anche iniettiva (infatti $[\varphi(\underline{v})] = [\varphi(\underline{w})] \implies \exists\, \lambda \in \mathbb{K}^* \mid \underline{v} = \lambda \underline{w} \implies \underline{v} \sim \underline{w}$),
- La composizione di due trasformazioni proiettive è ancora una trasformazione proiettiva ed è indotta dalla composizione delle app. lineari associate alle trasformazioni di partenza,
- L'identità Id è una proiettività di $\mathbb{P}(V)$, ed è indotta dall'identità di V.

Poiché allora nelle proiettività di V esiste un'identità, un inverso e vale l'associatività nella composizione, si definisce $\mathbb{P}\mathrm{GL}(V)$ come il gruppo delle proiettività di V rispetto alla composizione.

Sono inoltre equivalenti i seguenti fatti:

(i) f è surgettiva,
(ii) f è bigettiva,
(iii) $\dim \mathbb{P}(V) = \dim \mathbb{P}(W)$,
(iv) f è invertibile e f^{-1} è una trasformazione proiettiva.

In particolare φ^{-1} induce esattamente f^{-1}.

Ad opera di Gabriel Antonio Videtta, https://poisson.phc.dm.unipi.it/~videtta/.
Reperibile su https://notes.hearot.it, nella sezione *Secondo anno → Geometria 2 → Scheda riassuntiva*.