Note del corso di Analisi Matematica 1

Gabriel Antonio Videtta

23 e 24 marzo 2023

Proprietà principali della continuità e dei limiti di funzione

Nota. Nel corso del documento, per un insieme X, qualora non specificato, si intenderà sempre un sottoinsieme generico dell'insieme dei numeri reali esteso $\overline{\mathbb{R}}$. Analogamente per f si intenderà sempre una funzione $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$.

Proposizione. Dati $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$, $\overline{x}$ punto di accumulazione di X tale che $\forall\, (x_n) \subseteq X \setminus \{\overline{x}\} \mid x_n \xrightarrow[n \to \infty]{} \overline{x}$ vale che $f(x_n)$ converge. Allora il limite di $f(x_n)$ è sempre lo stesso, indipendentemente dalla scelta di (x_n).

Dimostrazione. Siano per assurdo $(x_n), (y_n) \subseteq X \setminus \{\overline{x}\}$ due successioni tali che $x_n, y_n \xrightarrow[n \to \infty]{} \overline{x}$ e che $f(x_n) \xrightarrow[n \to \infty]{} L$ e $f(y_n) \xrightarrow[n \to \infty]{} G$ con $L \neq G$. Si costruisce allora la successione $(z_n) \subseteq X \setminus \{\overline{x}\}$ nel seguente modo:

$$z_n = \begin{cases} x_{\frac{n}{2}} & \text{se } n \text{ è pari,} \\ y_{\frac{n-1}{2}} & \text{altrimenti,} \end{cases}$$

ossia unendo le due successioni (x_n) e (y_n) in modo tale che agli indici pari corrispondano gli elementi di x_n e a quelli dispari quelli di y_n.

Si mostra che $z_n \xrightarrow[n \to \infty]{} \overline{x}$. Sia I un intorno di $\overline{x}$. Allora, dal momento che $(x_n), (y_n) \xrightarrow[n \to \infty]{} \overline{x}$, esistono sicuramente due $n_x, n_y \in \mathbb{N}$ tali che $n \geq n_x \implies x_n \in I$ e $n \geq n_y \implies y_n \in I$. Pertanto, detto $n_k = \max\{n_x, n_y\}$, $n \geq n_k \implies x_n, y_n \in I$, ossia che per $n \geq 2n_k$, $z_n \in I$. Si conclude allora che $(z_n) \xrightarrow[n \to \infty]{} \overline{x}$.

Tuttavia $f(z_n)$ non può convergere a nessun limite, dal momento che le due sottosuccessioni $f(x_n)$ e $f(y_n)$ convergono a valori distinti ed il limite deve essere unico. L'esistenza di tale successione contraddice allora l'ipotesi, $\lightning$. $\square$

Proposizione. Data $(x_n) \subseteq \mathbb{R}$, definisco $f : \mathbb{N} \to \overline{\mathbb{R}}$ tale che $f(n) := x_n$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$. Allora $f(n) \xrightarrow[n \to \infty]{} L \iff x_n \xrightarrow[n \to \infty]{} L$.

Dimostrazione. Si dimostrano le due implicazioni separatamente.

$(\implies)$ Sia I un intorno di L. Allora, poiché $f(n) \xrightarrow[n \to \infty]{} L$, esiste un intorno $J = [a, \infty]$ tale che $f(J \cap \mathbb{N} \setminus \{\infty\}) \subseteq I$. Poiché ∞ è un punto di accumulazione di $\mathbb{N}$, $A = J \cap \mathbb{N} \setminus \{\infty\}$ non è mai vuoto. Inoltre, poiché $A \subseteq \mathbb{N}$, A ammette un minimo[1], detto m. Vale in particolare che $f(n) \in I$, $\forall\, n \geq m$, e quindi che $x_n \in I$, $\forall\, n \geq m$, ossia che $x_n \xrightarrow[n \to \infty]{} L$.

