Note del corso di Geometria 1

Gabriel Antonio Videtta

5 maggio 2023

Affinità e spazio proiettivo

Nota. Qualora non specificato diversamente, con E si indicherà un generico spazio affine di dimensione n su cui agisce lo spazio vettoriale V.

Sia f un'applicazione affine di E. Allora, per ogni $O \in E$, $\underline{v} \in V$, $f(O + \underline{v}) = f(O) + g(\underline{v})$, dove $g \in \mathrm{End}(V)$ è l'applicazione lineare associata ad f. Pertanto $f(O + \underline{v}) = O + (f(O) - O) + g(\underline{v})$, ossia f è una traslazione di vettore $f(O) - O$ composta ad un'applicazione lineare.

In particolare, passando alle coordinate rispetto al punto O e una base $\mathcal{B}$ di V, si può riscrivere $[f(P)]_{O,\mathcal{B}}$ secondo la seguente identità:

$$[f(P)]_{O,\mathcal{B}} = \underbrace{[f(O) - O]_{\mathcal{B}}}_{\underline{b}} + \underbrace{[g(P - O)]_{\mathcal{B}}}_{A[\underline{v}]_{\mathcal{B}}} = A[P - O]_{\mathcal{B}} + \underline{b},$$

dove $A = M_{\mathcal{B}}(g)$. In particolare, in $\mathcal{A}_{\mathrm{n}}(\mathbb{K})$, scegliendo $O = \underline{0}$ come origine e la base canonica come base $\mathcal{B}$, si ottiene che:

$$f(\underline{v}) = A\underline{v} + \underline{b},$$

per ogni $\underline{v} \in \mathcal{A}_{\mathrm{n}}(\mathbb{K})$. Se $f \in A(E)$, allora vale anche che:

$$f^{-1}(O + \underline{w}) = f^{-1}(f(O) + (O - f(O)) + \underline{w}) = O - g^{-1}(f(O) - O) + g(\underline{w}),$$

dove si è usato che g è invariante per cambiamento del punto d'origine O. Pertanto, in questo caso, passando alle coordinate, vale che:

$$[f^{-1}(P)]_{O,\mathcal{B}} = A^{-1}[P - O]_{\mathcal{B}} - A^{-1}\underline{b}.$$

Considerando questa identità in $\mathcal{A}_{\mathrm{n}}(\mathbb{K})$, risulta che:

$$f^{-1}(\underline{v}) = A^{-1}\underline{v} - A^{-1}\underline{b},$$

per ogni $\underline{v} \in \mathcal{A}_\mathrm{n}(\mathbb{K})$.

Sia $\iota : \mathcal{A}_\mathrm{n}(\mathbb{K}) \to H_{n+1}$ l'applicazione che associa $\underline{x}$ a $\begin{pmatrix} \underline{x} \\ 1 \end{pmatrix} \in H_{n+1}$, dove vale che:

$$H_{n+1} = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{n+1} \end{pmatrix} \;\middle|\; x_{n+1} = 1 \right\},$$

ossia l'iperpiano affine di $\mathcal{A}_{n+1}(\mathbb{K})$ dei vettori con l'ultima coordinata pari a 1. Per comodità si indica $\iota(\underline{x})$ con $\hat{\underline{x}}$.

Proposizione. ι è un'isomorfismo affine.

