

# Note del corso di Geometria 1

Gabriel Antonio Videtta

28 aprile 2023

## Indipendenza e applicazioni affini

**Nota.** Qualora non specificato diversamente, si intenderà per  $E$  uno spazio affine sullo spazio vettoriale  $V$  e per  $E'$  uno spazio affine sullo spazio vettoriale  $V'$ , dove sia  $V$  che  $V'$  sono costruiti sul campo  $\mathbb{K}$ .

Fissato un origine  $O$  dello spazio affine, si possono sempre considerare due bigezioni:

- La bigezione  $i_O : E \rightarrow V$  tale che  $i(P) = P - O \in V$ ,
- La bigezione  $j_O : V \rightarrow E$  tale che  $j(\underline{v}) = O + \underline{v} \in E$ .

Si osserva inoltre che  $i_O$  e  $j_O$  sono l'una la funzione inversa dell'altra. Dato uno spazio vettoriale  $V$  su  $\mathbb{K}$  di dimensione  $n$ , si può considerare  $V$  stesso come uno spazio affine, denotato con le usuali operazioni:

- (a)  $\underline{v} + \underline{w}$ , dove  $\underline{v} \in V$  è inteso come *punto* di  $V$  e  $\underline{w} \in W$  come il vettore che viene applicato su  $\underline{w}$ , coincide con la somma tra  $\underline{v}$  e  $\underline{w}$  (e analogamente  $\underline{w} - \underline{v}$  è esattamente  $\underline{w} - \underline{v}$ ).
- (b) Le bigezioni considerate inizialmente sono in particolare due mappe tali che  $i_{\underline{v}_0}(\underline{v}) = \underline{v} - \underline{v}_0$  e che  $j_{\underline{v}_0}(\underline{v}) = \underline{v}_0 + \underline{v}$ .

**Definizione** (spazio affine standard). Si denota con  $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$  lo **spazio affine standard** costruito sullo spazio vettoriale  $\mathbb{K}^n$ . Analogamente si indica con  $A_V$  lo spazio affine costruito su uno spazio vettoriale  $V$ .

### Osservazione.

► Una combinazione affine di  $A_V$  è in particolare una combinazione lineare di  $V$ . Infatti, se  $\underline{v} = \sum_{i=1}^n \lambda_i \underline{v}_i$  con  $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$ , allora, fissato  $\underline{v}_0 \in V$ ,  $\underline{v} = \underline{v}_0 + \sum_{i=1}^n \lambda_i (\underline{v}_i - \underline{v}_0) = \underline{v}_0 + \sum_{i=1}^n \lambda_i \underline{v}_i - \underline{v}_0 = \sum_{i=1}^n \lambda_i \underline{v}_i$ .

► Come vi è una bigezione data dal passaggio alle coordinate da  $V$  a  $\mathbb{K}^n$ , scelta una base  $\mathcal{B}$  di  $V$  e un punto  $O$  di  $E$ , vi è anche una bigezione  $\varphi_{O,\mathcal{B}}$  da  $E$  a  $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$  data dalla seguente costruzione:

$$\varphi_{O,\mathcal{B}}(P) = [P - O]_{\mathcal{B}}.$$

**Proposizione.** Sia  $D \subseteq E$ . Allora  $D$  è un sottospazio affine di  $E \iff$  fissato  $P_0 \in D$ , l'insieme  $D_0 = \{P - P_0 \mid P \in D\} \subseteq V$  è un sottospazio vettoriale di  $V$ .

*Dimostrazione.* Si dimostrano le due implicazioni separatamente.

( $\implies$ ) Siano  $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_k \in D_0$ . Allora, per definizione, esistono  $P_1, \dots, P_k \in D$  tali che  $\underline{v}_i = P_i - P_0 \forall 1 \leq i \leq k$ . Siano  $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{K}$ . Sia inoltre  $P = P_0 + \sum_{i=1}^k \lambda_i \underline{v}_i \in E$ . Sia infine  $O \in D$ . Allora  $P = O + (P_0 - O) + \sum_{i=1}^k \lambda_i \underline{v}_i = O + (P_0 - O) + \sum_{i=1}^k \lambda_i (P_i - O + O - P_0) = O + (P_0 - O) + \sum_{i=1}^k \lambda_i (P_i - O) - \sum_{i=1}^k \lambda_i (P_0 - O) = O + (1 - \sum_{i=1}^k \lambda_i)(P_0 - O) + \sum_{i=1}^k \lambda_i (P_i - O)$ . In particolare  $P$  è una combinazione affine di  $P_1, \dots, P_k \in D$ , e quindi, per ipotesi, appartiene a  $D$ . Allora  $P - P_0 = \sum_{i=1}^k \lambda_i \underline{v}_i \in D_0$ . Poiché allora  $D_0$  è chiuso per combinazioni lineari,  $D_0$  è un sottospazio vettoriale di  $V$ .

