Teoria spettrale degli endomorfismi

Sia V uno spazio vett. su $\mathbb{K}$. Sia $f \in End(V)$. Ci preme trovare in generale una base $\mathcal{B}$ di V t.c. $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f)$ sia il più possibile vicina ad essere, o sia addirittura, diagonale. Equivalentemente si cerca di trovare un rappresentante "semplice" per ogni classe di similitudine delle matrici quadrate.

OSS. Si scrive $M_{\mathcal{B}}(f)$ sottintendendo $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f)$.

Se $M_{\mathcal{B}}(f)$ è diagonale, $M_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ 0 & & \ddots \end{pmatrix}$, e $\mathcal{B} = \{\underline{v_1}, \dots, \underline{v_n}\}$, $f(\underline{v_i}) = \lambda \underline{v_i} \quad \forall i \leq n$.

Ossia $Span(\underline{v_i})$ è f-invariante (i.e. $f(Span(\underline{v_i})) \subset Span(\underline{v_i})$).

Def. Uno scalare $\lambda \in \mathbb{K}$ si dice **AUTOVALORE** se $\exists\, \underline{v} \in V \setminus \{\underline{0}\} \mid f(\underline{v}) = \lambda \underline{v}$.

Tale $\underline{v}$ è detto **AUTOVETTORE** relativo all'autovalore λ.

es. 1 è l'unico autovalore di id_V. In particolare ogni vettore non nullo di V è un autovettore relativo ad 1.

Def. $f: V \to V$ è **DIAGONALIZZABILE** se $\exists\ \mathcal{B}$ base t.c. $M_{\mathcal{B}}(f)$ sia diagonale.

oss. $f: V \to V$ è diagonalizzabile $\iff$ V ha una base di autovettori di f.

es. la rotazione di θ in $\mathbb{R}^2$ ha matrice $\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$ e, eccetto per $\theta = \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, non ha mai autovalori.

Def. Se $\lambda \in \mathbb{K}$ è un autovalore, indichiamo con V_λ lo spazio:

$$V_\lambda(f) = V_\lambda = \{ \underline{v} \in V \mid f(\underline{v}) = \lambda \underline{v} \},$$

detto **AUTOSPAZIO** relativo all'autovalore λ.

oss. $V_\lambda(f) = \operatorname{Ker}(f - \lambda \mathrm{Id})$.

oss. $\lambda \in \mathbb{K}$ è un autovalore di f $\iff$ $\operatorname{Ker}(f - \lambda \mathrm{Id}) \neq \{\underline{0}\}$.

oss. Poiché $f \in \operatorname{End}(V)$, $\operatorname{Ker}(f - \lambda \mathrm{Id}) \neq \{\underline{0}\} \iff f - \lambda \mathrm{Id}$ non è invertibile $\iff \det(M_{\mathcal{B}}(f) - \lambda \mathrm{Id}_n) = 0$.

OSS. $\det(M - \lambda \mathrm{Id}_n)$ è un polinomio in λ a coefficienti in $\mathbb{K}$ di grado n.

Def. $p_f(\lambda) = \det(M_{\mathcal{B}}(f) - \lambda \mathrm{Id}_n)$ è detto **POLINOMIO CARATTERISTICO** di f.

OSS. Analogamente $p_M(\lambda) = \det(M - \lambda \mathrm{Id}_n)$ per $M \in M(n, \mathbb{K})$.

Prop. $\underbrace{N = P^{-1} M P}_{N \sim M} \Rightarrow p_N(\lambda) = p_M(\lambda)$ (i.e. $p_f(\lambda)$ è ben definito)

$$\det(N - \lambda \mathrm{Id}) = \det(P^{-1} M P - P^{-1}(\lambda \mathrm{Id}) P) =$$
$$= \det(P^{-1}(M - \lambda \mathrm{Id}) P) = \cancel{\det(P^{-1})} \det(M - \lambda \mathrm{Id}) \cancel{\det(P)} =$$
$$= \det(M - \lambda \mathrm{Id}).^{(*)} \qquad \square$$

(*) In realtà il teorema di Binet è valido anche sugli anelli commutativi, oltre che nei campi; per questo è stato possibile applicarlo.

Corollario il polinomio caratteristico è invariante per similitudine.

OSS. Tale invariante non è comunque completo. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ hanno stesso rango, determinante e polinomio caratteristico, ma non sono simili.

OSS. il coefficiente di λ^{n-1} in $p_f(\lambda)$ è $(-1)^{n+1}\,\mathrm{tr}(f)$, mentre il termine noto è $\det(f)$. Infatti: $p_f(0) = \det(M_{\mathcal{B}}(f) - 0 \cdot Id)$.

OSS. λ è un autovalore di $f \iff p_f(\lambda) = 0$.

Def. la molteplicità algebrica dell'autovalore $\alpha \in \mathbb{K}$ è la sua molteplicità come radice di $p_f(\lambda)$. Tale molteplicità si scrive come $\mu_a(\alpha)$.

Def. la molteplicità geometrica dell'autovalore $\alpha \in \mathbb{K}$ è pari a $\dim V_\alpha$, ossia il massimo numero di autovettori relativi ad α lin. ind. Tale molteplicità si scrive come $\mu_g(\lambda)$.

