I prodotti di uno spazio vettoriale

Dispense del corso di Geometria 1

Gabriel Antonio Videtta

A.A. 2022/2023

UNIVERSITÀ DI PISA

Indice

1 Introduzione al prodotto scalare

Nota. Nel corso del documento, per V, qualora non specificato, si intenderà uno spazio vettoriale di dimensione finita n.

1.1 Prime definizioni

1.1.1 Prodotto scalare e vettori ortogonali rispetto a φ

Definizione (prodotto scalare)**.** Un **prodotto scalare** su V è una forma bilineare simmetrica φ con argomenti in V.

Esempio. Sia $\varphi : M(n, \mathbb{K}) \times M(n, \mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ tale che $\varphi(A, B) = \operatorname{tr}(AB)$.

▶ $\varphi(A + A', B) = \operatorname{tr}((A + A')B) = \operatorname{tr}(AB + A'B) = \operatorname{tr}(AB) + \operatorname{tr}(A'B) = \varphi(A, B) + \varphi(A', B)$ (linearità nel primo argomento),
▶ $\varphi(\alpha A, B) = \operatorname{tr}(\alpha AB) = \alpha \operatorname{tr}(AB) = \alpha\varphi(A, B)$ (omogeneità nel primo argomento),
▶ $\varphi(A, B) = \operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA) = \varphi(B, A)$ (simmetria),
▶ poiché φ è simmetrica, φ è lineare e omogenea anche nel secondo argomento, e quindi è una forma bilineare simmetrica, ossia un prodotto scalare su $M(n, \mathbb{K})$.

Definizione (vettori ortogonali)**.** Due vettori $\underline{v}$, $\underline{w} \in V$ si dicono **ortogonali** rispetto al prodotto scalare φ, ossia $\underline{v} \perp \underline{w}$, se $\varphi(\underline{v}, \underline{w}) = 0$.

Definizione. Si definisce prodotto scalare *canonico* di $\mathbb{K}^n$ la forma bilineare simmetrica φ con argomenti in $\mathbb{K}^n$ tale che:

$$\varphi((x_1, ..., x_n), (y_1, ..., y_n)) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i.$$

Osservazione. Si può facilmente osservare che il prodotto scalare canonico di $\mathbb{K}^n$ è effettivamente un prodotto scalare.

▶ $\varphi((x_1, ..., x_n) + (x_1', ..., x_n'), (y_1, ..., y_n)) = \sum_{i=1}^n (x_i + x_i')y_i = \sum_{i=1}^n [x_i y_i + x_i' y_i] = \sum_{i=1}^n x_i y_i + \sum_{i=1}^n x_i' y_i = \varphi((x_1, ..., x_n), (y_1, ..., y_n)) + \varphi((x_1', ..., x_n'), (y_1, ..., y_n))$ (linearità nel primo argomento),
▶ $\varphi(\alpha(x_1, ..., x_n), (y_1, ..., y_n)) = \sum_{i=1}^n \alpha x_i y_i = \alpha \sum_{i=1}^n x_i y_i = \alpha\varphi((x_1, ..., x_n), (y_1, ..., y_n))$ (omogeneità nel primo argomento),
▶ $\varphi((x_1, ..., x_n), (y_1, ..., y_n)) = \sum_{i=1}^n x_i y_i = \sum_{i=1}^n y_i x_i = \varphi((y_1, ..., y_n), (x_1, ..., x_n))$ (simmetria),

▶ poiché φ è simmetrica, φ è lineare e omogenea anche nel secondo argomento, e quindi è una forma bilineare simmetrica, ossia un prodotto scalare su $\mathbb{K}^n$.

Esempio. Altri esempi di prodotto scalare sono i seguenti:

▶ $\varphi(A, B) = \mathrm{tr}(A^\top B)$ per $M(n, \mathbb{K})$,
▶ $\varphi(p(x), q(x)) = p(a)q(a)$ per $\mathbb{K}[x]$, con $a \in \mathbb{K}$,
▶ $\varphi(p(x), q(x)) = \sum_{i=1}^n p(x_i)q(x_i)$ per $\mathbb{K}[x]$, con x_1, ..., x_n distinti,
▶ $\varphi(p(x), q(x)) = \int_a^b p(x)q(x)dx$ per lo spazio delle funzioni integrabili su $\mathbb{R}$, con a, b in $\mathbb{R}$,
▶ $\varphi(\underline{x}, \underline{y}) = \underline{x}^\top A \underline{y}$ per $\mathbb{K}^n$, con $A \in M(n, \mathbb{K})$ simmetrica.