( $\impliedby$ ) Sia  $P = \sum_{i=1}^k \lambda_i P_i$  con  $\sum_{i=1}^k \lambda_i = 1$ , con  $P_1, \dots, P_k \in D$  e  $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{K}$ . Allora  $P - P_0 = \sum_{i=1}^k \lambda_i (P_i - P_0) \in D_0$  per ipotesi, essendo combinazione lineare di elementi di  $D_0$ . Pertanto, poiché esiste un solo punto  $P'$  tale che  $P' = P_0 + \sum_{i=1}^k \lambda_i (P_i - P_0)$ , affinché  $\sum_{i=1}^k \lambda_i (P_i - P_0)$  appartenga a  $D_0$ , deve valere anche che  $P \in D$ . Si conclude quindi che  $D$  è un sottospazio affine, essendo chiuso per combinazioni affini.  $\square$

**Osservazione.** Sia  $D$  un sottospazio affine di  $E$ .

► Vale la seguente identità  $D_0 = \{P - Q \mid P, Q \in D\}$ . Sia infatti  $A = \{P - Q \mid P, Q \in D\}$ . Chiaramente  $D_0 \subseteq A$ . Inoltre, se  $P - Q \in A$ ,  $P - Q = (P - P_0) - (Q - P_0)$ . Pertanto, essendo  $P - Q$  combinazione lineare di elementi di  $D_0$ , ed essendo  $D_0$  spazio vettoriale per la proposizione precedente,  $P - Q \in D_0 \implies A \subseteq D_0$ , da cui si conclude che  $D_0 = A$ .

► Pertanto  $D_0$  è unico, a prescindere dalla scelta di  $P_0 \in D$ .

► Vale che  $D = P_0 + D_0$ , ossia  $D$  è il traslato di  $D_0$  mediante il punto  $P_0$ .

**Definizione** (direzione di un sottospazio affine). Si definisce  $D_0 = \text{Giac}(D) = \{P - Q \mid P, Q \in D\} \subseteq V$  come la **direzione** (o *giacitura*) del sottospazio affine  $D$ .

**Definizione** (dimensione un sottospazio affine). Dato  $D$  sottospazio affine di  $E$ , si dice dimensione di  $D$ , indicata con  $\dim D$ , la dimensione della sua direzione  $D_0$ , ossia  $\dim D_0$ . In particolare  $\dim E = \dim V$ .

**Definizione** (sottospazi affini paralleli). Due sottospazi affini si dicono **paralleli** se condividono la stessa direzione.

**Osservazione.**

- ▶ I sottospazi affini di dimensione zero sono tutti i punti di  $E$ .
- ▶ I sottospazi affini di dimensione uno sono le *rette affini*, mentre quelli di dimensione due sono i *piani affini*.
- ▶ Si dice *iperpiano affine* un sottospazio affine di codimensione 1, ossia di dimensione  $n - 1$ .
- ▶ Due sottospazi affini sono paralleli se e solo se uno può essere ottenuto mediante una traslazione dell'altro sottospazio.
- ▶ Se  $D = \text{Aff}(P_1, \dots, P_k)$  con  $P_1, \dots, P_k \in E$ , i vettori  $P_2 - P_1, \dots, P_k - P_1$  generano  $D_0$ . Infatti, se  $P - P_1 \in D_0$ , con  $P \in D$ , esistono  $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{K}$  con  $\sum_{i=1}^k \lambda_i = 1$  tali che  $P = \sum_{i=1}^k \lambda_i P_i$ . Allora  $P - P_1 = \sum_{i=1}^k \lambda_i (P_i - P_1)$ , da cui si deduce che tali vettori generano  $D_0$ .

**Definizione** (punti affinementemente indipendenti). Un insieme di punti  $P_1, \dots, P_k$  di  $E$  si dice **affinementemente indipendente** se ogni combinazione affine di tali punti è unica. Analogamente un sottoinsieme  $S \subseteq E$  si dice affinementemente indipendente se ogni suo sottoinsieme finito lo è.