$(\impliedby)$ Sia I un intorno di L. Dal momento che $x_n \xrightarrow[n \to \infty]{} L$, $\exists\, n_k \in \mathbb{N} \mid n \geq n_k \implies x_n \in I$. Allora, detto $J = [n_k, \infty]$, vale che $f(J \cap \mathbb{N} \setminus \{\infty\}) \subseteq I$, ossia che $f(n) \xrightarrow[n \to \infty]{} L$. $\square$

Proposizione. Siano $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$, $\overline{x} \in X$ punto di accumulazione di X. Allora sono fatti equivalenti i seguenti:

(i) $f(x) \xrightarrow[x \to \overline{x}]{} f(\overline{x})$,

(ii) f è continua in $\overline{x}$.

Dimostrazione. Sia I un intorno di $f(\overline{x})$. Dal momento che $\overline{x}$ è un punto di accumulazione, si ricava allora da entrambe le ipotesi che esiste un intorno J di $f(\overline{x})$ tale che $f(J \cap X \setminus \{\overline{x}\}) \subseteq I$, e quindi, per definizione, la tesi. $\square$

Osservazione. Se $\overline{x}$ è un punto isolato di X, allora f è continua in $\overline{x}$. Pertanto per rendere la proposizione precedente vera, è necessario ipotizzare che $\overline{x}$ sia un punto di accumulazione (infatti il limite in un punto isolato non esiste per definizione, mentre in tale punto f è continua).

Proposizione. Siano $f : X \to \mathbb{R}$ e $\overline{x}$ punto di accumulazione di X. Siano $L \in \overline{\mathbb{R}}$ e $\tilde{f} : X \cup \{\overline{x}\} \to \overline{\mathbb{R}}$ tale che:

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} L & \text{se } x = \overline{x}, \\ f(x) & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

[1]Non è in realtà necessario che si consideri il minimo di tale insieme, occorre semplicemente che A sia non vuoto.

Allora $f(x) \xrightarrow[x \to \overline{x}]{} L \iff \tilde{f}$ è continua in $\overline{x}$.

Dimostrazione. Si dimostrano le due implicazioni separatamente.

$(\implies)$ Sia I un intorno di L. Si ricava allora dalle ipotesi che esiste sempre un intorno J di $\overline{x}$ tale che $f(\underbrace{J \cap X \setminus \{\overline{x}\}}_{A}) \subseteq I$. Dal momento che $\overline{x} \notin A$, si deduce che $f(J \cap X \setminus \{\overline{x}\}) = \tilde{f}(J \cap X \setminus \{\overline{x}\}) \subseteq I$, ossia che $\tilde{f}$ è continua in $\overline{x}$.

$(\impliedby)$ Sia I un intorno di L. Poiché $\tilde{f}$ è continua in $\overline{x}$, esiste un intorno J di $\overline{x}$ tale che $\tilde{f}(\underbrace{J \cap (X \cup \{\overline{x}\}) \setminus \{\overline{x}\}}_{A}) \subseteq I$. Poiché $\overline{x} \notin A$ e $\overline{x}$ è punto di accumulazione, si deduce che $I \supseteq \tilde{f}(J \cap (X \cup \{\overline{x}\}) \setminus \{\overline{x}\}) = f(J \cap (X \cup \{\overline{x}\}) \setminus \{\overline{x}\}) \supseteq f(J \cap X \setminus \{\overline{x}\})$, e quindi che $f(x) \xrightarrow[x \to \overline{x}]{} L$. $\square$

Osservazione. Tutte le funzioni elementari (e.g. $\sin(x)$, $\cos(x)$, $\exp(x)$, $\ln(x)$, $|x|$, x^a) sono funzioni continue nel loro insieme di definizione.

Proposizione. Siano $f : X \to Y \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ e $g : Y \to \overline{\mathbb{R}}$ e sia $\overline{x} \in X$. Sia f continua in $\overline{x}$ e sia g continua in $f(\overline{x})$. Allora $g \circ f$ è continua in $\overline{x}$.

