

Note del corso di Geometria 1

Gabriel Antonio Videtta

17 aprile 2023

Prodotti hermitiani

Nota. Nel corso del documento, per V si intenderà uno spazio vettoriale di dimensione finita n e per φ un suo prodotto, hermitiano o scalare dipendentemente dal contesto.

Definizione. (prodotto hermitiano) Sia $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Una mappa $\varphi : V \times V \rightarrow \mathbb{C}$ si dice **prodotto hermitiano** se:

- (i) φ è \mathbb{C} -lineare nel secondo argomento, ossia se $\varphi(\underline{v}, \underline{u} + \underline{w}) = \varphi(\underline{v}, \underline{u}) + \varphi(\underline{v}, \underline{w})$ e $\varphi(\underline{v}, a\underline{w}) = a\varphi(\underline{v}, \underline{w})$,
- (ii) $\varphi(\underline{u}, \underline{w}) = \overline{\varphi(\underline{w}, \underline{u})}$.

Definizione. (prodotto hermitiano canonico in \mathbb{C}^n) Si definisce **prodotto hermitiano canonico** di \mathbb{C}^n il prodotto $\varphi : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$ tale per cui, detti $\underline{v} = (z_1 \cdots z_n)^\top$ e $\underline{w} = (w_1 \cdots w_n)^\top$, $\varphi(\underline{v}, \underline{w}) = \sum_{i=1}^n \overline{z_i} w_i$.

Osservazione.

- ▶ $\varphi(\underline{u} + \underline{w}, \underline{v}) = \overline{\varphi(\underline{v}, \underline{u} + \underline{w})} = \overline{\varphi(\underline{v}, \underline{u}) + \varphi(\underline{v}, \underline{w})} = \overline{\varphi(\underline{v}, \underline{u})} + \overline{\varphi(\underline{v}, \underline{w})} = \varphi(\underline{w}, \underline{v}) + \varphi(\underline{u}, \underline{v})$, ossia φ è additiva anche nel primo argomento.
- ▶ $\varphi(a\underline{v}, \underline{w}) = \overline{\varphi(\underline{w}, a\underline{v})} = \overline{a\varphi(\underline{w}, \underline{v})} = \overline{a}\varphi(\underline{v}, \underline{w})$.
- ▶ $\varphi(\underline{v}, \underline{v}) = \overline{\varphi(\underline{v}, \underline{v})}$, e quindi $\varphi(\underline{v}, \underline{v}) \in \mathbb{R}$.
- ▶ Sia $\underline{v} = \sum_{i=1}^n x_i \underline{v}_i$ e sia $\underline{w} = \sum_{i=1}^n y_i \underline{v}_i$, allora $\varphi(\underline{v}, \underline{w}) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \overline{x_i} y_j \varphi(\underline{v}_i, \underline{v}_j)$.
- ▶ $\varphi(\underline{v}, \underline{w}) = 0 \iff \overline{\varphi(\underline{w}, \underline{v})} = 0$.

Proposizione. Data la forma quadratica $q : V \rightarrow \mathbb{R}$ del prodotto hermitiano φ tale che $q(\underline{v}) = \varphi(\underline{v}, \underline{v}) \in \mathbb{R}$, tale forma quadratica individua univocamente il prodotto hermitiano φ .

Dimostrazione. Innanzitutto si osserva che:

$$\varphi(\underline{v}, \underline{w}) = \frac{\varphi(\underline{v}, \underline{w}) + \overline{\varphi(\underline{v}, \underline{w})}}{2} + \frac{\varphi(\underline{v}, \underline{w}) \cdot \overline{\varphi(\underline{v}, \underline{w})}}{2}.$$

Si considerano allora le due identità:

$$q(\underline{v} + \underline{w}) - q(\underline{v}) - q(\underline{w}) = \varphi(\underline{v}, \underline{w}) + \overline{\varphi(\underline{w}, \underline{v})} = 2 \Re(\varphi(\underline{v}, \underline{w})),$$

$$q(i\underline{v} + \underline{w}) - q(\underline{v}) - q(\underline{w}) = -i(\varphi(\underline{v}, \underline{w}) - \overline{\varphi(\underline{v}, \underline{w})}) = 2 \Im(\varphi(\underline{v}, \underline{w})),$$

da cui si conclude che il prodotto φ è univocamente determinato dalla sua forma quadratica. \square

Definizione. Si definisce **matrice aggiunta** di $A \in M(n, \mathbb{K})$ la matrice coniugata della trasposta di A , ossia:

$$A^* = \overline{A^T} = \overline{A}^T.$$

Definizione. (matrice associata del prodotto hermitiano) Analogamente al caso del prodotto scalare, data una base $\mathcal{B} = \{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\}$ si definisce come **matrice associata del prodotto hermitiano** φ la matrice $M_{\mathcal{B}}(\varphi) = (\varphi(\underline{v}_i, \underline{v}_j))_{i,j=1-n}$.