1.1.2 Prodotto definito o semidefinito

Definizione. Sia[1] $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Allora un prodotto scalare φ si dice **definito positivo** ($\varphi > 0$) se $\underline{v} \in V$, $\underline{v} \neq \underline{0} \implies \varphi(\underline{v}, \underline{v}) > 0$. Analogamente φ è **definito negativo** ($\varphi < 0$) se $\underline{v} \neq \underline{0} \implies \varphi(\underline{v}, \underline{v}) < 0$. In generale si dice che φ è **definito** se è definito positivo o definito negativo.

Infine, φ è **semidefinito positivo** ($\varphi \geq 0$) se $\varphi(\underline{v}, \underline{v}) \geq 0 \ \forall \underline{v} \in V$ (o **semidefinito negativo**, e quindi $\varphi \leq 0$, se invece $\varphi(\underline{v}, \underline{v}) \leq 0 \ \forall \underline{v} \in V$). Analogamente ai prodotti definiti, si dice che φ è **semidefinito** se è semidefinito positivo o semidefinito negativo.

Esempio. Il prodotto scalare canonico di $\mathbb{R}^n$ è definito positivo: infatti $\varphi((x_1, ..., x_n), (x_1, ..., x_n)) = \sum_{i=1}^n x_i^2 > 0$, se $(x_1, ..., x_n) \neq \underline{0}$.

Al contrario, il prodotto scalare $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tale che $\varphi((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = x_1y_1 - x_2y_2$ non è definito positivo: $\varphi((x, y), (x, y)) = 0$, $\forall\ (x, y) \mid x^2 = y^2$, ossia se $y = x$ o $y = -x$.

1.2 Il radicale di un prodotto scalare

1.2.1 La forma quadratica q associata a φ e vettori (an)isotropi

Definizione. Ad un dato prodotto scalare φ di V si associa una mappa $q : V \to \mathbb{K}$, detta **forma quadratica**, tale che $q(\underline{v}) = \varphi(\underline{v}, \underline{v})$.

Osservazione. Si osserva che q non è lineare in generale: infatti $q(\underline{v} + \underline{w}) \neq q(\underline{v}) + q(\underline{w})$ in $\mathbb{R}^n$.

Definizione (vettore (an)isotropo)**.** Un vettore $\underline{v} \in V$ si dice **isotropo** rispetto al prodotto scalare φ se $q(\underline{v}) = \varphi(\underline{v}, \underline{v}) = 0$. Al contrario, $\underline{v}$ si dice **anisotropo** se non è isotropo, ossia se $q(\underline{v}) \neq 0$.

[1]In realtà, la definizione è facilmente estendibile a qualsiasi campo, purché esso sia ordinato.

Definizione (cono isotropo)**.** Si definisce **cono isotropo** di V rispetto al prodotto scalare φ il seguente insieme:

$$\mathrm{CI}(\varphi) = \{\underline{v} \in V \mid \varphi(\underline{v}, \underline{v}) = 0\},$$

ossia l'insieme dei vettori isotropi di V.

Esempio. Rispetto al prodotto scalare $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ tale che $\varphi((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)) = x_1y_1+x_2y_2-x_3y_3$, i vettori isotropi sono i vettori della forma (x, y, z) tali che $x^2+y^2 = z^2$, e quindi $\mathrm{CI}(\varphi)$ è l'insieme dei vettori stanti sul cono di equazione $x^2 + y^2 = z^2$.