Dimostrazione. Sia I un intorno di $z = g(f(\overline{x}))$. Allora, poiché g è continua in $f(\overline{x})$, $\exists\, J$ intorno di $f(\overline{x}) \mid g(J \cap Y \setminus \{f(\overline{x})\}) \subseteq I$. Tuttavia, poiché f è continua in $\overline{x}$, $\exists\, K$ intorno di $\overline{x} \mid f(K \cap X \setminus \{\overline{x}\}) \subseteq J$, da cui si conclude che $g(f(K \cap X \setminus \{\overline{x}\})) \subseteq I$, dacché $\forall\, x \in K \cap X \setminus \{\overline{x}\}$, o $f(x) = f(\overline{x})$, e quindi $g(f(x)) = z$ chiaramente appartiene a I, o altrimenti $f(x) \in J \cap Y \setminus \{f(\overline{x})\} \implies g(f(x)) \in g(J \cap Y \setminus \{f(\overline{x})\}) \subseteq I$. $\square$

Teorema. Sia $f : X \to Y \subseteq \overline{\mathbb{R}}$, sia $\overline{x}$ punto di accumulazione di X tale che $f(x) \xrightarrow[x \to \overline{x}]{} \overline{y}$. Se $\overline{y}$ è un punto di accumulazione di Y e $g : Y \to \overline{\mathbb{R}}$ è tale che $\overline{y} \in Y \implies g$ continua in $\overline{y}$ e $g(y) \xrightarrow[y \to \overline{y}]{} \overline{z}$, allora $g(f(x)) \xrightarrow[x \to \overline{x}]{} \overline{z}$.

Dimostrazione. Siano $\tilde{f} : X \cup \{\overline{x}\}$, $\tilde{g} : Y \cup \{\overline{y}\}$ due funzioni costruite nel seguente modo:

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} \overline{y} & \text{se } x = \overline{x}, \\ f(x) & \text{altrimenti,} \end{cases} \qquad \tilde{g}(y) = \begin{cases} \overline{z} & \text{se } y = \overline{y}, \\ g(y) & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Poiché $f(x) \xrightarrow[x \to \overline{x}]{} \overline{y}$ e $\overline{x}$ è un punto di accumulazione di X, per una proposizione precedente, $\tilde{f}$ è continua in $\overline{x}$. Analogamente $\tilde{g}$ è continua in $\overline{y}$.

Dal momento che vale che $\tilde{f}(\overline{x}) = \overline{y}$, per la proposizione precedente $\tilde{g} \circ \tilde{f}$ è continua in $\overline{x}$, e dunque $\lim_{x\to\overline{x}} \tilde{g}(\tilde{f}(x)) = \tilde{g}(\tilde{f}(\overline{x})) = \overline{z}$.

Si consideri adesso la funzione $\widetilde{g \circ f} : X \to \overline{\mathbb{R}}$ definita nel seguente modo:

$$\widetilde{g \circ f}(x) = \begin{cases} \overline{z} & \text{se } x = \overline{x}, \\ g(f(x)) & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Si mostra che $\widetilde{g \circ f} = \tilde{g} \circ \tilde{f}$. Se $x = \overline{x}$, chiaramente $\widetilde{g \circ f}(x) = \overline{z} = \tilde{g}(\tilde{f}(\overline{x}))$. Se $x \neq \overline{x}$, si considera il caso in cui $\tilde{f}(x) = f(x)$ è uguale a $\overline{y}$ ed il caso in cui non vi è uguale.

Se $\tilde{f}(x) \neq \overline{y}$, $\tilde{g}(\tilde{f}(x)) = \tilde{g}(f(x)) \overbrace{=}^{f(x)\neq\overline{y}} g(f(x)) = \widetilde{g \circ f}(x)$. Se invece $\tilde{f}(x) = \overline{y}$, $\overline{y} \in Y$, e quindi g è continua in $\overline{y}$, da cui necessariamente deriva che $g(\overline{y}) = \overline{z}$. Allora $\widetilde{g \circ f}(x) = g(f(x)) = g(\overline{y}) = \overline{z} = \tilde{g}(\tilde{f}(\overline{x}))$.

Si conclude allora che $\widetilde{g \circ f} = \tilde{g} \circ \tilde{f}$, e quindi che $\widetilde{g \circ f}$ è continua in $\overline{x}$. Pertanto, dalla proposizione precedente, $g(f(x)) \xrightarrow[x \to \overline{x}]{} \overline{z}$. $\square$

Esercizio 1. Mostrare che tutte le ipotesi della proposizione precedente sono necessarie, fornendo alcuni controesempi.