Teorema $1 \leq \mu_g(\alpha) \leq \mu_a(\alpha) \leq n$, se α è un autovalore.

Sicuramente $\mu_a(\alpha) \leq n$, dacché $\deg p_f(\lambda) = n$. Inoltre $V_\alpha \neq \{\underline{0}\}$, per definizione di autovalore, e quindi $\mu_g(\alpha) \geq 1$.
Sia $\mathcal{B}' = \{\underline{v_1}, \ldots, \underline{v_k}\}$, con $k = \mu_g(\alpha)$, una base di V_λ. Si completa $\mathcal{B}'$ alla base $\mathcal{B} = \{\underline{v_1}, \ldots, \underline{v_k}, \underline{v_{k+1}}, \ldots, \underline{v_n}\}$ di V.

$$M_{\mathcal{B}}(f) = \left(\begin{array}{c|c} \overbrace{\begin{matrix}\alpha & & \\ & \alpha & \\ & & \ddots \ \alpha\end{matrix}}^{k} & B \\ \hline 0 & C \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} \alpha I_k & B \\ \hline 0 & C \end{array}\right).$$

$$p_f(\lambda) = \det(M_{\mathcal{B}}(f) - \lambda\, Id_n) = \det\left(\begin{array}{c|c} (\alpha-\lambda) I_k & B - \lambda I_k \\ \hline 0 & C - \lambda I_k \end{array}\right) =$$

$$= \det((\alpha-\lambda) I_k) \det(C - \lambda I_k) = (\alpha-\lambda)^k \det(C - \lambda I_k).$$

Per definizione, quindi, $k \leq \mu_a(\alpha)$. $\square$

es. Sia $M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. $p_M(\lambda) = \det\begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 & 2 \\ 1 & 2-\lambda & 2 \\ 0 & 0 & 3-\lambda \end{pmatrix} =$

$$= \det\begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{pmatrix}(3-\lambda) = \left((2-\lambda)^2 - 1\right)(3-\lambda) = (3-\lambda)^2(1-\lambda).$$

Quindi $\mu_a(3) = 2$, $\mu_a(1) = 1$. Poiché $\mu_a(1) = 1$ e $\mu_a(1) \geq \mu_g(1)$, $\mu_g(1) = 1$.

$(\lambda = 1)$ $V_1 = \ker\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \ker\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \operatorname{Span}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

$(\lambda = 3)$ $V_3 = \ker\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \ker\underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\Rightarrow \mu_g(3) = 1} = \operatorname{Span}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Pertanto M non è diagonalizzabile, perché non esistono tre autovettori lin. ind.

Oss. $M \in M(n, \mathbb{K})$ è diagonalizzabile se e solo se è simile ad una matrice diagonale.

Oss. se M è triangolare, i suoi autovalori sono gli elementi della sua diagonale.

Prop. Sia $f: V \to V$. Autovettori relativi ad autovalori distinti sono lin. ind.

Si dimostra la tesi per induzione su $n \in \mathbb{N}^+$. Se $n = 1$, la tesi è vera, dacché un autovettore è diverso da zero. Siano allora $\underline{v_1}, \dots, \underline{v_n} \in V$ relativi a $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ distinti. Siano $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ t.c.

$$\alpha_1 \underline{v_1} + \dots + \alpha_n \underline{v_n} = \underline{0} \overset{f}{\Longrightarrow} \alpha_1 \lambda_1 \underline{v_1} + \dots + \alpha_n \lambda_n \underline{v_n} = \underline{0}.$$

$$\begin{cases} \alpha_1 \lambda_k \underline{v_1} + \dots + \alpha_n \lambda_k \underline{v_k} = \underline{0} \\ \alpha_1 \lambda_1 \underline{v_1} + \dots + \alpha_n \lambda_k \underline{v_k} = \underline{0} \end{cases} \Longrightarrow \alpha_1 \underbrace{(\lambda_k - \lambda_1)}_{\neq 0} \underline{v_1} + \dots + \alpha_{k-1} \underbrace{(\lambda_k - \lambda_{k-1})}_{\neq 0} \underline{v_{k-1}} = \underline{0}$$

$$\Downarrow$$

$\alpha_1 = \dots = \alpha_{k-1} = 0$, per il passo induttivo.

Allora $\alpha_n \underline{v_k} = \underline{0} \overset{\underline{v_k} \neq \underline{0}}{\Longrightarrow} \alpha_n = 0$, da cui la tesi. $\square$

Def. Dato un autovalore $\lambda \in \mathbb{K}$ di f, esso si dice **SEMPLICE** se $\mu_a(\lambda) = 1$.

es. Sia $M = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$. $p_\lambda(M) = \lambda^2 - 2\cos(\theta)\lambda + 1$.
$\frac{\Delta}{4} = \cos^2(\theta) - 1 = -\sin^2(\theta)$. Pertanto $p_\lambda(M)$ ha autovalori in $\mathbb{R}$ se e solo se $\sin(\theta) = 0 \Rightarrow \theta = \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. Se k è pari, l'unico autovalore sarà 1 ($M = Id$), altrimenti sarà -1 ($M = -Id$). Al contrario, in $\mathbb{C}$, esistono sempre autovalori.