1.2.2 Matrice associata a φ e relazione di congruenza

Osservazione. Come già osservato in generale per le applicazioni multilineari, il prodotto scalare è univocamente determinato dai valori che assume nelle coppie $\underline{v_i}, \underline{v_j}$ estraibili da una base $\mathcal{B}$. Infatti, se $\mathcal{B} = (\underline{v_1}, ..., \underline{v_k})$, $\underline{v} = \sum_{i=1}^k \alpha_i\underline{v_i}$ e $\underline{w} = \sum_{i=1}^k \beta_i\underline{v_i}$, allora:

$$\varphi(\underline{v}, \underline{w}) = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{k} \alpha_i\beta_j\, \varphi(\underline{v_i}, \underline{v_j}).$$

Definizione. Sia φ un prodotto scalare di V e sia $\mathcal{B} = (\underline{v_1}, ..., \underline{v_n})$ una base ordinata di V. Allora si definisce la **matrice associata** a φ come la matrice:

$$M_{\mathcal{B}}(\varphi) = (\varphi(\underline{v_i}, \underline{v_j}))_{i,\, j=1—n} \in M(n, \mathbb{K}).$$

Osservazione.
- $M_{\mathcal{B}}(\varphi)$ è simmetrica, infatti $\varphi(\underline{v_i}, \underline{v_j}) = \varphi(\underline{v_j}, \underline{v_i})$, dal momento che il prodotto scalare è simmetrico,
- $\varphi(\underline{v}, \underline{w}) = [\underline{v}]_{\mathcal{B}}^\top M_{\mathcal{B}}(\varphi)[\underline{w}]_{\mathcal{B}}$.

Teorema. (di cambiamento di base per matrici di prodotti scalari) Siano $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$ due basi ordinate di V. Allora, se φ è un prodotto scalare di V e $P = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}(\mathrm{Id}_V)$, vale la seguente identità:

$$\underbrace{M_{\mathcal{B}'}(\varphi)}_{A'} = P^\top \underbrace{M_{\mathcal{B}}}_{A} P.$$

Dimostrazione. Siano $\mathcal{B} = (\underline{v_1}, ..., \underline{v_n})$ e $\mathcal{B}' = (\underline{w}_1, ..., \underline{w}_n)$. Allora $A'_{ij} = \varphi(\underline{w}_i, \underline{w}_j) = [\underline{w}_i]_{\mathcal{B}}^\top A[\underline{w}_j]_{\mathcal{B}} = (P^i)^\top AP^j = P_i^\top(AP)^j = (P^\top AP)_{ij}$, da cui la tesi. □

Definizione. Si definisce **congruenza** la relazione di equivalenza $\cong$ (denotata anche come $\equiv$) definita nel seguente modo su $A, B \in M(n, \mathbb{K})$:

$$A \cong B \overset{\text{def}}{\iff} \exists\, P \in GL(n, \mathbb{K}) \mid A = P^\top AP.$$

Osservazione. Si può facilmente osservare che la congruenza è in effetti una relazione di equivalenza.

▶ $A = I^\top AI \implies A \cong A$ (riflessione),
▶ $A \cong B \implies A = P^\top BP \implies B = (P^\top)^{-1}AP^{-1} = (P^{-1})^\top AP^{-1} \implies B \cong A$ (simmetria),
▶ $A \cong B$, $B \cong C \implies A = P^\top BP$, $B = Q^\top CQ$, quindi $A = P^\top Q^\top CQP = (QP)^\top C(QP) \implies A \cong C$ (transitività).

Osservazione. Si osservano alcune proprietà della congruenza.

▶ Per il teorema di cambiamento di base del prodotto scalare, due matrici associate a uno stesso prodotto scalare sono sempre congruenti (esattamente come due matrici associate a uno stesso endomorfismo sono sempre simili).
▶ Se A e B sono congruenti, $A = P^\top BP \implies \mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(P^\top BP) = \mathrm{rg}(BP) = \mathrm{rg}(B)$, dal momento che P e $P^\top$ sono invertibili; quindi il rango è un invariante per congruenza. Allora si può ben definire il rango $\mathrm{rg}(\varphi)$ di un prodotto scalare come il rango della matrice associata di φ in una qualsiasi base di V.
▶ Se A e B sono congruenti, $A = P^\top BP \implies \det(A) = \det(P^\top BP) = \det(P^\top)\det(B)\det(P) = \det(P)^2\det(B)$. Quindi, per $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, il segno del determinante è un altro invariante per congruenza.

1.2.3 Studio del radicale $V^\perp$ attraverso $M_\mathcal{B}(\varphi)$

Definizione. Si definisce il **radicale** di un prodotto scalare φ come lo spazio:

$$V^\perp = \mathrm{Rad}(\varphi) = \{\underline{v} \in V \mid \varphi(\underline{v}, \underline{w}) = 0 \ \forall\, \underline{w} \in V\}$$

Osservazione. Il radicale del prodotto scalare canonico su $\mathbb{R}^n$ ha dimensione nulla, dal momento che $\forall\, \underline{v} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\underline{0}\}$, $q(\underline{v}) = \varphi(\underline{v}, \underline{v}) > 0 \implies \underline{v} \notin V^\perp$. In generale ogni prodotto scalare definito positivo (o negativo) è non degenere, dal momento che ogni vettore non nullo non è isotropo, e dunque non può appartenere a $V^\perp$.

Definizione. Un prodotto scalare si dice **degenere** se il radicale dello spazio su tale prodotto scalare ha dimensione non nulla.

Osservazione. Sia $\alpha_\varphi : V \to V^*$ la mappa[2] tale che $\alpha_\varphi(\underline{v}) = p$, dove $p(\underline{w}) = \varphi(\underline{v}, \underline{w})$ $\forall\, \underline{v}$, $\underline{w} \in V$.

Si osserva che α_φ è un'applicazione lineare. Infatti, $\forall\, \underline{v}$, $\underline{w}$, $\underline{u} \in V$, $\alpha_\varphi(\underline{v} + \underline{w})(\underline{u}) = \varphi(\underline{v}+\underline{w}, \underline{u}) = \varphi(\underline{v}, \underline{u}) + \varphi(\underline{w}, \underline{u}) = \alpha_\varphi(\underline{v})(\underline{u}) + \alpha_\varphi(\underline{w})(\underline{u}) \implies \alpha_\varphi(\underline{v}+\underline{w}) = \alpha_\varphi(\underline{v}) + \alpha_\varphi(\underline{w})$. Inoltre $\forall\, \underline{v}$, $\underline{w} \in V$, $\lambda \in \mathbb{K}$, $\alpha_\varphi(\lambda\underline{v})(\underline{w}) = \varphi(\lambda\underline{v}, \underline{w}) = \lambda\varphi(\underline{v}, \underline{w}) = \lambda\alpha_\varphi(\underline{v})(\underline{w}) \implies \alpha_\varphi(\lambda\underline{v}) = \lambda\alpha_\varphi(\underline{v})$.

[2] In letteratura questa mappa, se invertibile, è nota come *isomorfismo musicale*, ed è in realtà indicata come $\flat$.

Si osserva inoltre che $\operatorname{Ker} \alpha_\varphi$ raccoglie tutti i vettori $\underline{v} \in V$ tali che $\varphi(\underline{v}, \underline{w}) = 0 \; \forall \, \underline{w} \in W$, ossia esattamente i vettori di $V^\perp$, per cui si conclude che $V^\perp = \operatorname{Ker} \alpha_\varphi$ (per cui $V^\perp$ è effettivamente uno spazio vettoriale). Se V ha dimensione finita, $\dim V = \dim V^*$, e si può allora concludere che $\dim V^\perp > 0 \iff \operatorname{Ker} \alpha_\varphi \neq \{\underline{0}\} \iff \alpha_\varphi$ non è invertibile (infatti lo spazio di partenza e di arrivo di α_φ hanno la stessa dimensione). In particolare, α_φ non è invertibile se e solo se $\det(\alpha_\varphi) = 0$.

Sia $\mathcal{B} = (\underline{v_1}, ..., \underline{v_n})$ una base ordinata di V. Si consideri allora la base ordinata del duale costruita su $\mathcal{B}$, ossia $\mathcal{B}^* = (\underline{v_1^*}, ..., \underline{v_n^*})$. Allora $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}^*}(\alpha_\varphi)^i = [\alpha_\varphi(\underline{v_i})]_{\mathcal{B}^*} = \begin{pmatrix} \varphi(\underline{v_i}, \underline{v_1}) \\ \vdots \\ \varphi(\underline{v_i}, \underline{v_n}) \end{pmatrix} \underbrace{=}_{\varphi \text{ è simmetrica}} \begin{pmatrix} \varphi(\underline{v_1}, \underline{v_i}) \\ \vdots \\ \varphi(\underline{v_n}, \underline{v_i}) \end{pmatrix} = M_{\mathcal{B}}(\varphi)^i$. Quindi $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}^*}(\alpha_\varphi) = M_{\mathcal{B}}(\varphi)$.

