

# Note del corso di Geometria 1

Gabriel Antonio Videtta

22 marzo 2023

## Decomposizione di Jordan e forma canonica di Jordan reale

**Nota.** Nel corso del documento, qualora non specificato, per  $f$  si intenderà un qualsiasi endomorfismo di  $V$ , dove  $V$  è uno spazio vettoriale di dimensione  $n \in \mathbb{N}$ . Inoltre per  $\mathbb{K}$  si intenderà, per semplicità, un campo algebricamente chiuso; altrimenti è sufficiente considerare un campo  $\mathbb{K}$  in cui i vari polinomi caratteristici esaminati si scompongono in fattori lineari.

Sia  $J$  la forma canonica di Jordan relativa a  $f \in \text{End}(V)$  in una base  $\mathcal{B}$ . Allora è possibile decomporre tale matrice in una somma di due matrici  $D$  e  $N$  tali che:

- $D$  è diagonale e in particolare contiene tutti gli autovalori di  $J$ ;
- $N$  è nilpotente ed è pari alla matrice ottenuta ignorando la diagonale di  $J$ ;
- $DN = ND$ , dacché le due matrici sono a blocchi diagonali.

Pertanto è possibile considerare gli endomorfismi  $\delta = M_{\mathcal{B}}^{-1}(D)$  (diagonalizzabile) e  $\nu = M_{\mathcal{B}}^{-1}(N)$  (nilpotente). Si osserva allora che questi endomorfismi sono tali che  $f = \delta + \nu$  (**decomposizione di Jordan** di  $f$ ).

**Teorema.** La decomposizione di Jordan di  $f$  è unica.

*Dimostrazione.* Per dimostrare che la decomposizione di Jordan è unica è sufficiente mostrare che, dati  $\delta, \delta'$  diagonalizzabili e  $\nu, \nu'$  nilpotenti tali che  $f = \delta + \nu = \delta' + \nu'$ , deve valere necessariamente che  $\delta = \delta'$  e che  $\nu = \nu'$ . In particolare è sufficiente dimostrare che  $\delta|_{\widetilde{V}_\lambda} = \delta'|_{\widetilde{V}_\lambda}$  per ogni autovalore  $\lambda$  di

$f$ , dal momento che  $V = \widetilde{V}_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus \widetilde{V}_{\lambda_k}$ , dove  $k$  è il numero di autovalori distinti di  $f$ , e così le matrici associate dei due endomorfismi sarebbero uguali in una stessa base, da cui si concluderebbe che  $\delta = \delta'$ , e quindi che  $\nu = \nu'$ .

Si osserva innanzitutto che  $\delta$  (e così tutti gli altri tre endomorfismi) commuta con  $f$ :  $\delta \circ f = \delta \circ (\delta + \nu) \stackrel{\delta \circ \nu = \nu \circ \delta}{=} (\delta + \nu) \circ \delta = f \circ \delta$ . Da quest'ultimo

risultato consegue che  $\widetilde{V}_\lambda$  è  $\delta$ -invariante, dacché se  $f$  commuta con  $\delta$ , anche  $(f - \lambda \text{Id})^n$  commuta con  $\delta$ . Sia infatti  $\underline{v} \in \widetilde{V}_\lambda = \text{Ker}(f - \lambda \text{Id})^n$ , allora  $(f - \lambda \text{Id})^n(\delta(\underline{v})) = \delta((f - \lambda \text{Id})^n(\underline{v})) = \delta(\underline{0}) = \underline{0} \implies \delta(\widetilde{V}_\lambda) \subseteq \widetilde{V}_\lambda$ .

Si considerano allora gli endomorfismi  $\delta|_{\widetilde{V}_\lambda}$ ,  $\delta'|_{\widetilde{V}_\lambda}$ ,  $\nu|_{\widetilde{V}_\lambda}$ ,  $\nu'|_{\widetilde{V}_\lambda} \in \text{End}(\widetilde{V}_\lambda)$ . Dal momento che  $\delta|_{\widetilde{V}_\lambda}$  e  $\nu|_{\widetilde{V}_\lambda}$  commutano, esiste una base  $\mathcal{B}'$  di  $\widetilde{V}_\lambda$  tale per cui i due endomorfismi sono triangolarizzabili simultaneamente. Inoltre, dal momento che  $\delta|_{\widetilde{V}_\lambda}$  è una restrizione su  $\delta$ , che è diagonalizzabile per ipotesi, anche quest'ultimo endomorfismo è diagonalizzabile; analogamente  $\nu|_{\widetilde{V}_\lambda}$  è ancora nilpotente.