Proposizione. Date $f_1, f_2 : X \to \mathbb{R}$ continue in $\overline{x}$. Allora:

(i) $f_1 + f_2$ è continua in $\overline{x}$,

(ii) $f_1 f_2$ è continua in $\overline{x}$.

Dimostrazione. Si dimostrano i due punti separatamente.

(i) Sia $f := f_1 + f_2$. Poiché f_1, f_2 sono continue in $\overline{x}$, $\forall\, \varepsilon > 0$, $\exists\, \delta > 0 \mid |x - \overline{x}| < \delta \implies |f_1(x) - f_1(\overline{x})|, |f_2(x) - f_2(\overline{x})| \leq \varepsilon$ (per ogni $\varepsilon > 0$, si prende $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, ossia il minimo delle semilunghezze degli intorni di $\overline{x}$). Allora $|f(x) - f(\overline{x})| \leq |f_1(x) - f_1(\overline{x})| + |f_2(x) - f_2(\overline{x})| \leq 2\varepsilon$. Si conclude dunque che $\forall\, \varepsilon > 0$, $\exists\, \delta > 0 \mid |f(x) - f(\overline{x})| \leq 2\varepsilon$, e quindi, poiché $2\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} 0$, che f è continua in $\overline{x}$.

(ii) Dal momento che f_1, f_2 sono continue in $\overline{x}$, $\forall\, \varepsilon > 0$, $\exists\, \delta > 0$ tale che $|x - \overline{x}| < \delta \implies |f_1(x) - f_1(\overline{x})| < \varepsilon, |f_2(x) - f_2(\overline{x})| < \varepsilon$ (vale lo stesso ragionamento del punto (i)). Allora $f_1(x) = f_1(\overline{x}) + e_1$ e $f_2(x) = f_2(\overline{x}) + e_2$, con $|e_1|, |e_2| < \varepsilon$. Dunque $f_1(x)f_2(x) = f_1(\overline{x})f_2(\overline{x}) +$

$\underbrace{e_1 f_2(\overline{x}) + e_2 f_1(\overline{x}) + e_1 e_2}_{e}$. In particolare, per la disuguaglianza triangolare, $|e| \leq |e_1 f_2(\overline{x})| + |e_2 f_1(\overline{x})| + |e_1 e_2| \leq \underbrace{\varepsilon\,|f_2(\overline{x})| + \varepsilon\,|f_1(\overline{x})| + \varepsilon^2}_{\varepsilon'}$. Poiché $\varepsilon' \xrightarrow[\varepsilon \to 0^+]{} 0$, si conclude che $|f_1(x)f_2(x) - f_1(\overline{x})f_2(\overline{x})| = |e| \leq \varepsilon' \implies f_1(x)f_2(x)$ continua in $\overline{x}$.

$\square$

Proposizione. Date $f_1, f_2 : X \to \overline{\mathbb{R}}$, $\overline{x}$ punto di accumulazione di X. Se $\lim_{x\to\overline{x}} f_1(x) = L_1 \in \mathbb{R}$ e $\lim_{x\to\overline{x}} f_2(x) = L_2 \in \mathbb{R}$, allora valgono i seguenti risultati:

(i) $f_1(x) + f_2(x) \xrightarrow[x \to \overline{x}]{} L_1 + L_2$,

(ii) $f_1(x)f_2(x) \xrightarrow[x \to \overline{x}]{} L_1 L_2$.

Dimostrazione. Si definiscono preliminarmente le funzioni $\tilde{f}_1, \tilde{f}_2 : X \cup \{\overline{x}\} \to \overline{\mathbb{R}}$ in modo tale che:

$$\tilde{f}_1(x) = \begin{cases} L_1 & \text{se } x = \overline{x}, \\ f_1(x) & \text{altrimenti,} \end{cases} \qquad \tilde{f}_2(x) = \begin{cases} L_2 & \text{se } x = \overline{x}, \\ f_2(x) & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Si dimostrano allora i due risultati separatamente.