Teorema In un campo algebricamente chiuso $\mathbb{K}$, esistono sempre n autovalori di $f \in End(V)$, con $\dim V = n$, contati con la rispettiva molteplicità algebrica.

Per ipotesi, $p_f(\lambda)$, essendo un polinomio in $\mathbb{K}[X]$, ammette tutte le sue radici in $\mathbb{K}$, e quindi si scompone sempre in fattori lineari, da cui la tesi. $\square$

Corollario M ammette sempre almeno un autovalore, $\forall M \in M(n, \mathbb{C})$.

es. riprendendo l'esempio scorso, $\lambda_{1,2} = \cos(\theta) \pm i\sin(\theta)$.

$(\lambda = \lambda_1)$ $M = \begin{pmatrix} -i\cdot\sin(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -i\cdot\sin(\theta) \end{pmatrix} = \sin(\theta)\begin{pmatrix} -i & -1 \\ 1 & -i \end{pmatrix}$.

Se $\sin(\theta) = 0$, $\operatorname{Ker} M = V$ (quando $\lambda_1 = \lambda_2$). Altrimenti

$$V_{\lambda_1} = \operatorname{Ker} M = \sin(\theta) \cdot \operatorname{Ker} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -i \end{pmatrix}}_{Ng(\lambda_1) = 1} = \operatorname{Span}\begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$(\lambda = \lambda_2)$ $\quad M = \begin{pmatrix} i \cdot \sin(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & i \cdot \sin(\theta) \end{pmatrix} = \sin(\theta) \begin{pmatrix} i & -1 \\ 1 & i \end{pmatrix}.$

Se $\sin(\theta) = 0$, $\operatorname{Ker} M = V$ (quando $\lambda_1 = \lambda_2$). Altrimenti

$$V_{\lambda_2} = \operatorname{Ker} M = \sin(\theta) \cdot \operatorname{Ker} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & i \end{pmatrix}}_{Ng(\lambda_2) = 1} = \operatorname{Span}\begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix}.$$

OSS. $0 \in \mathbb{K}$ e' autovalore $\iff \dim \operatorname{Ker} f > 0$.

Def. Si denota con $sp(f)$ lo SPETTRO di f, ossia l'insieme degli autovalori di f.

Corollario $V_{\lambda_1} + \dots + V_{\lambda_k} = V_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus V_{\lambda_k}$,(*) per λ_i distinti.

Siano $\mathcal{B}_{\lambda_1}, \dots, \mathcal{B}_{\lambda_k}$ basi di $V_{\lambda_1}, \dots, V_{\lambda_k}$. Poiché l'unione e' base della somma – infatti gli autovettori sono tutti lin. ind. – tali autospazi sono in somma diretta. $\square$

(*) più sottospazi si dicono in somma diretta se ogni vettore di tale somma si scrive in modo unico come somma di vettori di tali sottospazi.

Prop. f è diagonalizzabile $\iff V = V_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus V_{\lambda_n}$.

($\Rightarrow$) f ha una base di autovettori, da cui la tesi.

($\Leftarrow$) esiste una base di autovettori, da cui la tesi. $\square$

Oss. $V = V_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus V_{\lambda_m} \iff \dim(V) = \sum_{i=1}^{k} \mu_g(\lambda_i)$.

Teorema (criterio di diagonalizzabilità) f è diagonalizzabile se e solo se:

(i) $\sum_{i=1}^{k} \mu_a(\lambda_i) = \overbrace{\dim V}^{n}$ (ossia se $p_f(\lambda)$ è completamente fattorizzabile)

(ii) $\mu_g(\lambda_i) = \mu_a(\lambda_i) \ \forall i \leq k$

($\Rightarrow$) Poiché f è diagonalizzabile, $\sum_{i=1}^{k} \mu_g(\lambda_i) = n$. Se $\mu_a(\lambda_j) > \mu_g(\lambda_j)$ per un $j \leq k$, tale somma in $\mu_a(\lambda_i)$ sarebbe maggiore di n, $\lightning$. Quindi $\mu_a(\lambda_i) = \mu_g(\lambda_i) \ \forall i \leq k$, da cui si verifica sia (i) e (ii).

($\Leftarrow$) $\sum_{i=1}^{k} \mu_g(\lambda_i) = \sum_{i=1}^{k} \mu_a(\lambda_i) = n$, da cui che $V = V_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus V_{\lambda_n}$, ossia che f è diagonalizzabile. $\square$

Prop. Se A, B sono diagonalizzabili, $A \sim B \iff p_A(\lambda) = p_B(\lambda)$.

($\Longrightarrow$) già dimostrato.

