Definizione 1. Dato un numero naturale rappresentato come $a_n 10^n + a_{n-1} 10^{n-1} + \ldots + a_1 10 + a_0$, questo si dice **cateriniano** se:

$$\frac{\sum_{i=0}^{n}\sum_{k=0}^{n}|a_i - a_{n-k}|}{2} - n - 1 = a_n \tag{1}$$

O, in modo equivalente:

$$|a_n - a_{n-1}| + \ldots + |a_n - a_1| + |a_n - a_0| + \ldots + |a_{n-1} - a_1| + |a_{n-1} - a_0| + \ldots + |a_1 - a_0| - n - 1 = a_n \tag{2}$$

Definizione 2. Un numero si dice **cateriniano** se, prese le cifre singolarmente, la loro differenza con ognuna delle altre cifre poste dopo di questa, resa opportunamente positiva, diminuita del numero di cifre più uno, è pari alla prima cifra.

Teorema 1. Cambiando in un numero cateriniano l'ordine delle cifre esclusa la prima, il numero ottenuto è ancora cateriniano.

Dimostrazione. Poiché, per definizione, la differenza delle cifre, tralasciando l'ordine e diminuita del numero di cifre più uno, deve essere, prese queste singolarmente, pari alla prima cifra, allora anche nel secondo dei due numeri questa uguaglianza deve persistere.

Tuttavia, tutto ciò è banale perché si tratta di un semplice cambio di indici che non influenza in alcun modo la differenza delle cifre tra loro. Inoltre, l'espressione (1) rimane equivalente perché a_n non ha subito cambiamenti per ipotesi. Dunque, anche il secondo numero è cateriniano.

■

Teorema 2. Facendo succedere a un numero cateriniano una qualsiasi cifra k, il numero ottenuto è cateriniano se:

$$|a_n - k| + |a_{n-1} - k| + \ldots + |a_1 - k| + |a_0 - k| = 1 \tag{3}$$

Dimostrazione. Per ipotesi sappiamo che vale l'espressione (2). Possiamo rappresentare il secondo dei due numeri come:

$$a_n 10^{n+1} + a_{n-1} 10^n + \ldots + a_1 10^2 + a_0 10 + k$$

Per essere cateriniano, deve valere l'espressione (2):

$$|a_n - a_{n-1}| + \ldots + |a_n - k| + \ldots + |a_{n-1} - a_0| + |a_{n-1} - k| + \ldots + |a_1 - a_0| + |a_1 - k| + |a_0 - k| - n - 2 = a_n$$

Ricordandoci che anche per il primo dei due numeri vale l'espressione (2), possiamo semplificare l'ultima espressione in:

$$|a_n - k| + |a_{n-1} - k| + \ldots + |a_1 - k| + |a_0 - k| = 1$$

E questo era ciò che volevamo dimostrare.

■

Corollario 2.1. Facendo succedere a un numero cateriniano uno zero, il numero ottenuto non è cateriniano.

Dimostrazione. Secondo il **Teorema 2**, per far sì che il secondo numero sia cateriniano, deve valere l'espressione (3), ove $k = 0$.

Ricordando che le cifre sono sempre positive, ci si riconduce alla seguente espressione:

$$a_n + a_{n-1} + \ldots + a_1 + a_0 = 1 \tag{4}$$

Poiché la somma delle cifre deve essere 1, una di queste deve essere 1 e le altre devono essere 0. Ci si riconduce a studiare il caso di un numero che ha come prima cifra 1, questo perché, supponendo l'1 non sia la prima cifra, ci sarebbero degli zeri insignificanti prima.

Quest'ultimo numero si può rappresentare come:

$$1\underbrace{000\cdots 0}_{n \text{ volte}}$$

Dunque, l'espressione (2) si riconduce a $n - n - 1 = -1 = 1$ (questo perché le uniche differenze significanti sono quelle in cui compare 1, altrimenti sarebbero differenze nulle), tuttavia questa espressione risulta impossibile, quindi il numero ottenuto non è cateriniano.

■

Corollario 2.1.1. Facendo succedere a un numero cateriniano una quantità indefinita e positiva di zeri, il numero ottenuto non è cateriniano.

Dimostrazione. Possiamo riscrivere il secondo numero come:

$$a_n 10^{j+n} + a_{n-1}10^{j+n-1} + \ldots + a_1 10^{j+1} + a_0 10^j + \underbrace{0 + 0 + 0 + \ldots + 0}_{j \text{ volte}}$$

Per essere cateriniano, deve valere l'espressione (2), ricordando che per ogni cifra di un numero con una quantità indefinita zeri posti alla fine, la differenza tra questo e tutti gli zeri presi singolarmente è la cifra moltiplicata per quanti sono gli zeri:

$$|a_n - a_{n-1}| + \ldots + |a_n - a_0| + \ldots + |a_1 - a_0| + ja_n + ja_{n-1} + \ldots + ja_1 + ja_0 - n - j - 1 = a_n$$

Ricordandoci che anche per il primo dei due numeri vale l'espressione (2), possiamo semplificare l'ultima espressione in:

$$ja_n + ja_{n-1} + \ldots + ja_1 + ja_0 = j$$

Questa si riconduce all'espressione (4), che, come già dimostrato, non ammette soluzioni. Dunque, il secondo numero non può essere cateriniano.

■