(i) Si definisce $\widetilde{f_1 + f_2} : X \cup \{\overline{x}\} \to \overline{\mathbb{R}}$ nel seguente modo:

$$\widetilde{f_1 + f_2}(x) = \begin{cases} L_1 + L_2 & \text{se } x = \overline{x}, \\ f_1(x) + f_2(x) & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

La somma $L_1 + L_2$ è ben definita dacché sia L_1 che L_2 sono elementi di $\mathbb{R}$. Poiché da una proposizione precedente $\tilde{f}_1$ e $\tilde{f}_2$ sono continue in $\overline{x}$, $\tilde{f}_1 + \tilde{f}_2$ è continua anch'essa in $\overline{x}$. È sufficiente allora dimostrare che $\widetilde{f_1 + f_2} = \tilde{f}_1 + \tilde{f}_2$. Se $x \neq \overline{x}$, $\widetilde{f_1 + f_2}(x) = f_1(x) + f_2(x) = \tilde{f}_1(x) + \tilde{f}_2(x) = (\tilde{f}_1 + \tilde{f}_2)(x)$. Se invece $x = \overline{x}$, $\widetilde{f_1 + f_2}(x) = L_1 + L_2 = \tilde{f}_1(x) + \tilde{f}_2(x) = (\tilde{f}_1 + \tilde{f}_2)(x)$. Quindi $\widetilde{f_1 + f_2} = \tilde{f}_1 + \tilde{f}_2$, e si conclude che $\widetilde{f_1 + f_2}$ è dunque continua in $\overline{x}$, ossia che $(f_1 + f_2)(x) = f_1(x) + f_2(x) \xrightarrow[x \to \overline{x}]{} L_1 + L_2$.

(ii) Si definisce, analogamente a prima, $\widetilde{f_1 f_2} : X \cup \{\overline{x}\} \to \overline{\mathbb{R}}$ nel seguente modo:

$$\widetilde{f_1 f_2}(x) = \begin{cases} L_1 L_2 & \text{se } x = \overline{x}, \\ f_1(x) f_2(x) & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Il prodotto $L_1 L_2$ è ben definito dacché sia L_1 che L_2 sono elementi di $\mathbb{R}$. Poiché da una proposizione precedente $\tilde{f}_1$ e $\tilde{f}_2$ sono continue in $\overline{x}$, $\tilde{f}_1 \tilde{f}_2$ è continua anch'essa in $\overline{x}$. È sufficiente allora dimostrare che $\widetilde{f_1 f_2} = \tilde{f}_1 \tilde{f}_2$. Se $x \neq \overline{x}$, $\widetilde{f_1 f_2}(x) = f_1(x) f_2(x) = \tilde{f}_1(x) \tilde{f}_2(x) = (\tilde{f}_1 \tilde{f}_2)(x)$. Se invece $x = \overline{x}$, $\widetilde{f_1 f_2}(x) = L_1 L_2 = \tilde{f}_1(x) \tilde{f}_2(x) = (\tilde{f}_1 \tilde{f}_2)(x)$. Quindi $\widetilde{f_1 f_2} = \tilde{f}_1 \tilde{f}_2$, e si conclude che $\widetilde{f_1 f_2}$ è dunque continua in $\overline{x}$, ossia che $(f_1 f_2)(x) = f_1(x) f_2(x) \xrightarrow[x \to \overline{x}]{} L_1 L_2$.

$\square$

Definizione. (intorno destro e sinistro) Se $\overline{x} \in \mathbb{R}$, si dicono **intorni destri** gli intervalli della forma $[\overline{x}, \overline{x} + \varepsilon]$ con $\varepsilon > 0$. Analogamente, gli **intorni sinistri** sono gli intervalli della forma $[\overline{x} - \varepsilon, \overline{x}]$.

Definizione. (punto di accumulazione destro e sinistro) Sia $\overline{x} \in X$. Si dice che $\overline{x}$ è un **punto di accumulazione destro** di X se $\forall\, I$ intorno destro di $\overline{x}$, $I \cap X \setminus \{\overline{x}\} \neq \varnothing$. Analogamente si dice **punto di accumulazione sinistro** di X se è tale per gli intorni sinistri.

Definizione. (limite destro e sinistro) Sia $\overline{x}$ un punto di accumulazione destro di X. Allora $\lim_{x \to \overline{x}^+} f(x) = L \overset{\text{def}}{\iff} \forall\, I$ intorno di L, $\exists\, J$ intorno destro di $\overline{x}$ tale che $f(J \cap X \setminus \{\overline{x}\}) \subseteq I$. Analogamente si definisce il limite sinistro.