($\Longleftarrow$) Siano M, N le matrici diagonali a cui A e B sono simili. Poiché $p_M(\lambda) = p_A(\lambda) = p_B(\lambda) = p_N(\lambda)$, M e N sono matrici con gli stessi elementi sulla diagonale, benché permutati. Allora rappresentano uno stesso endomorfismo in una stessa base benché permutata. Quindi $M \sim N \Rightarrow A \sim B$. $\square$

Corollario In un campo algebricamente chiuso $\mathbb{K}$ f è diagonalizzabile $\iff \mu_a(\lambda_i) = \mu_g(\lambda_i)$ $\forall i \leq k$, dove $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ sono tutti gli autovalori distinti.

($\Longrightarrow$) già dimostrato.

($\Longleftarrow$) Dacché $\mathbb{K}$ è algebricamente chiuso, $p_f(\lambda)$ si scompone in $(x-\lambda_1)^{\mu_a(\lambda_1)} \cdot \ldots \cdot (x-\lambda_k)^{\mu_a(\lambda_k)}$, da cui $\sum_{i=1}^{k} \mu_a(\lambda_i) = n$. Poiché vale anche $\mu_a(\lambda_i) = \mu_g(\lambda_i)$, si ottiene la tesi. $\square$

OSS. Poiché con $p \in \mathbb{R}[x]$, $p(z) = 0 \iff p(\bar{z}) = 0$, lo spettro di $A \in M(n, \mathbb{R})$ è tale che $\lambda \in sp(A) \iff \bar{\lambda} \in sp(A)$.

es. $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$. $p(\lambda) = -\lambda^3 + 6\lambda^2 - 16\lambda + 16$.

- $p(2) = 0 \Rightarrow p(\lambda) = (\lambda-2)(\lambda^2-4\lambda+8) = (\lambda-2)(\lambda-2+2i)\cdot(\lambda-2-2i)$. Avendo tre autovalori, A è diagonalizzabile su $\mathbb{C}$.

- $(\lambda = 2)$ $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$. $\operatorname{Ker} M = \operatorname{Span}\underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\underline{v_1}}$.
- $(\lambda = 2+2i)$ $M = \begin{pmatrix} -2i & 0 & -1 \\ 0 & -2i & -1 \\ 2 & 2 & -2i \end{pmatrix}$. $\operatorname{Ker} M = \operatorname{Span}\underbrace{\left(\frac{1}{2}\begin{pmatrix} i \\ i \\ 2 \end{pmatrix}\right)}_{\underline{v_2}}$
- $(\lambda = 2-2i)$ $M = \begin{pmatrix} 2i & 0 & -1 \\ 0 & 2i & -1 \\ 2 & 2 & 2i \end{pmatrix}$. $\operatorname{Ker} M = \operatorname{Span}\underbrace{\left(\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -i \\ -i \\ 2 \end{pmatrix}\right)}_{\underline{v_3}}$.

Quindi una base per cui A e' diagonale è $\{\underline{v_1}, \underline{v_2}, \underline{v_3}\}$.
In particolare $\underline{v_3} = \overline{\underline{v_2}}$.

Prop. Se $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ e' un autovalore, $V_{\overline{\alpha}} = \overline{V_\alpha}$, lo spazio ottenuto coniugandone gli elementi, data $M \in M(n, \mathbb{R})$.

Si consideri l'isomorfismo $c : V_\alpha \to V_{\overline{\alpha}}^{(*)}$, $\underline{v} \mapsto \overline{\underline{v}}$. Sia $\mathcal{B} = \{\underline{v_1}, \ldots, \underline{v_k}\}$ una base di V_α, allora $\overline{\mathcal{B}} = \{\overline{\underline{v_1}}, \ldots, \overline{\underline{v_k}}\}$ e' base di $V_{\overline{\alpha}}$, da cui $V_{\overline{\alpha}} = \operatorname{Span}(\overline{\mathcal{B}}) = \overline{V_\alpha}$. $\square$

(*) vale infatti che, per $M \in M(n,\mathbb{R})$, $M\underline{v} = \lambda \underline{v} \Rightarrow$
$\Rightarrow M\overline{\underline{v}} = \overline{\lambda}\,\overline{\underline{v}}$.

OSS. Non è quindi un caso che nell'esempio di prima $\mu_g(2+2i) = \mu_g(2-2i)$ e $V_{2+2i} = \overline{V_{2-2i}}$.

OSS. Sia $A \in M(n,\mathbb{K})$ diagonalizzabile e sia $M = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$ la matrice diagonale a cui A è simile. Allora $\exists\, P \in GL(n,\mathbb{K})$ t.c. $P^{-1}AP = M \Rightarrow AP = PM$. Questo succede se e solo se ogni colonna di AP corrisponde a quella associata in PM, ossia $AP^i = PM^i = \lambda_i P^i$. Allora, dati n autovettori lin. ind. $\underline{v_1}, \dots, \underline{v_n}$ associati agli autovalori (non necessariamente distinti) $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, si può porre $P^i = \underline{v_i}$, e quindi $P = (\underline{v_1} | \cdots | \underline{v_n})$.

es. Dallo scorso esempio, posta $M = \begin{pmatrix} 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & 2+2i & \cdots \\ 0 & \cdots & 2-2i \end{pmatrix}$ si ha $\underline{v_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\underline{v_2} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} i \\ i \\ 2 \end{pmatrix}$ e $\underline{v_3} = \overline{\underline{v_2}}$, e dunque:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2}i & -\frac{1}{2}i \\ -1 & \frac{1}{2}i & -\frac{1}{2}i \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

OSS. Le matrici P costruite sono sempre invertibili, dacché le loro colonne sono formati da autovettori tra di loro lin. ind.

es. Sia $A = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ e si calcoli A^{100}.

$p_A(\lambda) = \lambda^2 + \lambda = \lambda(\lambda+1) \Rightarrow$ A è diagonalizzabile e ha 0 ed 1 come autovalori.

$(\lambda = 0)$ $\operatorname{Ker} A = \ker \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \operatorname{Span}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

$(\lambda = 1)$ $\ker(A + Id) = \ker \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \operatorname{Ker}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} =$
$= \operatorname{Span}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Quindi, per $M = \begin{pmatrix} \overbrace{0}^{\lambda_1} & 0 \\ 0 & \underbrace{-1}_{\lambda_2} \end{pmatrix}$, si pone $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$, da cui $P^{-1} =$
$= \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Pertanto vale che:

$$A = PMP^{-1}, \qquad A^{100} = PM^{100}P^{-1} = P\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}P^{-1},$$

da cui $A^{100} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = -A$.

oss. $W = V_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus V_{\lambda_k}$ è f-invariante.

Lemma $W = V_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus V_{\lambda_k}$, $U \subset W$ sottosp. f-invariante se e solo se $U = (U \cap V_{\lambda_1}) \oplus \cdots \oplus (U \cap V_{\lambda_k})$, per ogni insieme di autovalori distinti.

($\Leftarrow$) Sia $\underline{u} = \underline{u_1} + \dots + \underline{u_k}$, allora $f(\underline{u}) = \lambda_1 \underline{u_1} + \dots + \lambda_k \underline{u_k} \Rightarrow$

$\Rightarrow f(U) \subset U \Rightarrow U$ è f-invariante e $U \subset W$.

($\Rightarrow$) Sia $\underline{v} = \underline{v_1} + \dots + \underline{v_k}$ con $\underline{v_i} \in V_{\lambda_i}$ e $\underline{v} \in U$. Si dimostra per induzione su m che se $\underline{v}$ si decompone in una somma di autovettori non nulli $\underline{v} = \underline{v_{i_1}} + \underline{v_{i_2}} + \dots + \underline{v_{i_m}}$, allora $\underline{v_{i_j}} \in U \ \forall j \leq m$.

(passo base) Poiché $\underline{u} \in U$, chiaramente $\underline{v_1} = \underline{u} \in U$.

(passo induttivo) $f(\underline{v}) = \lambda_{i_1} \underline{v_{i_1}} + \dots + \lambda_{i_m} \underline{v_{i_m}} \Rightarrow$

$\Rightarrow \overbrace{f(\underline{v}) - \lambda_{i_m} \underline{v}}^{\in U} = \overbrace{(\lambda_{i_1} - \lambda_{i_m})}^{\neq 0} \underline{v_{i_1}} + \dots + \overbrace{(\lambda_{i_{m-1}} - \lambda_{i_m})}^{\neq 0} \underline{v_{i_{m-1}}} \in$

$\in U$, dacché U è f-invariante. Allora, per il passo induttivo,

$\underline{v_{i_1}}, \dots, \underline{v_{i_{m-1}}} \in U \Rightarrow \underline{v_{i_m}} \in U$. $\square$

es. $f: V \to V$ diagonalizzabile, $V = V_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus V_{\lambda_k}$. Sia $\mu_g(\lambda_i) = 1$. Il lemma implica che $W \subset V$ è f-invariante se e solo se $W = (W \cap V_{\lambda_1}) \oplus \dots \oplus (W \cap V_{\lambda_k})$. Ogni sottospazio $W \cap V_{\lambda_i}$ può essere uguale solo a $\{\underline{0}\}$ o a V_{λ_i} - dacché $\dim V_{\lambda_i} = 1$. In particolare esistono 2^k sottospazi W possibili.

Corollario Se $f: V \to V$ è diagonalizzabile e $W \subset V$ è f-invariante, allora $f|_W : W \to W$ è diagonalizzabile.

Infatti $W = (W \cap V_{\lambda_1}) \oplus \cdots \oplus (W \cap V_{\lambda_k})$ ha una base di autovettori. $\square$

Def. $f, g : V \to V$ si dicono SIMULT. DIAGON. se esiste una base di autovettori per cui sia f che g hanno una matrice diagonale.

Teorema $f, g : V \to V$ sono simul. diag. se e solo se $f \circ g = g \circ V$, date f, g diagonalizzabili con la base $\mathcal{B}$.