**Proposizione.** Dati i punti  $P_1, \dots, P_k \in E$ , sono equivalenti le seguenti affermazioni.

- (i)  $P_1, \dots, P_k$  sono affinementemente indipendenti,
- (ii)  $\forall i \in \mathbb{N}^+ \mid 1 \leq i \leq k, P_i \notin \text{Aff}(P_1, \dots, P_k)$ , con  $P_i$  escluso,
- (iii)  $\forall i \in \mathbb{N}^+ \mid 1 \leq i \leq k$  l'insieme di vettori  $\{P_j - P_i \mid 1 \leq j \leq k, j \neq i\}$  è linearmente indipendente,
- (iv)  $\exists i \in \mathbb{N}^+ \mid 1 \leq i \leq k$  per il quale l'insieme di vettori  $\{P_j - P_i \mid 1 \leq j \leq k, j \neq i\}$  è linearmente indipendente.

*Dimostrazione.* Siano  $P_1, \dots, P_k$  affinementemente indipendenti. Sia  $i \in \mathbb{N}^+ \mid 1 \leq i \leq k$ . Allora chiaramente (i)  $\iff$  (ii), dacché se  $P_i$  appartenesse a  $\text{Aff}(P_1, \dots, P_k)$ , con  $P_i$  escluso, si violerebbe l'unicità della combinazione affine di  $P_i$ , e analogamente se esistessero due combinazioni affini in diversi scalari dello stesso punto si potrebbe un punto  $P_j$  con  $1 \leq j \leq k$  come

combinazione affine degli altri punti.

Siano allora  $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{K}$ , con  $\lambda_i$  escluso, tali che:

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \lambda_j (P_j - P_i) = \underline{0}.$$

Allora si può riscrivere  $P_i$  nel seguente modo:

$$P_i = \left( 1 - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \lambda_j \right) P_i + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \lambda_j P_j.$$

Dal momento che la scrittura di  $P_i$  è unica per ipotesi,  $\lambda_j = 0 \forall 1 \leq j \leq k$  con  $j \neq i$ , e dunque l'insieme di vettori  $\{P_j - P_i \mid 1 \leq j \leq k, j \neq i\}$  è linearmente indipendente, per cui (ii)  $\implies$  (iii). Analogamente si deduce anche che (iii)  $\implies$  (i) e che (iii)  $\implies$  (iv). Pertanto (i)  $\iff$  (ii)  $\iff$  (iii).

Si assuma ora l'ipotesi (iv) e sia  $t \in \mathbb{N}^+ \mid 1 \leq t \leq k$  tale che  $t \neq i$ . Siano dunque  $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ , con  $\lambda_t$  escluso, tale che:

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq t}}^k \lambda_j (P_j - P_t) = \underline{0}.$$

Allora si può riscrivere la somma come:

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq t}}^k \lambda_j (P_j - P_i) - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq t}}^k \lambda_j (P_t - P_i) = \underline{0},$$

ossia come combinazione lineare dei vettori della forma  $P_j - P_i$ . Allora, poiché per ipotesi tali vettori sono linearmente indipendenti, vale che:

$$\begin{cases} \lambda_j = 0 & \text{se } j \neq t \text{ e } j \neq i, \\ \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq t}}^k \lambda_j = 0 & \implies \lambda_i = 0. \end{cases}$$

Pertanto l'insieme di vettori  $\{P_j - P_t \mid 1 \leq j \leq k, j \neq t\}$  è linearmente indipendente, da cui vale che (iv)  $\implies$  (iii). Si conclude dunque che (i)  $\iff$  (ii)  $\iff$  (iii)  $\iff$  (iv), ossia la tesi.  $\square$

**Osservazione.**

► Si osserva che il numero massimo di punti affinemente indipendenti di un sottospazio affine  $D$  di dimensione  $k$  è  $k + 1$ , dacché, fissato un punto, vi possono essere al più  $k$  vettori linearmente indipendenti.

► Un punto di  $E$  è sempre affinemente indipendente, dacché la sua unica combinazione affine è sé stesso.

► Due punti di  $E$  sono affinemente indipendenti se e solo se il vettore che li congiunge è non nullo.

► Se  $P_1, \dots, P_k$  sono punti affinemente indipendenti, allora  $\dim \text{Aff}(P_1, \dots, P_k) = k - 1$ . Infatti esistono almeno  $k - 1$  vettori linearmente indipendenti nella direzione di questo sottospazio affine, ed esattamente  $k - 1$  vettori generano tale direzione.

**Definizione** (riferimento affine). Sia  $D \subseteq E$  un sottospazio affine di  $E$  di dimensione  $k - 1$ . Siano i punti  $P_1, \dots, P_k$  dei punti affinemente indipendenti. Allora si dice che tali punti formano un **riferimento affine** di  $D$ .

**Definizione** (coordinate affini). Sia  $D \subseteq E$  un sottospazio affine di  $E$  di dimensione  $k - 1$  e siano i punti  $P_1, \dots, P_k$  un riferimento affine  $R$  di  $D$ . Allora, se  $P = \lambda_1 P_1 + \dots + \lambda_k P_k \in D$  con  $\lambda_1 + \dots + \lambda_k = 1$ , si dice che le **coordinate affini** di  $P$  sono rappresentate dal punto  $[P]_{\mathcal{B}}$ , dove:

$$[P]_R = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_k \end{pmatrix} \in \mathcal{A}_n(\mathbb{K}).$$

**Osservazione.**

► Esiste sempre un riferimento affine di un sottospazio affine  $D$  di  $E$ . Infatti, dato un punto  $P_1$  di  $E$ , e una base  $\mathcal{B} = \{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_k\}$  della direzione  $D_0$ , i punti  $P_1, P_1 + \underline{v}_1, \dots, P_1 + \underline{v}_k$  formano un riferimento affine.

► Dalla definizione sopra si deduce che, scelto un riferimento affine  $R$ , esiste una mappa iniettiva  $[\cdot]_R : D \rightarrow \mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ , dove l'immagine di  $P$  mediante  $[\cdot]_R$  è esattamente il vettore contenente le coordinate affini di  $P$ .

**Proposizione.** Sia  $E = \mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ . Allora i punti  $P_1, \dots, P_k$  sono affinemente indipendenti se e solo se i vettori  $\hat{P}_1 = \begin{pmatrix} P_1 \\ 1 \end{pmatrix}, \dots, \hat{P}_k = \begin{pmatrix} P_k \\ 1 \end{pmatrix}$  sono linearmente indipendenti.

*Dimostrazione.* Si dimostrano le due implicazioni separatamente.

( $\implies$ ) Siano  $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{K}$  tali che  $\lambda_1 \hat{P}_1 + \dots + \lambda_k \hat{P}_k = \underline{0}$ . Allora  $\sum_{i=1}^k \lambda_i = 0$  e  $\lambda_1 P_1 + \dots + \lambda_k P_k = 0$ .

Pertanto, sapendo che  $\lambda_1 = -\lambda_2 - \dots - \lambda_k$ , vale la seguente identità:

$$\lambda_2(P_2 - P_1) + \dots + \lambda_k(P_k - P_1) = 0.$$

Poiché i punti  $P_1, \dots, P_k$  sono affinementemente indipendenti, per la proposizione precedente, allora i vettori  $P_2 - P_1, \dots, P_k - P_1$  sono linearmente indipendenti, per cui  $\lambda_2 = \dots = \lambda_k = 0$ . Pertanto anche  $\lambda_1 = 0$ , e quindi i vettori  $\hat{P}_1, \dots, \hat{P}_k$  sono linearmente indipendenti.

( $\impliedby$ ) Siano  $\lambda_2, \dots, \lambda_k \in \mathbb{K}$  tali che  $\lambda_2(P_2 - P_1) + \dots + \lambda_k(P_k - P_1) = 0$ . Sia allora  $\lambda_1 = -\lambda_2 - \dots - \lambda_k$ . Si osserva dunque che  $\lambda_1 + \dots + \lambda_k = 0$  e che  $\lambda_1 P_1 + \dots + \lambda_k P_k = 0$ , da cui si deduce che  $\lambda_1 \hat{P}_1 + \dots + \lambda_k \hat{P}_k = 0$ . Dal momento però che  $\hat{P}_1, \dots, \hat{P}_k$  sono linearmente indipendenti,  $\lambda_2 = \dots = \lambda_k = 0$ , da cui la tesi, per la proposizione precedente.  $\square$

**Definizione** (combinazione convessa). Si dice che una combinazione affine  $\sum_{i=1}^k \lambda_i P_i$  nei punti  $P_1, \dots, P_k$  con  $\sum_{i=1}^k \lambda_i = 1$  è una **combinazione convessa** se  $\lambda_i \geq 0 \forall 1 \leq i \leq k$ .

**Definizione** (baricentro). Si definisce **baricentro**  $G_S$  dei punti  $P_1, \dots, P_k$ , che compongono l'insieme  $S \subseteq E$ , la combinazione convessa  $\sum_{i=1}^k \frac{1}{k} P_i$ .

**Definizione** (inviluppo convesso). Si definisce l'**inviluppo complesso**  $\text{IC}(S)$  di un insieme  $S \subseteq E$  l'insieme delle combinazioni convesse finite di  $S$ .

**Osservazione.**

► L'insieme  $\text{IC}(S)$  è, effettivamente, un insieme convesso, se  $S \subseteq E$ . Se infatti  $P, Q \in \text{IC}(S)$ , allora  $\lambda_1 P + \lambda_2 Q \in \text{IC}(S)$ , con  $\lambda_1, \lambda_2 \geq 0$ , e quindi  $[P, Q] \subseteq \text{IC}(S)$ .

► Se  $E = \mathcal{A}_2(\mathbb{R})$ , e  $P_1, P_2, P_3$  sono tre punti di  $E$ , l'inviluppo convesso dei tre punti è esattamente il triangolo costruito sui tre punti. Analogamente, presi quattro punti di  $\mathcal{A}_3(\mathbb{R})$ , l'inviluppo convesso dei quattro punti è un tetraedro.

► Se  $A = B \sqcup C \subseteq E$  (ossia se  $A = B \cup C$  con  $B \cap C = \emptyset$ ), si osserva che  $G_A = \frac{|B|}{|A|} G_B + \frac{|C|}{|A|} G_C$ . Infatti, se  $B_1, \dots, B_{|B|}$  sono i punti di  $A$  appartenenti a  $B$  e  $C_1, \dots, C_{|C|}$  sono quelli appartenenti a  $C$ ,  $G_A = \sum_{i=1}^{|B|} \frac{1}{|A|} B_i + \sum_{i=1}^{|C|} \frac{1}{|A|} C_i = \frac{|B|}{|A|} \sum_{i=1}^{|B|} \frac{1}{|B|} B_i + \frac{|C|}{|A|} \sum_{i=1}^{|C|} \frac{1}{|C|} C_i = \frac{|B|}{|A|} G_B + \frac{|C|}{|A|} G_C$ .

► In  $\mathcal{A}_2(\mathbb{R})$ , il baricentro tra tre punti affinementemente indipendenti è esattamente il baricentro del loro involucro convesso, ossia del triangolo formato da questi punti. Infatti, se  $S = \{P_1, P_2, P_3\}$ ,  $G_S = \frac{1}{3}P_1 + \frac{1}{3}P_2 + \frac{1}{3}P_3$ . Inoltre, per l'osservazione precedente, si può scrivere il baricentro di questo triangolo come una combinazione convessa del punto medio di due punti e del terzo punto non considerato, ossia  $G_S = \frac{2}{3}(\frac{1}{2}P_i + \frac{1}{2}P_j) + \frac{1}{3}P_k$ . Pertanto il baricentro di un triangolo è l'intersezione di tutte e tre le mediane di tale triangolo. Se si dota il piano della misura euclidea si deduce anche che il segmento che congiunge il baricentro al punto medio è la metà del segmento che congiunge il baricentro al terzo punto.

**Definizione** (applicazione affine). Si definisce **applicazione affine** da  $E$  a  $E'$  un'applicazione  $\varphi : E \rightarrow E'$  che conservi le combinazioni affini, ossia tale che:

$$\varphi \left( \sum_{i=1}^k \lambda_i P_i \right) = \sum_{i=1}^k \lambda_i \varphi(P_i), \quad \text{se } \sum_{i=1}^k \lambda_i = 0.$$

**Osservazione.**

- Come per le applicazioni lineari, la somma e la composizione di più applicazioni affini è ancora una applicazione affine.
- Se si sceglie un riferimento affine di  $E$ ,  $\varphi$  è univocamente determinata da come agisce su tale riferimento.