Definizione. (continuità destra e sinistra) Sia $\overline{x} \in X$. Allora f è continua a destra in $\overline{x}$ se e solo se $\forall\, I$ intorno di $f(\overline{x})$, $\exists\, J$ intorno destro di $\overline{x}$ tale che $f(J \cap X \setminus \{\overline{x}\}) \subseteq I$. Analogamente si definisce la continuità a sinistra di f.

Osservazione. Vi sono chiaramente alcuni collegamenti tra la continuità destra e sinistra e la continuità classica, così come ve ne sono tra il limite destro e sinistro ed il limite classico.

▶ $\overline{x}$ punto di accumulazione destro e sinistro di $X \implies \overline{x}$ punto di accumulazione di X (non è però per forza vero il contrario, è sufficiente considerare 0 in $(0, \infty)$),

▶ f è continua in $\overline{x} \iff f$ è continua sinistra e destra in $\overline{x}$,
▶ se $\overline{x}$ è un punto di accumulazione destro e sinistro, $\lim_{x\to\overline{x}} f(x) = L \iff \lim_{x\to\overline{x}^+} f(x) = L$ e $\lim_{x\to\overline{x}^-} f(x) = L$,
▶ se $\overline{x}$ è un punto di accumulazione solo destro, $\lim_{x\to\overline{x}} f(x) = L \iff \lim_{x\to\overline{x}^+} f(x) = L$,
▶ se $\overline{x}$ è un punto di accumulazione solo sinistro, $\lim_{x\to\overline{x}} f(x) = L \iff \lim_{x\to\overline{x}^-} f(x) = L$.

Proposizione. Sia $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ monotona e sia $\overline{x}$ un punto di accumulazione destro di X. Allora esiste $\lim_{x\to\overline{x}^+} f(x)$. Analogamente esiste da sinistra se $\overline{x}$ è un punto di accumulazione sinistro di X.

Dimostrazione. Senza perdità di generalità, si assuma f crescente (per il caso decrescente è sufficiente considerare $g(x) = -f(x)$) Si consideri l'insieme:

$$E = \{f(x) \mid x > \overline{x} \text{ e } x \in X\}.$$

Si consideri adesso $L = \inf E$ e un suo intorno I. Se non esistesse un intorno destro J di $\overline{x}$ tale che $f(J \cap X \setminus \{\overline{x}\}) \subseteq I$, allora $\sup I$ sarebbe un minorante di E maggiore di L, $\lightning$. Quindi tale J esiste, da cui la tesi. Analogamente per il caso sinistro. $\square$

Esempio. (funzione discontinua in ogni punto di $\mathbb{R}$) Si consideri la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita nel seguente modo:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \mathbb{Q}, \\ 0 & \text{altrimenti}, \end{cases}$$

ossia la funzione indicatrice dell'insieme $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$.

Esercizio 2. Mostrare che l'insieme dei punti di discontinuità di una funzione $f : X \to \mathbb{R}$ monotona è al più numerabile.

Teorema. (della permanenza del segno) Data $(x_n) \subseteq \mathbb{R}$ tale che $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} L > 0$, allora (x_n) è strettamente positiva definitivamente. Analogamente, se $L < 0$, (x_n) è negativa definitivamente.

Dimostrazione. Senza perdita di generalità si pone $L > 0$. Allora esiste sicuramente un intorno I di L tale che ogni suo elemento è positivo (e.g. $I = [\frac{L}{2}, \frac{3L}{2}]$, se $L \in \mathbb{R}$, altrimenti $[a, \infty]$ con $a > 0$ se $L = +\infty$). Dal momento che $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} L$, $\exists\, n_k \mid n \geq n_k \implies x_n \in I$, ossia, in particolare, $n \geq n_k \implies x_n > 0$, da cui la tesi. $\square$

Proposizione. Sia $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ e sia $\overline{x}$ un punto di accumulazione di X. Se $\lim_{x \to \overline{x}} f(x) = L > 0$, allora $\exists\, J$ intorno non vuoto di $\overline{x}$ tale che $f(x) > 0$ $\forall\, x \in J \cap X \setminus \{\overline{x}\}$.