Dimostrazione. Si verifica innanzitutto che ι è un'applicazione affine. Siano λ_1, ..., $\lambda_k \in \mathbb{K}$ tali che $\sum_{i=1}^k \lambda_i = 1$, e siano $\underline{x_1}$, ..., $\underline{x_k} \in E$. Allora vale che:

$$\iota\left(\sum_{i=1}^k \lambda_i \underline{x_i}\right) = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^k \lambda_i \underline{x_i} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^k \lambda_i \underline{x_i} \\ \sum_{i=1}^k \lambda_i \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^k \lambda_i \, \iota(\underline{x_i}).$$

Si consideri[1] ora l'applicazione lineare g associata a ι. Allora, posto $O = \underline{0}$, $g(\underline{v}) = f(O + \underline{v}) - f(O) = f(\underline{v}) - f(\underline{0}) = f(\underline{v}) - \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}^\top$. Dal momento che la direzione di H_{n+1} è n-dimensionale (scegliendo O come origine, tutti i vettori ottenibili scartano l'ultima coordinata, sempre pari a 0), g mappa due spazi vettoriali di stessa dimensione.

Pertanto, è sufficiente dimostrare che g è surgettiva affinché sia invertibile (e dunque ι sia un isomorfismo affine). Chiaramente g è surgettiva, dal momento che ad ogni vettore $\hat{\underline{v}} = \begin{pmatrix} \underline{v} & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{Giac}(H_{n+1})$ è tale che $g(\underline{v}) = \hat{\underline{v}}$. Si conclude dunque che g è invertibile, e che ι è un isomorfismo affine. $\square$

Proposizione. Sia $f \in A(\mathcal{A}_\mathrm{n}(\mathbb{K}))$ e sia $f' = \iota \circ f \circ \iota^{-1} \in A(H_{n+1})$ l'identificazione di f in H_{n+1}. Allora si può estendere f' ad un'applicazione lineare invertibile $\hat{f}$ di $\mathbb{K}^{n+1}$ (ossia ad un'applicazione $\hat{f}$ tale per cui $\hat{f}|_{H_{n+1}} = f'$).

[1] Per concludere in modo più diretto la dimostrazione è sufficiente anche esibire l'inverso di g, ottenuto ignorando l'ultima coordinata di un vettore di H_{n+1}.

Viceversa, data un'applicazione lineare invertibile $g \in \mathrm{End}(\mathbb{K}^{n+1})$ tale che $g|_{H_{n+1}} = H_{n+1}$, allora la restrizione $g|_{H_{n+1}}$ è un'affinità di H_{n+1} ed induce un'affinità f di $\mathcal{A}_{\mathrm{n}}(\mathbb{K})$ in modo tale che $f = \iota^{-1} \circ g|_{H_{n+1}} \circ \iota$.

In particolare, una tale $\hat{f}$ è tale che $\hat{f}(\underline{x}') = A'\underline{x}' \; \forall \, \underline{x}' \in \mathbb{K}^{n+1}$, dove vale che:

$$A' = \left(\begin{array}{c|c} A & \underline{b} \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right), \qquad f(\underline{v}) = A\underline{v} + \underline{b} \quad \forall \, \underline{v} \in \mathcal{A}_{\mathrm{n}}(\mathbb{K}) \, .$$

Dimostrazione. Si consideri $\hat{f} \in \mathrm{End}(\mathbb{K}^{n+1})$ tale che $\hat{f}(\underline{x}') = A'\underline{x}'$. $\hat{f}$ è invertibile dal momento che A' lo è. Infatti vale che:

$$(A')^{-1} = \left(\begin{array}{c|c} A^{-1} & -A^{-1}\,\underline{b} \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right).$$

Sia $\hat{x} = \begin{pmatrix} \underline{x} & 1 \end{pmatrix}^\top \in H_{n+1}$. Sia ora $\hat{x} \in H_{n+1}$. Allora $\hat{f}(\hat{x}) = \begin{pmatrix} A\underline{x} + \underline{b} & 1 \end{pmatrix}^\top = \begin{pmatrix} f(\underline{x}) & 1 \end{pmatrix}^\top = \iota(f(\underline{x})) = \iota(f(\iota^{-1}(\hat{x}))) = f'(\hat{x}) \in H_{n+1} \; \forall \, \hat{x} \in H_{n+1}$. Pertanto $\hat{f}|_{H_{n+1}} = f'$.

Si consideri adesso $g \in \mathrm{GL}(\mathbb{K}^{n+1})$ tale che $g|_{H_{n+1}} = H_{n+1}$. Sia A' tale che $g(\underline{x}') = A'\underline{x}' \; \forall \, \underline{x}' \in \mathbb{K}^{n+1}$. Poiché $g|_{H_{n+1}} = H_{n+1}$, allora $(A')_{n+1,n+1} = g(\underline{e_{n+1}})_{n+1} = 1$. Poiché $g(\underline{e_n} + \underline{e_{n+1}})_{n+1} = 1$, allora $(A')_{n+1,n} = 0$. In particolare, partendo da $j = n$ fino a $j = 1$, si deduce, per induzione, che $g(\underline{e_j} + \ldots + \underline{e_{n+1}})_{n+1} = 1 \implies (A')_{n+1,j} = 0$.

Allora A' è della seguente forma:

$$A' = \left(\begin{array}{c|c} A & \underline{b} \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right), \quad A \in M(n, \mathbb{K}), \, \underline{b} \in \mathbb{K}^n.$$

Considerando allora l'applicazione affine $f \in \mathcal{A}_{\mathrm{n}}(\mathbb{K})$ tale che $f(\underline{v}) = A\underline{v} + \underline{b}$, g è l'applicazione lineare invertibile che estende $f' = \iota \circ f \circ \iota^{-1}$, come visto prima, da cui la tesi. $\square$

Osservazione. Le matrici della forma:

$$\left(\begin{array}{c|c} A & \underline{b} \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right), \quad A \in M(n, \mathbb{K}), \, \underline{b} \in \mathbb{K}^n,$$

formano un sottogruppo di $(M(n+1, \mathbb{K}), \cdot)$ canonicamente isomorfo a $A(\mathcal{A}_{\mathrm{n}}(\mathbb{K}))$.

Definizione (spazio proiettivo)**.** Si definisce lo **spazio proiettivo** $\mathbb{P}(\mathbb{K}^{n+1}) = \mathbb{P}^n(\mathbb{K})$ come l'insieme dei sottospazi di dimensione unitaria di $\mathbb{K}^{n+1}$.

Osservazione. Se si definisce la relazione di equivalenza $\sim$ su V in modo tale che $\underline{x} \sim \underline{y} \overset{\text{def}}{\iff} \exists\, \alpha \in \mathbb{K}^* \mid \underline{x} = \alpha\underline{y}$, $V/\sim$ è in bigezione con lo spazio proiettivo. In particolare, ogni elemento di $V/\sim$ è un unico elemento dello spazio proiettivo a cui è stato tolto il vettore $\underline{0}$.

Osservazione. Ogni elemento $\hat{x} = \begin{pmatrix} \underline{x} & 1 \end{pmatrix}^\top$ di H_{n+1} identifica un unico elemento dello spazio proiettivo, ossia $\operatorname{Span}(\hat{x})$, dal momento che due vettori di H_{n+1} appartengono alla stessa retta se e solo se sono linearmente dipendenti, ossia se sono uguali.

Gli elementi di $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$ che non contengono elementi di H_{n+1} sono esattamente i sottospazi contenenti vettori la cui ultima coordinata è nulla. Pertanto questi elementi, detti **punti all'infinito** di $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$, si possono identificare in particolare come elementi di $\mathbb{P}^{n+1}(\mathbb{K})$.

Osservazione. Si può ricoprire $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$ con iperpiani analoghi ad H_{n+1}, ossia con gli iperpiani della seguente forma:

$$T_i = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{n+1} \end{pmatrix} \;\middle|\; x_i = 1 \right\}.$$

Ogni elemento di $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$ interseca infatti almeno uno di questi iperpiani, dacché in esso deve esistervi obbligatoriamente un vettore non nullo. In particolare, se esiste un'intersezione tra T_i e un elemento di $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$, questa è unica.