Osservazione. Si osserva che, analogamente al caso del prodotto scalare, vale la seguente identità:

$$\varphi(\underline{v}, \underline{w}) = [\underline{v}]_{\mathcal{B}}^* M_{\mathcal{B}}(\varphi) [\underline{w}]_{\mathcal{B}}.$$

Proposizione. (formula del cambiamento di base per il prodotto hermitiano) Siano $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ due basi di V . Allora vale la seguente identità:

$$M_{\mathcal{B}'} = M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}'}(Id_V)^* M_{\mathcal{B}}(\varphi) M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}(Id_V).$$

Dimostrazione. Siano $\mathcal{B} = \{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\}$ e $\mathcal{B}' = \{\underline{w}_1, \dots, \underline{w}_n\}$. Allora $\varphi(\underline{w}_i, \underline{w}_j) = [\underline{w}_i]_{\mathcal{B}'}^* M_{\mathcal{B}}(\varphi) [\underline{w}_j]_{\mathcal{B}'} = \left(M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}'}(Id_V)^i\right)^* M_{\mathcal{B}}(\varphi) M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}(Id_V)^j = \left(M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}(Id_V)\right)_i^* M_{\mathcal{B}}(\varphi) M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}'}(Id_V)^j$, da cui si ricava l'identità desiderata. \square

Definizione. (radicale di un prodotto hermitiano) Analogamente al caso del prodotto scalare, si definisce il **radicale** del prodotto φ come il seguente sottospazio:

$$V^\perp = \{\underline{v} \in V \mid \varphi(\underline{v}, \underline{w}) = 0 \forall \underline{w} \in V\}.$$

Proposizione. Sia \mathcal{B} una base di V e φ un prodotto hermitiano. Allora $V^\perp = [\cdot]_{\mathcal{B}}^{-1}(\text{Ker } M_{\mathcal{B}}(\varphi))^1$.

Dimostrazione. Sia $\mathcal{B} = \{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\}$ e sia $\underline{v} \in V^\perp$. Siano $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{K}$ tali che $\underline{v} = a_1 \underline{v}_1 + \dots + a_n \underline{v}_n$. Allora, poiché $\underline{v} \in V$, $0 = \varphi(\underline{v}_i, \underline{v}) = a_1 \varphi(\underline{v}_i, \underline{v}_1) + \dots + a_n \varphi(\underline{v}_i, \underline{v}_n) = M_i[\underline{v}]_{\mathcal{B}}$, da cui si ricava che $[\underline{v}]_{\mathcal{B}} \in \text{Ker } M_{\mathcal{B}}(\varphi)$, e quindi che $V^\perp \subseteq [\cdot]_{\mathcal{B}}^{-1}(\text{Ker } M_{\mathcal{B}}(\varphi))$.

Sia ora $\underline{v} \in V$ tale che $[\underline{v}]_{\mathcal{B}} \in \text{Ker } M_{\mathcal{B}}(\varphi)$. Allora, per ogni $\underline{w} \in V$, $\varphi(\underline{w}, \underline{v}) = [\underline{w}]_{\mathcal{B}}^* M_{\mathcal{B}}(\varphi) [\underline{v}]_{\mathcal{B}} = [\underline{w}]_{\mathcal{B}}^* 0 = 0$, da cui si conclude che $\underline{v} \in V^\perp$, e quindi che $V^\perp \supseteq [\cdot]_{\mathcal{B}}^{-1}(\text{Ker } M_{\mathcal{B}}(\varphi))$, da cui $V^\perp = [\cdot]_{\mathcal{B}}^{-1}(\text{Ker } M_{\mathcal{B}}(\varphi))$, ossia la tesi. \square

¹Stavolta non è sufficiente considerare la mappa $f : V \rightarrow V^*$ tale che $f(\underline{v}) = [\underline{w} \mapsto \varphi(\underline{v}, \underline{w})]$, dal momento che f non è lineare, bensì antilineare, ossia $f(a\underline{v}) = \bar{a}f(\underline{v})$.