Dimostrazione. Analogamente a come visto per il teorema del segno, si pone $L > 0$. Allora esiste sicuramente un intorno I di L tale che ogni suo elemento è positivo. Poiché $\lim_{x \to \overline{x}} f(x) = L > 0$, deve esistere un intorno J di $\overline{x}$ tale che $f(J \cap X \setminus \{\overline{x}\}) \subseteq I$. In particolare, $J \cap X \setminus \{\overline{x}\}$ non è mai vuoto, dal momento che $\overline{x}$ è un punto di accumulazione di X, e vale che $f(x) > 0$ $\forall\, x \in J \cap X \setminus \{\overline{x}\}$ (dal momento che $f(x) \in I$, che ha tutti elementi positivi), da cui la tesi. $\square$

Teorema. (degli zeri) Dati $I = [a, b]$ e $f : I \to \overline{\mathbb{R}}$ continua tale che $f(a)f(b) < 0$ (i.e. sono discordi), allora $\exists\, c \in (a, b) \mid f(c) = 0$.

Dimostrazione. Senza alcuna perdita di generalità si pone $f(a) < 0 < f(b)$ (il caso $f(a) > 0 > f(b)$ è infine dimostrato considerando $g(x) = -f(x)$). Si definisce allora l'insieme E in modo tale che:

$$E = \{a \in I \mid f(a) < 0\}.$$

Si osserva che $E \neq \varnothing$, dacché $a \in E$. Per la completezza dei numeri reali, E ammette un estremo superiore $\overline{x} := \sup E$. Sia $(x_n) \subseteq E$ una successione tale che $x_n \xrightarrow[n \to \infty]{} \overline{x}$: poiché f è continua in $\overline{x}$, $\lim_{x \to \overline{x}} f(x) = f(\overline{x}) \implies f(x_n) \xrightarrow[n \to \infty]{} f(\overline{x})$. Allora, poiché $f(x_n) < 0$ $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $f(\overline{x}) \leq 0$ (se così non fosse $f(x_n)$ dovrebbe essere definitivamente positiva per il teorema della permanenza del segno, ma questo è assurdo dacché $x_n \in E$ $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $\lightning$).

Sia ora $(y_n) \in I$ una successione tale che $y_n \xrightarrow[n \to \infty]{} \overline{x}$ e che $y_n > \overline{x}$ $\forall\, n \in \mathbb{N}$ (questo è sempre possibile dal momento che $\overline{x} \neq b \impliedby f(\overline{x}) \leq 0$). Allora, poiché $y_n > \overline{x} = \sup E$, y_n non appartiene ad E, e quindi deve valere che $f(y_n) > 0$. Si conclude allora, per il teorema della permanenza del segno, che $f(\overline{x}) \geq 0$, e quindi che $f(\overline{x}) = 0$, da cui la tesi. $\square$

Corollario. (dei valori intermedi) Dati $I = (a, b)$ e $f : I \to \overline{\mathbb{R}}$ continua, allora $y_1,\ y_2 \in f(I) \implies [y_1, y_2] \subseteq f(I)$ (ossia f assume tutti i valori compresi tra y_1 e y_2).

Dimostrazione. Supponiamo $y_1 < y_2$: poiché y_1, y_2 appartengono già a $f(I)$, è sufficiente mostrare che an che ogni $y \in (y_1, y_2)$ appartiene a $f(I)$. Dal momento che $y_1,\ y_2 \in f(I)$, $\exists\, x_1,\ x_2 \in I \mid f(x_1) = y_1$ e $f(x_2) = y_2$.

Si consideri allora $g : I \to \overline{\mathbb{R}}$ tale che $g(x) = f(x) - y$. Allora $g(x_1) = y_1 - y < 0$, mentre $g(x_2) = y_2 - y > 0$. Pertanto, per il teorema degli zeri, $\exists\, \overline{x} \in (x_1, x_2) \mid g(\overline{x}) = 0 \implies f(\overline{x}) = y$. Si conclude allora che anche $y \in f(I)$, da cui la tesi. $\square$