Si conclude allora che φ è degenere se e solo se $\det(M_{\mathcal{B}}(\varphi)) = 0$ e che $V^\perp \cong \operatorname{Ker} M_{\mathcal{B}}(\varphi)$ mediante l'isomorfismo del passaggio alle coordinate.

1.2.4 Condizioni per la (semi)definitezza di un prodotto scalare

Proposizione. Sia $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Allora φ è definito $\iff \operatorname{CI}(\varphi) = \{\underline{0}\}$.

Dimostrazione. Si dimostrano le due implicazioni separatamente.

($\implies$) Se φ è definito, allora $\varphi(\underline{v}, \underline{v})$ è sicuramente diverso da zero se $\underline{v} \neq \underline{0}$. Pertanto $\operatorname{CI}(\varphi) = \{\underline{0}\}$.

($\impliedby$) Sia φ non definito. Se non esistono $\underline{v} \neq \underline{0}$, $\underline{w} \neq \underline{0} \in V$ tali che $q(\underline{v}) > 0$ e che $q(\underline{w}) < 0$, allora φ è necessariamente semidefinito. In tal caso, poiché φ non è definito, deve anche esistere $\underline{u} \in V$, $\underline{u} \neq \underline{0} \mid q(\underline{u}) = 0 \implies \operatorname{CI}(\varphi) \neq \{\underline{0}\}$.

Se invece tali $\underline{v}$, $\underline{w}$ esistono, questi sono anche linearmente indipendenti. Se infatti non lo fossero, uno sarebbe il multiplo dell'altro, e quindi le loro due forme quadratiche sarebbero concordi di segno, $\lightning$. Si consideri allora la combinazione lineare $\underline{v} + \lambda \underline{w}$ al variare di $\lambda \in \mathbb{R}$, imponendo che essa sia isotropa:

$$q(\underline{v} + \lambda \underline{w}) = 0 \iff \lambda^2 q(\underline{w}) + 2\lambda q(\underline{v}, \underline{w}) + q(\underline{v}) = 0.$$

Dal momento che $\frac{\Delta}{4} = \overbrace{q(\underline{v}, \underline{w})^2}^{\geq 0} - \overbrace{q(\underline{w}) q(\underline{v})}^{>0}$ è sicuramente maggiore di zero, tale equazione ammette due soluzioni reali λ_1, λ_2. In particolare λ_1 è tale che $\underline{v} + \lambda_1 \underline{w} \neq \underline{0}$, dal momento che $\underline{v}$ e $\underline{w}$ sono linearmente indipendenti. Allora $\underline{v} + \lambda_1 \underline{w}$ è un vettore isotropo non nullo di $V \implies \operatorname{CI}(\varphi) \neq \{\underline{0}\}$.

Si conclude allora, tramite la contronominale, che se $\operatorname{CI}(\varphi) = \{\underline{0}\}$, φ è necessariamente definito. $\square$

Proposizione. Sia $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Allora φ è semidefinito $\iff$ $\mathrm{CI}(\varphi) = V^\perp$.

Dimostrazione. Si dimostrano le due implicazioni separatamente.

($\Longrightarrow$) Sia φ semidefinito. Chiaramente $V^\perp \subseteq \mathrm{CI}(\varphi)$. Si assuma che $V^\perp \subsetneq \mathrm{CI}(\varphi)$. Sia allora $\underline{v}$ tale che $\underline{v} \in \mathrm{CI}(\varphi)$ e che $\underline{v} \notin V^\perp$. Poiché $\underline{v} \notin V^\perp$, esiste un vettore $\underline{w} \in V$ tale che $\varphi(\underline{v}, \underline{w}) \neq 0$. Si osserva che $\underline{v}$ e $\underline{w}$ sono linearmente indipendenti tra loro. Se infatti non lo fossero, esisterebbe $\mu \in \mathbb{R}$ tale che $\underline{w} = \mu\underline{v} \implies \varphi(\underline{v}, \underline{w}) = \mu\, \varphi(\underline{v}, \underline{v}) = 0$, $\lightning$.