$(\Rightarrow)$ $\overbrace{M_{\mathcal{B}}(f)}^{\text{diagonale}} \circ \overbrace{M_{\mathcal{B}}(g)}^{\text{diagonale}} = M_{\mathcal{B}}(g) \circ M_{\mathcal{B}}(f) \Rightarrow f \circ g = g \circ f.$

$(\Leftarrow)$ Siano $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ gli autovalori distinti di f. Allora $V = V_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus V_{\lambda_k}$. $V_{\lambda_i} = \ker(f - \lambda_i \, Id)$. Inoltre anche V_{λ_i} è g-invariante (infatti, dato $\underline{v} \in V_{\lambda_i}$, $f(g(\underline{v})) = g(f(\underline{v})) = g(\lambda_i \underline{v}) = \lambda_i \, g(\underline{v})$, i.e. $g(V_{\lambda_i}) \subset V_{\lambda_i}$).

Per il preced. corollario $g|_{V_{\lambda_i}}$ è diagonalizz., cioè $\exists$ $\underline{v_1}^{(i)}, \ldots, \underline{v_t}^{(i)}$ base di V_{λ_i} per cui $g|_{V_{\lambda_i}}$ e $f|_{V_{\lambda_i}}$ sono simult. diagonalizz. Sia allora $\mathcal{B}$ l'unione di tali basi $\forall i \leq k$: poiché $V = V_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus V_{\lambda_k}$, $\mathcal{B}$ è una base di V per cui sia f e g sono simult. diagonalizzabili. $\square$

Def. $f \in End(V)$ si dice TRIANGOLABILE se V ammette una base $\mathcal{B}$ tale che $M_{\mathcal{B}}(f)$ sia triangolare.

Def. Una base $\mathcal{B} = \{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\}$ di V si dice BANDIERA di f se $Span(\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_i)$ è f-invariante $\forall\, i \leq n$.

OSS. f è triangolabile $\iff \exists$ una bandiera di f.

OSS. f è triangolabile $\implies p_f(\lambda)$ è completamente fattorizzabile in fattori lineari su $\mathbb{K} \implies \sum_{i=1} \mu_a(\lambda_i) = n$.

Teorema f è triangolabile se e solo se $\sum_{i=1}^{k} \mu_a(\lambda_i) = n$.

$(\Rightarrow)$ Dall'osservazione precedente: $p_f(\lambda) = (a_{11} - \lambda) \cdots (a_{nn} - \lambda)$.

$(\Leftarrow)$ Si dimostra la tesi per induzione su $n \geq 1$.

(passo base) Se $n = 1$, ogni matrice associata di f è in particolare triangolare, e quindi f è triangolabile.

(passo induttivo) Sia λ_1 un autovalore di f e $\underline{v}_1$ un suo autovettore.

Si completi $\{\underline{v}_1\}$ ad una base $\mathcal{B} = \{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\}$ di V. Allora vale che:

$$M_{\mathcal{B}}(f) = \left[\begin{array}{c|c} \lambda_1 & B \\ \hline 0 & C \end{array}\right], \quad \text{con} \quad C \in M_{n-1}(\mathbb{K}).$$

Siano $U = \mathrm{Span}(\underline{v_1})$ e $W = \mathrm{Span}(\overbrace{\underline{v_2}, \ldots, \underline{v_n}}^{\mathcal{B}_W})$. Allora $V = U \oplus W$.

Vale pertanto che $C = M_{\mathcal{B}_W}(p_W \circ f|_W)$, dove si pone $p_W : V \to W$ t.c. $\underline{v} = \overbrace{\underline{u}}^{\in U} \oplus \overbrace{\underline{w}}^{\in W} \mapsto \underline{w}$. Poiché $p_f(\lambda) = (\lambda - \lambda_i)\, p_{p_W \circ f|_W}(\lambda)$, $p_{p_W \circ f|_W}(\lambda)$ si riduce in fattori lineari. Allora per l'ipotesi induttiva, W ammette una base a bandiera $\underline{w_2}, \ldots, \underline{w_n}$. Allora, posta $\mathcal{B}' = \{\underline{v_1}, \underline{w_2}, \ldots, \underline{w_n}\}$, $M_{\mathcal{B}'}(f)$ è triangolare. Dunque f è triangolabile. $\square$

OSS. Dato un polinomio $p(x) = a_0 + \cdots + a_m x^m \in \mathbb{K}[x]$, è possibile definire $p(f)$ con $f \in \mathrm{End}(V)$ come $a_0 \cdot \mathrm{Id} + \cdots + a_m f^m$.

Sia $\sigma_f : \mathbb{K}[x] \to \mathrm{End}(V)$, $p(x) \mapsto p(f)$. Allora σ_f è lineare (è addirittura un omomorfismo di anelli). Poiché $\mathrm{Id}, \ldots, f^{n^2}$ non sono lin. ind., $\mathrm{Ker}\, \sigma_f \neq \{\underline{0}\}$ (i.e. σ_f non è mai iniettivo). Inoltre $\mathrm{Ker}\, \sigma_f$ è un ideale monogenerato, dal momento che $\mathbb{K}[x]$, in quanto anello euclideo, è un PID.

Def. Si definisce POLINOMIO MINIMO di f il polinomio $\varphi_f \in \mathbb{K}[x]$ generatore monico di $\mathrm{Ker}\, \sigma_f$.

OSS. il polinomio minimo è unico.

Prop. Il polinomio minimo e' invariante per similitudine.

Sia $A = PBP^{-1}$ e sia $p(x) \in \mathbb{K}[x]$. Allora $p(A) = p(PBP^{-1}) =$
$= P\,p(B)\,P^{-1}$. Pertanto $p(A) = 0 \iff p(B) = 0$, da cui $\operatorname{Ker} \sigma_A =$
$= \operatorname{Ker} \sigma_B$, e quindi che questi due ideali condividono lo stesso generatore monico, ossia che A e B condividono lo stesso polinomio minimo. $\square$

oss. Il polinomio minimo non e' un invariante completo della similitudine, infatti $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ hanno lo stesso polinomio minimo $(\lambda^2 - \lambda)$, ma non sono simili.

es. se $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$, $p_D(D) = \begin{pmatrix} \overbrace{p_D(\lambda_1)}^{=0} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \underbrace{p_D(\lambda_m)}_{=0} \end{pmatrix} = \underline{0}$.

oss. $M_{\mathcal{B}}(p(f)) = p(M_{\mathcal{B}}(f))$.

Teorema (di Hamilton - Cayley) Sia $f \in \operatorname{End}(V)$. Allora $p_f(f) = 0$.

Sia $\mathcal{B}$ una base di V e siano $A = M_{\mathcal{B}}(f)$ e $B = \operatorname{adj}(A - \lambda I)$.
Vale allora che:

$$(A - \lambda I) B = \det(A - \lambda I) I = p_f(\lambda) I. \tag{1}$$

Sia $b_{ij} := B_{ij}$, allora $b_{ij} \in \mathbb{K}[\lambda]$. Poiché b_{ij}, a meno del segno, è il determinante di un minore di taglia $n-1$ di $A - \lambda I$, vale che $\deg b_{ij} \leq n-1 \ \forall i, j$. Allora sia $b_{ij} = b_{ij}^{(0)} + b_{ij}^{(1)} \lambda + \dots + b_{ij}^{(n-1)} \lambda^{n-1}$. Detta $B^{(h)} = (b_{ij}^{(h)})$, vale che:

$$B = \sum_{h=0}^{n-1} \lambda^h B^{(h)}.$$

Sia $p_A(\lambda) = a_0 + \dots + a_n \lambda^n$. Allora l'eq. (1) diventa:

$$(A - \lambda I) \sum_{h=0}^{n-1} \lambda^h B^{(h)} = (a_0 + \dots + a_n \lambda^n) I. \qquad (2)$$

Sviluppando il primo membro dell'eq. 2 si ricava inoltre che:

$$(A - \lambda I) \sum_{h=0}^{n-1} \lambda^h B^{(h)} = A B^{(0)} + \sum_{h=1}^{n-1} \lambda^h \left(A B^{(h)} - B^{(h-1)} \right) - \lambda^n B^{(n-1)}. \qquad (3)$$

Uguagliando i termini dei due polinomi termine a termine si ricavano la seguente catena di uguaglianze:

$$\begin{cases} AB^{(0)} = a_0 I \\ AB^{(1)} - B^{(0)} = a_1 I \Rightarrow A^2 B^{(1)} - AB^{(0)} = a_1 A \\ \dots \\ - B^{(n-1)} = a_n A \end{cases}$$

Sommando membro a membro si ottiene infine che $p_f(A) = \underline{0}$.

Poiché $A = M_{\mathcal{B}}(f)$, $p_f(A) = 0 \Rightarrow M_{\mathcal{B}}(p_f(f)) = p_f(M_{\mathcal{B}}(f)) = \underline{0}$.

Dacché la matrice associata di $p_f(f)$ nella base $\mathcal{B}$ è nulla, $p_f(f) = 0$. $\square$

Corollario $\varphi_f(\lambda) \mid p_f(\lambda)$.

Poiché per il Teorema di Hamilton-Cayley $p_f(\lambda) \in \operatorname{Ker} \sigma_f$ e φ_f è generatore di tale ideale, deve valere che $\varphi_f(\lambda) \mid p_f(\lambda)$. $\square$

OSS. se $\mathbb{K}$ è algebricamente chiuso, $p_f(\lambda) = \pm (\lambda - \lambda_1)^{\mu_a(\lambda_1)} \cdots (\lambda - \lambda_m)^{\mu_a(\lambda_m)}$

$\Rightarrow \varphi_f(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{a_1} \cdots (\lambda - \lambda_m)^{a_m}$, con $a_i \leq \mu_a(\lambda_i)$, dato che $\varphi_f(\lambda) \mid p_f(\lambda)$.

OSS. $a_i > 0 \ \forall i \leq m$. Altrimenti, sia $\underline{v_i}$ un autovettore relativo a λ_i, allora:

$$\underline{0} = \varphi_f(f)(\underline{v_i}) = (f - \lambda_1 \mathrm{Id})^{a_1} \cdots (f - \lambda_m \mathrm{Id})^{a_m} (\underline{v_i}) =$$

$$= (\lambda_i - \lambda_1)^{a_1} \cdots (\lambda_i - \lambda_m)^{a_m} \underline{v_i}.$$

Se $(\lambda - \lambda_i)$ non dividesse $\varphi_f(\lambda)$, dacché $\underline{v_i} \neq \underline{0}$ per definizione, il prodotto esterno non annulla $\varphi_f(f)(\underline{v_i})$, che è assurdo dal momento che per definizione $\varphi_f(f)$ è l'app. nulla, $\lightning$. Quindi $(\lambda - \lambda_i) \mid \varphi_f(\lambda)$ per ogni autovalore di f.

OSS. Se f è diagonalizzabile, $\varphi_f(\lambda) = (\lambda - \lambda_1) \cdots (\lambda - \lambda_m)$, dove $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ sono gli autovalori distinti di f. Infatti, dato $\underline{v_i} \in \mathcal{B}$, dove $\mathcal{B}$ è una base di autovettori di f, relativo all'autovalore λ_i, allora, detto $p(\lambda) = (\lambda - \lambda_1) \cdots (\lambda - \lambda_m)$, $p(f)(\underline{v_i}) = (f - \lambda_1 \mathrm{Id}) \cdots (f - \lambda_m \mathrm{Id})\, \underline{v_i} =$

$= (\lambda_i - \lambda_1) \cdots (\lambda_i - \lambda_m)\, \underline{v_i}$. Dal momento che λ_i figura tra gli autovalori impiegati per la costruzione di $p(\lambda)$, si conclude che $p(f)(\underline{v_i}) = \underline{0}$. Valendo $\underline{0}$ in ogni vettore della base, si deduce che $p(f) = 0$, quindi $\varphi_f(\lambda) \mid p(\lambda)$. Tuttavia, per l'osservazione precedente, $(\lambda - \lambda_i) \mid \varphi_f(\lambda)$ $\forall i \leq m$, da cui si ricava che $p(\lambda) \mid \varphi_f(\lambda)$, dal momento che i suoi fattori sono tutti coprimi. Poiché sia $p(\lambda)$ che $\varphi_f(\lambda)$ sono monici, si deduce che $\varphi_f = p$.

OSS. Sia $W \subset V$ un sottospazio f-invariante. Allora vale che $f|_W \in \mathrm{End}(W)$ è tale che $\varphi_{f|_W}(\lambda) \mid \varphi_f(\lambda)$. Sia infatti $\mathcal{B}_W$ una base di W e $\mathcal{B}$ il suo completamento a base di V. Vale allora che:

$$D = M_{\mathcal{B}}(f) = \begin{array}{c} \overbrace{\quad}^{\mathcal{B}_W} \qquad \\ \left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline 0 & C \end{array}\right] \end{array}, \quad \text{dove } A = M_{\mathcal{B}_W}(f|_W).$$

Dunque $D^k = \left[\begin{array}{c|c} A^k & * \\ \hline 0 & C^k \end{array}\right] \Rightarrow \varphi_f(D) = \left[\begin{array}{c|c} \varphi_f(A) & * \\ \hline 0 & \varphi_f(C) \end{array}\right] = 0 \Rightarrow \varphi_f(A) = 0$, ossia $\varphi_f \in \ker \sigma_A \Rightarrow \varphi_A = \varphi_{f|_W} \mid \varphi_f$.

OSS Sia $\hat{f}: V/W \to V/W$, $\underline{v} + W \mapsto f(\underline{v}) + W$. Si consideri $\mathcal{B}' = \mathcal{B} \setminus \mathcal{B}_W = \{\underline{v_1}, \ldots, \underline{v_k}\}$ dall' oss. precedente. Allora $\hat{\mathcal{B}} = \{\underline{v_1} + W, \ldots, \underline{v_k} + W\}$ è una base di V/W e vale che, data $f(\underline{v_i}) = \overbrace{\beta_1 \underline{w_1} + \cdots + \beta_h \underline{w_h}}^{\mathcal{B}_W} + \alpha_1 \underline{v_1} + \cdots + \alpha_k \underline{v_k}$, $\hat{f}(\underline{v_i} + W) = \alpha_1 (\underline{v_1} + W) + \cdots + \alpha_k (\underline{v_k} + W)$, ossia che $C = M_{\hat{\mathcal{B}}}(\hat{f})$.

OSS. Dall' oss. precedente si deduce che $p_f(\lambda) = p_{f|_W}(\lambda)\, p_{\hat{f}}(\lambda)$.

OSS. Se W ha un supplementare U f-invariante e $\mathcal{B} = \mathcal{B}_W \cup \mathcal{B}_U$, allora vale che:

$$D = M_{\mathcal{B}}(f) = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \mathcal{B}_W & \mathcal{B}_U \end{array} \\ \left[\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & C \end{array}\right] \end{array}, \quad \text{dove } A = M_{\mathcal{B}_W}(f|_W) \text{ e } C = M_{\mathcal{B}_U}(f|_U).$$

Pertanto, in questo caso, dacché $\varphi_A, \varphi_C \mid \varphi_D$, come osservato prima, e, detto $p = \mathrm{mcm}(\varphi_A, \varphi_C)$, $p(D) = \left[\begin{array}{c|c} p(A) & 0 \\ \hline 0 & p(C) \end{array}\right] = 0$, vale che $\varphi_f = \varphi_D = p$.