**Teorema.** Sia  $\varphi : E \rightarrow E'$  un'applicazione affine. Allora esiste un'unica applicazione lineare  $g : V \rightarrow V'$  tale per cui  $\varphi(P) = \varphi(O) + g(P - O) \forall P \in E$ , invariante per la scelta di  $O \in E$ .

*Dimostrazione.* Sia  $O \in E$ . Si consideri l'applicazione  $g : V \rightarrow V'$  tale per cui  $g(\underline{v}) = \varphi(O + \underline{v}) - \varphi(O)$ . Si verifica che  $g$  è lineare:

- $g(\underline{v} + \underline{w}) = \varphi(O + \underline{v} + \underline{w}) - \varphi(O) = \varphi((O + \underline{v}) + (O + \underline{w}) - O) - \varphi(O) = \varphi(O + \underline{v}) - \varphi(O) + \varphi(O + \underline{w}) - \varphi(O) = g(\underline{v}) + g(\underline{w})$  (additività),
- $g(a\underline{v}) = \varphi(O + a\underline{v}) - \varphi(O) = \varphi(a(O + \underline{v}) + (1 - a)O) - \varphi(O) = a\varphi(O + \underline{v}) + (1 - a)\varphi(O) - \varphi(O) = ag(\underline{v})$  (omogeneità).

Inoltre,  $\varphi(P) = \varphi(O + P - O) = \varphi(O) + \varphi(P) - \varphi(O) = \varphi(O) + g(P - O)$ . Si osserva infine che  $g$  è unica per costruzione. Si verifica allora che scegliendo  $O' \in E$  al posto di  $O$ , la costruzione di  $g$  è invariante, ossia che  $\varphi(O' + \underline{v}) - \varphi(O') = \varphi(O + \underline{v}) - \varphi(O) \forall \underline{v} \in V$ . Infatti  $\varphi(O' + \underline{v}) - \varphi(O') = \varphi(O' - O + (O + \underline{v})) - \varphi(O') = \varphi(O') - \varphi(O) + \varphi(O + \underline{v}) - \varphi(O) = \varphi(O + \underline{v}) - \varphi(O)$ , da cui la tesi.  $\square$

**Osservazione.** Data un'applicazione lineare  $g$  da  $V$  in  $V'$  e dati  $O \in E$ ,  $O' \in E$ , si può sempre costruire un'applicazione affine  $\varphi$  tale che  $\varphi(P) = O' + g(P - O)$ . Infatti, se  $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$ ,  $\varphi(\sum_{i=1}^n \lambda_i P_i) = O' + g(\sum_{i=1}^n \lambda_i (P_i - O)) = O' + \sum_{i=1}^n \lambda_i g(P_i - O) = O' + \sum_{i=1}^n \lambda_i (\varphi(P_i) - O') = \sum_{i=1}^n \lambda_i \varphi(P_i)$ .

**Definizione** (applicazione lineare associata ad un'applicazione affine). Data un'applicazione affine  $\varphi : E \rightarrow E'$  e dato  $O \in E$ , si definisce  $g : V \rightarrow V'$  tale che  $g(\underline{v}) = \varphi(O + \underline{v}) - \varphi(O)$  come l'**applicazione lineare associata a  $\varphi$** .

**Osservazione.**

► Siano  $E = \mathcal{A}_n(\mathbb{K})$  ed  $E' = \mathcal{A}_m(\mathbb{K})$ . Allora, se  $\varphi$  è un'applicazione affine da  $E$  a  $E'$ ,  $\varphi(\underline{x}) = \varphi(\underline{0}) + g(\underline{x} - \underline{0}) = A\underline{x} + \underline{b} \forall \underline{x} \in E$ , dove  $A$  è la matrice associata di  $g$  nelle basi canoniche di  $\mathbb{K}^n$  e  $\mathbb{K}^m$  e  $\underline{b} = \varphi(\underline{0})$ .

► Sia  $E''$  un altro spazio affine costruito su un altro spazio vettoriale  $V''$ , sempre fondato sul campo  $\mathbb{K}$ . Se dunque  $g$  e  $g'$  sono le applicazioni lineari associate alle applicazioni affini  $\varphi : E \rightarrow E'$  e  $\varphi' : E' \rightarrow E''$ , allora  $g \circ g'$  è l'applicazione lineare associata a  $\varphi \circ \varphi'$  e  $\varphi + \varphi'$ . Infatti, se  $O \in E$ ,  $\varphi(\varphi'(P)) = \varphi(\varphi'(O) + g'(P - O)) = \varphi(\varphi'(O)) + g(g'(P - O))$ .

**Definizione** (affinità). Un'applicazione affine da  $E$  in  $E$  si dice **affinità** se è bigettiva.

**Osservazione.** Affinché un'applicazione affine sia un'affinità è necessario e sufficiente che la sua applicazione lineare sia invertibile. Infatti, se  $\varphi : E \rightarrow E$  è un'applicazione affine e l'applicazione lineare associata  $g : V \rightarrow V$  è invertibile, allora  $\varphi(P) = \varphi(Q) \implies \varphi(O) + g(P - O) = \varphi(O) + g(Q - O) \implies g(P - O) = g(Q - O) \implies P - O = Q - O \implies P = Q$  (iniettività), e  $\forall P \in E$ ,  $\varphi(O + g^{-1}(P - \varphi(O))) = \varphi(O) + g(g^{-1}(P - \varphi(O))) = P$  (surgettività). Analogamente si dimostra il viceversa.

**Osservazione.** Se  $\varphi : E \rightarrow E$  è un'affinità, anche il suo inverso  $\varphi^{-1}$  lo è. Dacché  $\varphi^{-1}$  è già bigettiva, è sufficiente mostra che è anche un'applicazione affine. Siano allora  $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{K}$  tali che  $\sum_{i=1}^k \lambda_i = 1$ . Siano inoltre  $P_1, \dots, P_k$  punti di  $E$ . Allora, poiché  $\varphi$  è un'affinità, esistono  $Q_1 = \varphi^{-1}(P_1), \dots, Q_k = \varphi^{-1}(P_k) \in E$  tali che  $\varphi\left(\sum_{i=1}^k \lambda_i Q_i\right) = \sum_{i=1}^k \lambda_i P_i$ . Allora  $\varphi^{-1}\left(\sum_{i=1}^k \lambda_i P_i\right) = \varphi^{-1}\left(\varphi\left(\sum_{i=1}^k \lambda_i Q_i\right)\right) = \sum_{i=1}^k \lambda_i \varphi^{-1}(P_i)$ .

In particolare, se  $g \in \text{End}(V)$  è l'applicazione lineare associata a  $\varphi$ ,  $g^{-1}$  è l'applicazione lineare associata a  $\varphi^{-1}$ . Sia infatti  $f \in \text{End}(V)$  è l'applicazione lineare associata a  $\varphi^{-1}$ . Dal momento che  $\varphi^{-1}(\varphi(O + \underline{v})) = O + \underline{v}$  e che



$\varphi^{-1}(\varphi(O + \underline{v})) = \varphi^{-1}(\varphi(O) + g(\underline{v})) = \varphi^{-1}(\varphi(O)) + f(g(\underline{v})) = O + f(g(\underline{v}))$ ,  
 deve valere infatti che  $f(g(\underline{v})) = \underline{v} \forall \underline{v} \in V$ , ossia  $f \circ g = \text{Id}_V \implies f = g^{-1}$ .

**Definizione** (gruppo delle affinità di uno spazio affine). Si indica con  $A(E)$  il gruppo, mediante l'operazione di composizione, delle affinità di  $E$ .

**Osservazione.**

► Un esempio notevole di affinità è la **traslazione**  $\tau_{\underline{v}} : E \rightarrow E$  tale che  $\tau_{\underline{v}}(Q) = Q + \underline{v}$ , dove  $\underline{v} \in V$ . In particolare l'applicazione associata a tale affinità è l'identità. Infatti, se  $O \in E$ ,  $g(\underline{v}) = \tau_{\underline{v}}(O + \underline{v}) - \tau_{\underline{v}}(O) = (O + 2\underline{v}) - (O + \underline{v}) = \underline{v}$ .

► L'applicazione  $\zeta : A(E) \rightarrow \text{GL}(V)$  che associa ad un'affinità l'applicazione ad essa associata è un epimorfismo di gruppi. Infatti, dato un endomorfismo invertibile di  $V$ , vi si può costruire sopra, come visto prima, un'affinità. Inoltre vale che  $\zeta(f \circ f') = \zeta(f) \circ \zeta(f')$ , per  $f, f' \in A(E)$ .

► Vale che  $\text{Ker } \zeta$  è esattamente il sottogruppo normale di  $A(E)$  delle traslazioni, dal momento che sono le uniche affinità la cui applicazione lineare associata è l'identità.