Note del corso di Geometria 1

Gabriel Antonio Videtta

17 e 19 aprile 2023

Introduzione ai prodotti hermitiani

Nota. Nel corso del documento, per V si intenderà uno spazio vettoriale di dimensione finita n e per φ un suo prodotto, hermitiano o scalare dipendentemente dal contesto.

Definizione. (prodotto hermitiano) Sia $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Una mappa $\varphi : V \times V \to \mathbb{C}$ si dice **prodotto hermitiano** se:

(i) φ è $\mathbb{C}$-lineare nel secondo argomento, ossia se $\varphi(\underline{v}, \underline{u} + \underline{w}) = \varphi(\underline{v}, \underline{u}) + \varphi(\underline{v}, \underline{w})$ e $\varphi(\underline{v}, a\underline{w}) = a\,\varphi(\underline{v}, \underline{w})$,

(ii) $\varphi(\underline{u}, \underline{w}) = \overline{\varphi(\underline{w}, \underline{u})}$.

Definizione. (prodotto hermitiano canonico in $\mathbb{C}^n$) Si definisce **prodotto hermitiano canonico** di $\mathbb{C}^n$ il prodotto $\varphi : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ tale per cui, detti $\underline{v} = (z_1 \cdots z_n)^\top$ e $\underline{w} = (w_1 \cdots w_n)^\top$, $\varphi(\underline{v}, \underline{w}) = \sum_{i=1}^n \overline{z_i} w_i$.

Osservazione.
► $\varphi(\underline{u} + \underline{w}, \underline{v}) = \overline{\varphi(\underline{v}, \underline{u} + \underline{w})} = \overline{\varphi(\underline{v}, \underline{u}) + \varphi(\underline{v}, \underline{w})} = \overline{\varphi(\underline{v}, \underline{u})} + \overline{\varphi(\underline{v}, \underline{u})} = \varphi(\underline{w}, \underline{v}) + \varphi(\underline{u}, \underline{v})$, ossia φ è additiva anche nel primo argomento.
► $\varphi(a\underline{v}, \underline{w}) = \overline{\varphi(\underline{w}, a\underline{v})} = \overline{a}\overline{\varphi(\underline{w}, \underline{v})} = \overline{a}\,\varphi(\underline{v}, \underline{w})$.
► $\varphi(\underline{v}, \underline{v}) = \overline{\varphi(\underline{v}, \underline{v})}$, e quindi $\varphi(\underline{v}, \underline{v}) \in \mathbb{R}$.
► Sia $\underline{v} = \sum_{i=1}^n x_i \underline{v_i}$ e sia $\underline{w} = \sum_{i=1}^n y_i \underline{v_i}$, allora $\varphi(\underline{v}, \underline{w}) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \overline{x_i} y_i \varphi(\underline{v_i}, \underline{v_j})$.
► $\varphi(\underline{v}, \underline{w}) = 0 \iff \varphi(\underline{w}, \underline{v}) = 0$.

Proposizione. Data la forma quadratica $q : V \to \mathbb{R}$ del prodotto hermitiano φ tale che $q(\underline{v}) = \varphi(\underline{v}, \underline{v}) \in \mathbb{R}$, tale forma quadratica individua univocamente il prodotto hermitiano φ.

Dimostrazione. Innanzitutto si osserva che:

$$\varphi(\underline{v},\underline{w}) = \frac{\varphi(\underline{v},\underline{w}) + \overline{\varphi(\underline{v},\underline{w})}}{2} + \frac{\varphi(\underline{v},\underline{w}).\overline{\varphi(\underline{v},\underline{w})}}{2}.$$

Si considerano allora le due identità:

$$q(\underline{v}+\underline{w}) - q(\underline{v}) - q(\underline{w}) = \varphi(\underline{v},\underline{w}) + \overline{\varphi(\underline{w},\underline{v})} = 2\,\Re(\varphi(\underline{v},\underline{w})),$$

$$q(i\underline{v}+\underline{w}) - q(\underline{v}) - q(\underline{w}) = -i(\varphi(\underline{v},\underline{w}) - \overline{\varphi(\underline{v},\underline{w})}) = 2\,\Im(\varphi(\underline{v},\underline{w})),$$

da cui si conclude che il prodotto φ è univocamente determinato dalla sua forma quadratica. □

Definizione. Si definisce **matrice aggiunta** di $A \in M(n, \mathbb{K})$ la matrice coniugata della trasposta di A, ossia:

$$A^* = \overline{A^\top} = \overline{A}^\top.$$

Definizione. (matrice associata del prodotto hermitiano) Analogamente al caso del prodotto scalare, data una base $\mathcal{B} = \{\underline{v_1}, \ldots, \underline{v_n}\}$ si definisce come **matrice associata del prodotto hermitiano** φ la matrice $M_\mathcal{B}(\varphi) = (\varphi(\underline{v_i}, \underline{v_j}))_{i,j=1—n}$.

Osservazione. Si osserva che, analogamente al caso del prodotto scalare, vale la seguente identità:

$$\varphi(\underline{v},\underline{w}) = [\underline{v}]_\mathcal{B}^* M_\mathcal{B}(\varphi)[\underline{w}]_\mathcal{B}.$$

Proposizione. (formula del cambiamento di base per i prodotto hermitiani) Siano $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$ due basi di V. Allora vale la seguente identità:

$$M_{\mathcal{B}'} = M_\mathcal{B}^{\mathcal{B}'}(Id_V)^* M_\mathcal{B}(\varphi) M_\mathcal{B}^{\mathcal{B}'}(Id_V).$$

Dimostrazione. Siano $\mathcal{B} = \{\underline{v_1}, \ldots, \underline{v_n}\}$ e $\mathcal{B}' = \{\underline{w_1}, \ldots, \underline{w_n}\}$. Allora $\varphi(\underline{w_i}, \underline{w_j}) = [\underline{w_i}]_\mathcal{B}^* M_\mathcal{B}(\varphi)[\underline{w_j}]_\mathcal{B} = \left(M_\mathcal{B}^{\mathcal{B}'}(Id_V)^i\right)^* M_\mathcal{B}(\varphi) M_\mathcal{B}^{\mathcal{B}'}(Id_V)^j = \left(M_\mathcal{B}^{\mathcal{B}'}(Id_V)\right)_i^* M_\mathcal{B}(\varphi) M_\mathcal{B}^{\mathcal{B}'}(Id_V)^j$, da cui si ricava l'identità desiderata. □

Definizione. (radicale di un prodotto hermitiano) Analogamente al caso del prodotto scalare, si definisce il **radicale** del prodotto φ come il seguente sottospazio:

$$V^\perp = \{\underline{v} \in V \mid \varphi(\underline{v},\underline{w}) = 0 \;\forall\, \underline{w} \in V\}.$$

Proposizione. Sia $\mathcal{B}$ una base di V e φ un prodotto hermitiano. Allora $V^\perp = [\cdot]_{\mathcal{B}}^{-1}(\operatorname{Ker} M_{\mathcal{B}}(\varphi))$[1].

Dimostrazione. Sia $\mathcal{B} = \{\underline{v_1}, \ldots, \underline{v_n}\}$ e sia $\underline{v} \in V^\perp$. Siano a_1, ..., $a_n \in \mathbb{K}$ tali che $\underline{v} = a_1\underline{v_1} + \ldots + a_n\underline{v_n}$. Allora, poiché $\underline{v} \in V$, $0 = \varphi(\underline{v_i}, \underline{v}) == a_1\varphi(\underline{v_i}, \underline{v_1}) + \ldots + a_n\varphi(\underline{v_i}, \underline{v_n}) = M_i[\underline{v}]_{\mathcal{B}}$, da cui si ricava che $[\underline{v}]_{\mathcal{B}} \in \operatorname{Ker} M_{\mathcal{B}}(\varphi)$, e quindi che $V^\perp \subseteq [\cdot]_{\mathcal{B}}^{-1}(\operatorname{Ker} M_{\mathcal{B}}(\varphi))$.

Sia ora $\underline{v} \in V$ tale che $[\underline{v}]_{\mathcal{B}} \in \operatorname{Ker} M_{\mathcal{B}}(\varphi)$. Allora, per ogni $\underline{w} \in V$, $\varphi(\underline{w}, \underline{v}) = [\underline{w}]_{\mathcal{B}}^* M_{\mathcal{B}}(\varphi)[\underline{v}]_{\mathcal{B}} = [\underline{w}]_{\mathcal{B}}^* 0 = 0$, da cui si conclude che $\underline{v} \in V^\perp$, e quindi che $V^\perp \supseteq [\cdot]_{\mathcal{B}}^{-1}(\operatorname{Ker} M_{\mathcal{B}}(\varphi))$, da cui $V^\perp = [\cdot]_{\mathcal{B}}^{-1}(\operatorname{Ker} M_{\mathcal{B}}(\varphi))$, ossia la tesi. □

Osservazione. Come conseguenza della proposizione appena dimostrata, valgono le principali proprietà già viste per il prodotto scalare.

- $\det(M_{\mathcal{B}}(\varphi)) = 0 \iff V^\perp \neq \{\underline{0}\} \iff \varphi$ è degenere.

Proposizione. Se $V = \mathbb{R}^n$ con prodotto canonico $\varphi(\underline{x}, \underline{y}) = \underline{x}^\top \underline{y}$. Sono allora equivalenti i seguenti fatti:

(i) $A \in O_n$,

(ii) $f_A : V \to V$ con $f_A(\underline{x}) = A\underline{x}$,

(iii) Le colonne (e le righe) di A formano una base ortonormale di V.

Dimostrazione. (1 =¿ 2) ovvio (2 =¿ 3) f_A manda basi ortonormali in basi ortonormali, e quindi così sono ortonormali le colonne di A. Analogamente per le righe considerando $A^\top A = I$. (3 =¿ 1) $A^\top A = I$. □

[1] Stavolta non è sufficiente considerare la mappa $f : V \to V^*$ tale che $f(\underline{v}) = [\underline{w} \mapsto \varphi(\underline{v}, \underline{w})]$, dal momento che f non è lineare, bensì antilineare, ossia $f(a\underline{v}) = \overline{a} f(\underline{v})$.