Si osserva dunque che  $M_{\mathcal{B}'}(f|_{\widetilde{V}_\lambda}) = M_{\mathcal{B}'}(\delta|_{\widetilde{V}_\lambda}) + M_{\mathcal{B}'}(\nu|_{\widetilde{V}_\lambda})$ : la diagonale di  $M_{\mathcal{B}'}(\nu|_{\widetilde{V}_\lambda})$  è nulla, e  $M_{\mathcal{B}'}(f|_{\widetilde{V}_\lambda})$ , poiché somma di due matrici triangolari superiori, è una matrice triangolare superiore. Allora la diagonale di  $M_{\mathcal{B}'}(f|_{\widetilde{V}_\lambda})$  raccoglie l'unico autovalore  $\lambda$  di  $f|_{\widetilde{V}_\lambda}$ , che dunque è l'unico autovalore anche di  $\delta|_{\widetilde{V}_\lambda}$ . In particolare, poiché  $\delta|_{\widetilde{V}_\lambda}$  è diagonalizzabile, vale che  $\delta|_{\widetilde{V}_\lambda} = \lambda \text{Id}$ . Analogamente  $\delta'|_{\widetilde{V}_\lambda} = \lambda \text{Id}$ , e quindi  $\delta|_{\widetilde{V}_\lambda} = \delta'|_{\widetilde{V}_\lambda}$ , da cui anche  $\nu|_{\widetilde{V}_\lambda} = \nu'|_{\widetilde{V}_\lambda}$ . Si conclude dunque che le coppie di endomorfismi sono uguali su ogni restrizione, e quindi che  $\delta = \delta'$  e  $\nu = \nu'$ .  $\square$

Sia adesso  $V = \mathbb{R}^n$ . Si consideri allora la forma canonica di Jordan di  $f$  su  $\mathbb{C}$  (ossia estendendo, qualora necessario, il campo a  $\mathbb{C}$ ) e sia  $\mathcal{B}$  una base di Jordan per  $f$ . Sia  $\alpha$  un autovalore di  $f$  in  $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ . Allora, dacché  $p_f \in \mathbb{R}[\lambda]$ , anche  $\bar{\alpha}$  è un autovalore di  $f$ . In particolare, vi è un isomorfismo tra  $\widetilde{V}_\alpha$  e  $\widetilde{V}_{\bar{\alpha}}$  (rappresentato proprio dall'operazione di coniugio). Quindi i blocchi di Jordan relativi ad  $\alpha$  e ad  $\bar{\alpha}$  sono gli stessi, benché coniugati.

Sia ora  $\mathcal{B}'$  una base ordinata di Jordan per  $f|_{\widetilde{V}_\alpha}$ , allora  $\overline{\mathcal{B}'}$  è anch'essa una base ordinata di Jordan per  $f|_{\widetilde{V}_{\bar{\alpha}}}$ . Si consideri dunque  $W = \widetilde{V}_\alpha \oplus \widetilde{V}_{\bar{\alpha}}$  e la restrizione  $\varphi = f|_W$ . Si osserva che la forma canonica di  $\varphi$  si ottiene estraendo i singoli blocchi relativi ad  $\alpha$  e  $\bar{\alpha}$  dalla forma canonica di  $f$ . Se

$\mathcal{B}' = \{v_1, \dots, v_k\}$ , si considera  $\mathcal{B}'' = \{\Re(v_1), \Im(v_1), \dots, \Re(v_k), \Im(v_k)\}$ , ossia i vettori tali che  $\underline{v}_i = \Re(v_i) + i\Im(v_i)$ . Questi vettori soddisfano due particolari proprietà:

