

## Composizione di app. lineari

Date  $f: V \rightarrow W$  e  $g: W \rightarrow Z$  app. lineari, allora  $f \circ g: V \rightarrow Z$  è app. lineare. Infatti:

$$(i) \quad f(g(\underline{v}_1 + \underline{v}_2)) = f(g(\underline{v}_1) + g(\underline{v}_2)) = f(g(\underline{v}_1)) + f(g(\underline{v}_2))$$

$$(ii) \quad f(g(\alpha \underline{v})) = f(\alpha g(\underline{v})) = \alpha f(g(\underline{v}))$$

In particolare valgono le seguenti proprietà:

$$(i) \quad f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h \quad (\text{associatività})$$

$$(ii) \quad f \circ (g + h) = f \circ g + f \circ h \quad (\text{distributività})$$

$$(iii) \quad (cg) \circ h = c(g \circ h) = g \circ (ch) \quad \forall c \in \mathbb{K}$$

Si definisce  $\text{rg}(f) := \dim \text{Imm } f$ . Vale la fondamentale proprietà per cui, data  $f: V \rightarrow W$  app. lin.,

$$\text{rg}(f) = \text{rg} \underbrace{M_{B'}^B(f)}_A$$

con  $B$  base di  $V$  e  $B'$  di  $W$ . Infatti  $\text{Imm } f \cong \text{Imm } f_A$

con isomorfismo  $\psi_{B'}: \underline{w} \mapsto [\underline{w}]_{B'}$

Prop.  $g \circ f$  iniettiva  $\Rightarrow f$  iniettiva

Se  $f$  non fosse iniettiva,  $\exists \underline{v}_1 \neq \underline{v}_2 \in V \mid f(\underline{v}_1) = f(\underline{v}_2) \rightarrow$   
 $\Rightarrow g(f(\underline{v}_1)) = g(f(\underline{v}_2))$ ; allora  $g \circ f$  non sarebbe  
iniettiva,  $\downarrow$  □

Prop.  $g \circ f$  surgettiva  $\Rightarrow g$  surgettiva

Se  $g$  non fosse surgettiva,  $\exists \underline{z} \in Z \mid \forall \underline{w} \in W g(\underline{w}) \neq \underline{z}$ .  
Tuttavia così  $g \circ f$  non potrebbe essere surgettiva,  $\downarrow$  □

Oss.  $\text{Ker } f \subset \text{Ker } g \circ f$ ,  $\text{Imm } g \circ f \subset \text{Imm } g$

Oss.  $\text{rg}(g \circ f) \leq \min \{ \text{rg}(g), \text{rg}(f) \}$

(i)  $\dim \text{Imm } g \circ f \leq \dim \text{Imm } g$  ✓

(ii)  $\dim \text{Imm } g \circ f = \dim \text{Imm } f - \dim(\text{Imm } f \cap$   
 $\cap \text{Ker } g) \leq \dim \text{Imm } f$  ✓

## Endomorfismi

Data un'app. lineare  $f: V \rightarrow V$ , essa si chiama **ENDOMORFISMO** di  $V$  (o **OPERATORE**).

Un endomorfismo  $f$  è invertibile se e solo se è un isomorfismo, ossia se è un **automorfismo**.

Per comodità si definisce  $\text{End}(V) = \mathcal{L}(V) = \mathcal{L}(V, V)$ .

Sono equivalenti i seguenti fatti per  $f \in \mathcal{L}(V)$ :

- (i)  $f$  invertibile
- (ii)  $f$  isomorfismo
- (iii)  $f$  iniettiva
- (iii)  $f$  surgettiva
- (iv)  $\text{rg}(f) = \dim V$

Teorema  $M_{B''}^B(g \circ f) = M_{B''}^{B'}(g) M_{B'}^B(f)$

$$\begin{aligned} M_{B''}^B(g \circ f)^J &= \left[ (g \circ f)(\underline{v}_1) \right]_{B''} = \left[ g(f(\underline{v}_1)) \right]_{B''} = \\ &= M_{B''}^{B'}(g) \left[ f(\underline{v}_1) \right]_{B'} \end{aligned}$$

Quindi:  $M_{B''}^B (g \circ f) = [M_{B''}^{B'} (g) [f(v_1)]_{B'} \mid \cdots \mid M_{B''}^{B'} [f(v_k)]_{B'}] =$   
 $= M_{B''}^{B'} (g) M_{B'}^B (f) \quad \square$

Corollario  $\text{rang}(AB) \leq \min \{ \text{rang}(A), \text{rang}(B) \}$

$$\text{rang}(f_A \circ f_B) \leq \min \{ \text{rang}(f_A), \text{rang}(f_B) \} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{rang}(AB) \leq \min \{ \text{rang}(A), \text{rang}(B) \}$$

es.  $\text{Id}_V : V \rightarrow V \quad M_B^B (\text{Id}_V) = [ [\text{Id}_V(v_1)]_B \mid \cdots ] =$   
 $= \left[ \begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 1 & & \\ 0 & & \ddots & \\ \vdots & & & 1 \end{array} \right] \left. \vphantom{\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 1 & & \\ 0 & & \ddots & \\ \vdots & & & 1 \end{array}} \right\} \text{MATRICE IDENTITA'}$

OSS. Sia  $f : V \rightarrow V$  un endomorfismo invertibile, allora

$$e = M_B^B (f \circ f^{-1}) = M_{B'}^B (f) M_{B'}^B (f^{-1}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow M_{B'}^B (f^{-1}) = M_B^{B'} (f)^{-1}$$

Prop. Una matrice  $A \in M_m(\mathbb{K})$  è invertibile se e solo se

(i)  
 $\text{rang}(A) = m$   
 (ii)



es.  $GL_2(\mathbb{R}) = \left\{ A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}, \text{rg}(A) = 2 \right\}$

Teorema del cambiamento di base Siano  $B$  ed  $e$  basi di  $V$ ,  $B'$  ed  $e'$  basi di  $W$  e sia  $f: V \rightarrow W$  app. lineare, allora:

$$M_{e'}^e(f) = M_{e'}^{B'}(\text{Id}_W) M_{B'}^B(f) M_B^e(\text{Id}_V)$$

In fatti:  $M_{e'}^e(f) = M_{e'}^e(\text{Id}_W \circ f \circ \text{Id}_V) =$   
 $= M_{e'}^{B'}(\text{Id}_W) M_{B'}^B(f) M_B^e(\text{Id}_V) \quad \square$

OSS. La relazione  $A \sim_{SD} B \Leftrightarrow \exists P \in GL_m(\mathbb{K}), Q \in GL_n(\mathbb{K}) \mid$   
 $A = P B Q$  è una relazione d'equivalenza, detta  
SD-equivalenza (equiv. sinistra-destra):

(i) riflessiva:  $A = \text{Id}_m A \text{Id}_m$

(ii) simmetrica:  $A = P B Q \Rightarrow B = P^{-1} A Q^{-1}$

(iii) transitiva:  $A = P B Q, B = P' C Q' \Rightarrow A = P P' C Q' Q$

Prop.  $g$  iniettiva  $\Rightarrow \text{rg}(g \circ f) = \text{rg}(f)$

$$V \xrightarrow{f} W \xrightarrow{g} Z$$

$$\dim \text{Imm } g|_{f(V)} = \dim f(V) - \dim (\text{Ker } g \cap \text{Imm } f) = 0$$

$$\text{rg}(g \circ f) = \text{rg}(f) \quad \square$$

Prop.  $f$  surgettiva  $\Rightarrow \text{rg}(g \circ f) = \text{rg}(g)$

$$\text{rg}(g \circ f) = \overset{= \dim W}{\text{rg}(f)} - \dim (\text{Ker } g \cap \underbrace{\text{Imm } f}_W)$$

$$\text{rg}(g \circ f) = \dim W - \dim \text{Ker } g = \text{rg}(g) \quad \square$$

Oss.  $f$  isomorfismo  $\Rightarrow \text{rg}(g \circ f) = \text{rg}(f)$

$g$  isomorfismo  $\Rightarrow \text{rg}(g \circ f) = \text{rg}(g)$

$A$  invertibile  $\Rightarrow \text{rg } AB = \text{rg } B$

$B$  invertibile  $\Rightarrow \text{rg } AB = \text{rg } A$

Teorema Sia  $f: V \rightarrow W$  con  $\dim V = n$ ,  $\dim W = m$  e  $\text{rg } f = r$ . Allora  $\exists B \subset V, B' \subset W$  basi t.c.

$$M_{B'}^B(f) = \left[ \begin{array}{c|c} \begin{matrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{matrix} & \begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix} \\ \hline \begin{matrix} 0 & 0 & \dots & 0 \end{matrix} & \begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix} \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right]$$

Sia  $\underline{v}_{r+1}, \underline{v}_{r+2}, \dots, \underline{v}_n$  base di  $\text{Ker } f$  e venga estesa a una base  $B$  di  $V$ . Allora  $B = (\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_r, \underline{v}_{r+1}, \dots, \underline{v}_n)$ .

Si pone  $\underline{w}_i = f(\underline{v}_i)$  e si dimostra che  $\{\underline{w}_1, \dots, \underline{w}_r\}$  è lin. ind.

$$\alpha_1 \underline{w}_1 + \dots + \alpha_r \underline{w}_r = \underline{0} \iff$$

$$\iff f(\underbrace{\alpha_1 \underline{v}_1 + \dots + \alpha_r \underline{v}_r}_V) = \underline{0} \iff$$

$$\iff V \in \text{Ker } f \cap \text{Span}(\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_r) \iff$$

$$\iff \alpha_1 \underline{v}_1 + \dots + \alpha_r \underline{v}_r = \alpha_{r+1} \underline{v}_{r+1} + \dots + \alpha_n \underline{v}_n \iff$$

$$\iff \alpha_1 \underline{v}_1 + \dots + \alpha_r \underline{v}_r - \alpha_{r+1} \underline{v}_{r+1} + \dots - \alpha_n \underline{v}_n = \underline{0} \iff$$

$$\iff \alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$$

Sia  $B'$  un'estensione alla base di  $\underline{w}_1, \dots, \underline{w}_r$ , allora

$$B' = (\underline{w}_1, \dots, \underline{w}_r, \dots, \underline{w}_m).$$



$$M_{B'}^B(f) = \left[ [f(v_1)]_{B'} \mid \cdots \mid [f(v_n)]_{B'} \right] =$$

$$= \left[ [\underline{w_1}]_{B'} \mid \cdots \mid [\underline{0}]_{B'} \right] =$$

$$= \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & \\ \vdots & \vdots & & \\ \hline \vdots & 0 & & 0 \end{array} \right]$$

□

Teorema  $A \underset{(i)}{\overset{SD}{\sim}} B \iff \underset{(ii)}{\text{rg}}(A) = \text{rg}(B)$

(i)  $\Rightarrow$  (ii)  $\left\{ \begin{array}{l} A = P B Q. \text{ Poiché } P \in GL_m(\mathbb{K}) \text{ e} \\ Q \in GL_n(\mathbb{K}) \text{ sono invertibili, si ha} \\ \text{che } \text{rg}(A) = \text{rg}(P B Q) = \text{rg}(B Q) = \\ = \text{rg}(B). \end{array} \right.$

(ii)  $\Rightarrow$  (i)  $\left\{ \begin{array}{l} \text{Sia } \text{rg}(A) = \text{rg}(B) = r, \text{ allora si} \\ \text{consideri } f = f_A. \text{ Chiaramente } M_{e'}^e(f_A) = \\ = A. \text{ Per il Teorema precedente } \exists B \\ \text{base di } M_n(\mathbb{K}), B' \text{ base di } M_m(\mathbb{K}) \mid \\ M_{B'}^B(f) = \left[ \begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right]. \end{array} \right.$

Per il Teorema del cambiamento di

base  $A = M_{e'}^e(f) = M_{e'}^{B'}(\text{Id}_m) M_{B'}^B(f) M_B^e(\text{Id}_n)$ .  
 Pertanto  $A \underset{\text{SD}}{\sim} M_{B'}^B(f)$ .  
 Analogamente  $B \underset{\text{SD}}{\sim} M_{B'}^B(f)$ . Per la  
 transitività si ha dunque che  $A \underset{\text{SD}}{\sim} B$ .

□

Pertanto si dice che il rango è un **INVARIANTE**  
**COMPLETO** per la relazione. Data una matrice  
 $m \times n$ , in particolare può partecipare a una tra  
 le  $\min\{m, n\}$  classi di equivalenza disponibili.

**OSS.** Sia  $f: V \rightarrow V$  un endomorfismo e siano  $B$  ed  $e$   
 due basi di  $V$ , allora:

$$\underbrace{M_B^B(f)}_A = \underbrace{M_B^e(\text{Id}_V)}_P \underbrace{M_e^e(f)}_B \underbrace{M_e^B(\text{Id}_V)}_{P^{-1}}$$

ossia  $A = P B P^{-1}$ , il coniugio di  $B$  rispetto a  $P$ ,  
 che è detta matrice di cambio-base. In particolare  
 $P \in GL_m(\mathbb{K})$ , dove  $m = \dim V$ .

Def.  $A \sim B \Leftrightarrow \exists P \in GL_m(K) \mid A = PBP^{-1} \Leftrightarrow$   
 $\Leftrightarrow A$  e  $B$  sono simili

Oss.  $\sim$  è una relazione di equivalenza.

Oss. Il rango è certamente invariante,  $A \sim B \Rightarrow \text{rg}(A) = \text{rg}(B)$ .

Oss.  $PIP^{-1} = P P^{-1} I = I$ , ossia  $I$  è simile solo a sé stessa.

Prop.  $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$ ,  $A \in M_{m,n}(K)$ ,  $B \in M_{n,m}(K)$

$$\text{tr}(AB) = \sum_{i=1}^m (AB)_{ii} = \sum_{i=1}^m A_i B^i = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} b_{ji} = C$$

$$\text{tr}(BA) = \sum_{j=1}^n (BA)_{jj} = \sum_{j=1}^n B_j A^j = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m b_{ji} a_{ij} = C$$

□

Corollario  $\text{tr}(PAP^{-1}) = \text{tr}(A)$

$$\text{tr}(PAP^{-1}) = \text{tr}(APP^{-1}) = \text{tr}(A)$$

□