Si consideri allora la combinazione lineare $\underline{v} + \lambda\underline{w}$. Si consideri φ semidefinito positivo. In tal caso si può imporre che la valutazione di q in $\underline{v} + \lambda\underline{w}$ sia strettamente negativa:

$$q(\underline{v} + \lambda\underline{w}) < 0 \iff \overbrace{q(\underline{v})}^{=0} + \lambda^2 q(\underline{w}) + 2\lambda\, \varphi(\underline{v}, \underline{w}) < 0.$$

In particolare, dal momento che $\frac{\Delta}{4} = \varphi(\underline{v}, \underline{w})^2 > 0$, tale disequazione ammette una soluzione $\lambda_1 \neq 0$. Inoltre $\underline{v} + \lambda_1\underline{w} \neq \underline{0}$, dal momento che $\underline{v}$ e $\underline{w}$ sono linearmente indipendenti. Allora si è trovato un vettore non nullo per cui la valutazione in esso di q è negativa, contraddicendo l'ipotesi di semidefinitezza positiva di φ, $\lightning$. Analogamente si dimostra la tesi per φ semidefinito negativo.

($\Longleftarrow$) Sia φ non semidefinito. Allora devono esistere $\underline{v}$, $\underline{w} \in V$ tali che $q(\underline{v}) > 0$ e che $q(\underline{w}) < 0$. In particolare, $\underline{v}$ e $\underline{w}$ sono linearmente indipendenti tra loro, dal momento che se non lo fossero, uno sarebbe multiplo dell'altro, e le valutazioni in essi di q sarebbero concordi di segno, $\lightning$. Si consideri allora la combinazione lineare $\underline{v} + \lambda\underline{w}$, imponendo che q si annulli in essa:

$$q(\underline{v} + \lambda\underline{w}) = 0 \iff \lambda^2 q(\underline{w}) + 2\lambda q(\underline{v}, \underline{w}) + q(\underline{v}) = 0.$$

In particolare, dal momento che $\frac{\Delta}{4} = \varphi(\underline{v}, \underline{w})^2 > 0$, tale disequazione ammette una soluzione $\lambda_1 \neq 0$. Allora, per tale λ_1, $\underline{v} + \lambda_1\underline{w} \in \mathrm{CI}(\varphi)$. Tuttavia $\varphi(\underline{v} + \lambda_1\underline{w}, \underline{v} - \lambda_1\underline{w}) = q(\underline{v}) - \underbrace{\lambda_1^2 q(\underline{w})}_{<0} > 0 \implies \underline{v} + \lambda_1\underline{w} \notin V^\perp \implies \mathrm{CI}(\varphi) \supsetneq V^\perp$.

Si conclude allora, tramite la churnonominale, che se $\mathrm{CI}(\varphi) = V^\perp$, φ è necessariamente semidefinito. ☐

1.3 Formula delle dimensioni e di polarizzazione rispetto a φ

Definizione (sottospazio ortogonale a W)**.** Sia $W \subseteq V$ un sottospazio di V. Si identifica allora come **sottospazio ortogonale a** W il sottospazio $W^\perp = \{\underline{v} \in V \mid \varphi(\underline{v}, \underline{w})\ \forall\, \underline{w} \in W\}$.

Proposizione (formula delle dimensioni del prodotto scalare)**.** Sia $W \subseteq V$ un sottospazio di V. Allora vale la seguente identità:

$$\dim W + \dim W^\perp = \dim V + \dim(W \cap V^\perp).$$

Dimostrazione. Si consideri l'applicazione lineare a_φ introdotta precedentemente. Si osserva che $W^\perp = \operatorname{Ker}(i^\top \circ a_\varphi)$, dove $i : W \to V$ è tale che $i(\underline{w}) = \underline{w}$. Allora, per la formula delle dimensioni, vale la seguente identità:

$$\dim V = \dim W^\perp + \operatorname{rg}(i^\top \circ a_\varphi). \tag{1.1}$$

Sia allora $f = i^\top \circ a_\varphi$. Si consideri ora l'applicazione $g = a_\varphi \circ i : W \to V^*$. Sia ora $\mathcal{B}_W$ una base di W e $\mathcal{B}_V$ una base di V. Allora le matrici associate di f e di g sono le seguenti:

(i) $M^{\mathcal{B}_V}_{\mathcal{B}^*_W}(f) = M^{\mathcal{B}_V}_{\mathcal{B}^*_W}(i^\top \circ a_\varphi) = \underbrace{M^{\mathcal{B}^*_V}_{\mathcal{B}^*_W}(i^\top)}_{A}\underbrace{M^{\mathcal{B}_V}_{\mathcal{B}^*_V}(a_\varphi)}_{B} = AB,$

(ii) $M^{\mathcal{B}_W}_{\mathcal{B}^*_V}(g) = M^{\mathcal{B}_W}_{\mathcal{B}^*_V}(a_\varphi \circ i) = \underbrace{M^{\mathcal{B}_V}_{\mathcal{B}^*_V}(a_\varphi)}_{B}\underbrace{M^{\mathcal{B}_W}_{\mathcal{B}_V}(i)}_{A^\top} = BA^\top \overbrace{=}^{B^\top = B} (AB)^\top.$

Poiché $\operatorname{rg}(A) = \operatorname{rg}(A^\top)$, si deduce che $\operatorname{rg}(f) = \operatorname{rg}(g) \implies \operatorname{rg}(i^\top \circ a_\varphi) = \operatorname{rg}(a_\varphi \circ i) = \operatorname{rg}(a_\varphi|_W) = \dim W - \dim \operatorname{Ker} a_\varphi|_W$, ossia che:

$$\operatorname{rg}(i^\top \circ a_\varphi) = \dim W - \dim(W \cap \underbrace{\operatorname{Ker} a_\varphi}_{V^\perp}) = \dim W - \dim(W \cap V^\perp). \tag{1.2}$$

Si conclude allora, sostituendo l'equazione (1.2) nell'equazione (1.1), che $\dim V = \dim W^\top + \dim W - \dim(W \cap V^\perp)$, ossia la tesi. □

Osservazione. Si identifica $\underline{w}^\perp$ come il sottospazio di tutti i vettori di V ortogonali a $\underline{w}$. In particolare, se $W = \operatorname{Span}(\underline{w})$ è il sottospazio generato da $\underline{w} \neq \underline{0}$, $\underline{w} \in V$, allora $W^\perp = \underline{w}^\perp$. Inoltre valgono le seguenti equivalenze: $\underline{w} \notin W^\perp \iff \operatorname{Rad}(\varphi|_W) = W \cap W^\perp = \{\underline{0}\} \iff \underline{w}$ non è isotropo $\iff V = W \oplus W^\perp$.

Proposizione (formula di polarizzazione)**.** Se $\operatorname{char} \mathbb{K} \neq 2$, un prodotto scalare è univocamente determinato dalla sua forma quadratica q. In particolare vale la seguente identità:

$$\varphi(\underline{v}, \underline{w}) = \frac{q(\underline{v} + \underline{w}) - q(\underline{v}) - q(\underline{w})}{2}.$$

1.4 Il teorema di Lagrange e basi ortogonali

Definizione. Si definisce **base ortogonale** di V una base $\underline{v_1}$, ..., $\underline{v_n}$ tale per cui $\varphi(\underline{v_i}, \underline{v_j}) = 0 \iff i \neq j$, ossia una base per cui la matrice associata del prodotto scalare è diagonale.

Teorema (di Lagrange)**.** Ogni spazio vettoriale V su $\mathbb{K}$ tale per cui $\operatorname{char} \mathbb{K} \neq 2$ ammette una base ortogonale.

Dimostrazione. Si dimostra il teorema per induzione su $n := \dim V$. Per $n \leq 1$, la tesi è triviale (se esiste una base, tale base è già ortogonale). Sia allora il teorema vero per $i \leq n$. Se V ammette un vettore non isotropo $\underline{w}$, sia $W = \operatorname{Span}(\underline{w})$ e si consideri la decomposizione $V = W \oplus W^\perp$. Poiché $W^\perp$ ha dimensione $n-1$, per ipotesi induttiva ammette una base ortogonale. Inoltre, tale base è anche ortogonale a W, e quindi l'aggiunta di $\underline{w}$ a questa base ne fa una base ortogonale di V. Se invece V non ammette vettori non isotropi, ogni forma quadratica è nulla, e quindi il prodotto scalare è nullo per la proposizione precedente. Allora in questo caso ogni base è una base ortogonale, completando il passo induttivo, e dunque la dimostrazione. $\square$

1.4.1 L'algoritmo di ortogonalizzazione di Gram-Schmidt

Definizione (coefficiente di Fourier)**.** Siano $\underline{v} \in V$ e $\underline{w} \in V \setminus \operatorname{CI}(\varphi)$. Allora si definisce il **coefficiente di Fourier** di $\underline{v}$ rispetto a $\underline{w}$ come il rapporto $C(\underline{w}, \underline{v}) = \frac{\varphi(\underline{v},\underline{w})}{\varphi(\underline{w},\underline{w})}$.

Se $\operatorname{CI}(\varphi) = \{\underline{0}\}$ (e quindi nel caso di $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, dalla *Proposizione 1.2.4*, se φ è definito) ed è data una base $\mathcal{B} = \{\underline{v_1}, \ldots, \underline{v_n}\}$ per V, è possibile applicare l'**algoritmo di ortogonalizzazione di Gram-Schmidt** per ottenere da $\mathcal{B}$ una nuova base $\mathcal{B}' = \{\underline{v_1}', \ldots, \underline{v_n}'\}$ con le seguenti proprietà:

(i) $\mathcal{B}'$ è una base ortogonale,

(ii) $\mathcal{B}'$ mantiene la stessa bandiera di $\mathcal{B}$ (ossia $\operatorname{Span}(\underline{v_1}, \ldots, \underline{v_i}) = \operatorname{Span}(\underline{v_1}', \ldots, \underline{v_i}')$ per ogni $1 \leq i \leq n$).

L'algoritmo si applica nel seguente modo: si prenda in considerazione $\underline{v_1}$ e si sottragga ad ogni altro vettore della base il vettore $C(\underline{v_1}, \underline{v_i})\underline{v_1} = \frac{\varphi(\underline{v_1},\underline{v_i})}{\varphi(\underline{v_1},\underline{v_1})}\underline{v_1}$, rendendo ortogonale ogni altro vettore della base con $\underline{v_1}$. Si sta quindi applicando la mappa $\underline{v_i} \mapsto \underline{v_i} - \frac{\varphi(\underline{v_1},\underline{v_i})}{\varphi(\underline{v_1},\underline{v_1})}\underline{v_i} = \underline{v_i}^{(1)}$. Si verifica infatti che $\underline{v_1}$ e $\underline{v_i}^{(1)}$ sono ortogonali per $2 \leq i \leq n$:

$$\varphi(\underline{v_1}, \underline{v_i}^{(1)}) = \varphi(\underline{v_1}, \underline{v_i}) - \varphi\left(\underline{v_1}, \frac{\varphi(\underline{v_1}, \underline{v_i})}{\varphi(\underline{v_1}, \underline{v_1})}\underline{v_i}\right) = \varphi(\underline{v_1}, \underline{v_i}) - \varphi(\underline{v_1}, \underline{v_i}) = 0.$$

Poiché $\underline{v_1}$ non è isotropo, si deduce che vale la decomposizione $V = \operatorname{Span}(\underline{v_1}) \oplus \operatorname{Span}(\underline{v_1})^\perp$. In particolare $\dim \operatorname{Span}(\underline{v_1})^\perp = n-1$: essendo allora i vettori $\underline{v_2}^{(1)}, \ldots, \underline{v_n}^{(1)}$ linearmente indipendenti e appartenenti a $\operatorname{Span}(\underline{v_1})^\perp$, ne sono una base. Si conclude quindi che vale la seguente decomposizione:

$$V = \mathrm{Span}(\underline{v_1}) \oplus^{\perp} \mathrm{Span}(\underline{v_2}^{(1)}, \ldots, \underline{v_n}^{(1)}).$$

Si riapplica dunque l'algoritmo di Gram-Schmidt prendendo come spazio vettoriale lo spazio generato dai vettori a cui si è applicato precedentemente l'algoritmo, ossia $V' = \mathrm{Span}(\underline{v_2}^{(1)}, \ldots, \underline{v_n}^{(1)})$, fino a che non si ottiene $V' = \{\underline{0}\}$.