- $\Re(\underline{v}_i) = \frac{v_i + \overline{v}_i}{2},$
- $\Im(\underline{v}_i) = \frac{v_i - \overline{v}_i}{2i} \underbrace{=}_{\frac{1}{i} = -i} -\frac{v_i - \overline{v}_i}{2}i.$

In particolare  $\mathcal{B}''$  è un base di  $W$ , dal momento che gli elementi di  $\mathcal{B}''$  generano  $W$  e sono tanti quanto la dimensione di  $W$ , ossia  $2k$ . Si ponga  $\alpha = a + bi$ . Se  $\underline{v}_i$  è autovettore si conclude che:<sup>1</sup>

- $f(\Re(\underline{v}_i)) = \frac{1}{2}(f(v_i) + f(\overline{v}_i)) = \frac{1}{2}(\alpha v_i + \overline{\alpha} \overline{v}_i) = \frac{1}{2}(a v_i + b i v_i + a \overline{v}_i - b i \overline{v}_i) = a \frac{v_i + \overline{v}_i}{2} + b \frac{v_i - \overline{v}_i}{2} i = a \Re(\underline{v}_i) - b \Im(\underline{v}_i),$
- $f(\Im(\underline{v}_i)) = \frac{1}{2i}(f(v_i) - f(\overline{v}_i)) = \frac{1}{2i}(\alpha v_i - \overline{\alpha} \overline{v}_i) = \frac{1}{2i}(a v_i + b i v_i - a \overline{v}_i + b i \overline{v}_i) = b \frac{v_i + \overline{v}_i}{2} + a \frac{v_i - \overline{v}_i}{2i} = b \Re(\underline{v}_i) + a \Im(\underline{v}_i).$

Altrimenti, se non lo è:

- $f(\Re(\underline{v}_i)) = \frac{1}{2}(f(v_i) + f(\overline{v}_i)) = \frac{1}{2}(\alpha v_i + v_{i-1} + \overline{\alpha} \overline{v}_i + \overline{v}_{i-1}) = \frac{1}{2}(a v_i + b i v_i + a \overline{v}_i - b i \overline{v}_i) + \Re(\underline{v}_{i-1}) = a \frac{v_i + \overline{v}_i}{2} + b \frac{v_i - \overline{v}_i}{2} i + \Re(\underline{v}_{i-1}) = a \Re(\underline{v}_i) - b \Im(\underline{v}_i) + \Re(\underline{v}_{i-1}),$
- $f(\Im(\underline{v}_i)) = \frac{1}{2i}(f(v_i) - f(\overline{v}_i)) = \frac{1}{2i}(\alpha v_i + v_{i-1} - \overline{\alpha} \overline{v}_i - \overline{v}_{i-1}) = \frac{1}{2i}(a v_i + b i v_i - a \overline{v}_i + b i \overline{v}_i) + \Im(\underline{v}_{i-1}) = b \frac{v_i + \overline{v}_i}{2} + a \frac{v_i - \overline{v}_i}{2i} + \Im(\underline{v}_{i-1}) = b \Re(\underline{v}_i) + a \Im(\underline{v}_i) + \Im(\underline{v}_{i-1}).$

Quindi la matrice associata nella base  $\mathcal{B}''$  è la stessa di  $f$  relativa ad  $\alpha$  dove si amplifica la matrice sostituendo ad  $\alpha$  la matrice<sup>2</sup>  $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$  e ad 1 la

matrice  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

<sup>1</sup>Si è in seguito utilizzato più volte l'identità  $f(\overline{v}_i) = \overline{f(v_i)}$ .

<sup>2</sup>Si verifica facilmente che lo spazio delle matrici  $\left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \in M(2, \mathbb{R}) \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}$  è

isomorfo a  $\mathbb{C}$  secondo la mappa  $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \mapsto a + bi$ .

**Esempio.** Si consideri la matrice  $M = \begin{pmatrix} 1+i & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1+i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-i & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1-i \end{pmatrix}$ . Si

osserva che  $M$  è composta da due blocchi che sono uno il blocco coniugato

dell'altro. Quindi  $M$  è simile alla matrice reale  $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ .