Azione di un gruppo su un insieme

di Gabriel Antonio Videtta

Nota. Nel corso del documento per $(G, \cdot)$ si intenderà un qualsiasi gruppo. Si scriverà gh per indicare $g \cdot h$, omettendo il punto. Analogamente con X si indicherà un insieme generico qualsiasi.

Definizione (azione di un gruppo su un insieme)**.** Sia X un insieme. Allora un'applicazione $\varphi : G \to S(X)$ tale che $g \overset{\varphi}{\mapsto} [x \mapsto g \cdot x]$ si dice **azione di** G **su** X se è un omomorfismo di gruppi.

Se G agisce tramite φ su X, si dice allora che X è un G-insieme. Si dice inoltre che l'azione φ è **fedele** se φ è iniettiva, ossia se e solo se $\varphi(g) = \mathrm{Id} \implies g = e$.

Definizione (stabilizzatore)**.** Sia $x \in X$. Allora si definisce lo **stabilizzatore di** x, denotato come $\mathrm{Stab}(x)$, come il sottogruppo di G tale per cui:

$$\mathrm{Stab}(x) = \{g \in G \mid g \cdot x = x\}.$$

Si può allora constatare che φ è fedele se e solo se:

$$\operatorname{Ker} \varphi = \bigcap_{x \in X} \mathrm{Stab}(x) = \{e\}.$$

Si costruisce adesso una relazione di equivalenza $\sim$ su X, data dalla seguente definizione:

$$x \sim y \overset{\text{def}}{\iff} \exists\, g \in G \mid g \cdot x = y.$$

Le classi di equivalenza di $\sim$ vengono dette **orbite** e si pone $\mathrm{Orb}(x) := [x]_\sim$.

Definizione (azione libera)**.** Si dice che φ è un'azione libera (o che G agisce liberamente su X) se $\mathrm{Stab}(x) = \{e\}$ per ogni scelta di $x \in X$.

Definizione (azione transitiva)**.** Si dice che φ è un'azione transitiva (o che G agisce transitivamente su X) se esiste un'unica classe di equivalenza di $\sim$ (ossia se $\forall\, x, y \in X$, $\exists\, g \in G \mid g \cdot x = y$). In tal caso si dice che X è un G-insieme omogeneo.

Definizione (azione semplicemente transitiva)**.** Si dice che φ è un'azione semplicemente transitiva (o che G agisce in maniera semplicemente transitiva su X) se φ è un'azione libera e transitiva. In tal caso si dice che X è un G-insieme omogeneo principale.

In generale, un'azione può essere solamente libera o solamente transitiva. Chiaramente però la libertà di un'azione ne implica la fedeltà, e non il contrario. Tuttavia nel caso particolare dei gruppi abeliani, la fedeltà e la transitività di un'azione ne implicano anche la libertà, come enunciato dalla:

Proposizione. Sia G abeliano. Allora, se φ è fedele e transitiva, φ è semplicemente transitiva.

Dimostrazione. È sufficiente dimostrare che φ è anche libera, ossia che $\mathrm{Stab}(x) = \{e\}$ per ogni scelta di $x \in X$. Sia allora $g \in \mathrm{Stab}(x)$. Si mostra che $g \in \mathrm{Ker}\,\varphi$, da cui si dedurrà che $g = e$.

Sia $y \in X$. Poiché φ è transitiva, $x \sim y$, e quindi esiste $h \in G$ tale per cui $h \cdot x = y$. Pertanto, sfruttando la commutatività di G, $g \cdot y = g \cdot (h \cdot x) = h \cdot (g \cdot x) = h \cdot x = y$, da cui si deduce che $\varphi(g) = \mathrm{Id}$, concludendo la dimostrazione. $\square$

Si dimostra adesso il teorema più importante sulle azioni di gruppi sugli insiemi: il Teorema orbita-stabilizzatore, un "analogo" del Primo teorema di isomorfismo per le azioni[1 2].

Teorema (orbita-stabilizzatore)**.** Sia $x \in X$. Allora la mappa $\alpha : G/\mathrm{Stab}(x) \to \mathrm{Orb}(x)$ tale che $g\,\mathrm{Stab}(x) \overset{\alpha}{\mapsto} g \cdot x$ è una bigezione.

Dimostrazione. Si mostra che la mappa α è ben definita. Se $g \in G$ e $s \in \mathrm{Stab}(x)$, allora $\alpha(gs\,\mathrm{Stab}(x)) = (gs) \cdot x = g \cdot x = \alpha(g\,\mathrm{Stab}(x))$.

Si dimostra allora l'iniettività di α. Siano g e $h \in G$ tali che $\alpha(g\,\mathrm{Stab}(x)) = \alpha(h\,\mathrm{Stab}(x))$. Allora $g \cdot x = h \cdot x \implies (h^{-1}g) \cdot x = x \implies h^{-1}g \in \mathrm{Stab}(x)$; pertanto $h \in g\,\mathrm{Stab}(x) \implies g\,\mathrm{Stab}(x) = h\,\mathrm{Stab}(x)$, da cui l'iniettività.

Infine si mostra la surgettività di α. Se $y \in \mathrm{Orb}(x)$, allora esiste $g \in G$ tale per cui $g \cdot x = y$, e quindi $\alpha(g\,\mathrm{Stab}(x)) = g \cdot x = y$, da cui la surgettività. $\square$

Se G è finito, il Teorema orbita-stabilizzatore implica anche un'identità aritmetica riguardante le cardinalità di $\mathrm{Stab}(x)$ e $\mathrm{Orb}(x)$:

$$|G| = |\mathrm{Stab}(x)|\,|\mathrm{Orb}(x)|\,.$$

[1] Si lascia al lettore la gioia di dimostrare il Primo teorema di isomorfismo proprio a partire dal Teorema orbita-stabilizzatore (indizio: se $f \in \mathrm{Hom}(G, H)$, si può considerare l'azione $\varphi : G \to S(H)$ tale che $g \overset{\varphi}{\mapsto} [h \mapsto g \cdot h = f(g)h]$). Si noterà infatti che la dimostrazione del Teorema orbita-stabilizzatore ricalca totalmente la stessa idea della dimostrazione del Primo teorema di isomorfismo.

[2] Infatti $g\,\mathrm{Stab}(x)$ individua ancora tutti gli elementi di G la cui immagine è $g \cdot x$.

Da questa identità si può estrarre un'ulteriore uguaglianza:

$$|X| = \sum_{x\in\mathcal{R}} |\mathrm{Orb}(x)| = \sum_{x\in\mathcal{R}} \frac{|G|}{|\mathrm{Stab}(x)|},$$

dove $\mathcal{R}$ è un insieme dei rappresentanti delle orbite dell'azione. Questo fatto è un'immediata conseguenza del fatto che la relazione $\sim$ è di equivalenza, e che, in quanto tale, induce una partizione dell'insieme X mediante i suoi rappresentanti:

$$X = \bigsqcup_{x\in\mathcal{R}} \mathrm{Orb}(x).$$

Si introduce adesso il concetto di *punti fissi* di un dato $g \in G$, a cui seguirà il *lemma di Burnside*, un risultato utile per contare il numero di orbite di un'azione.

Definizione (punti fissi di g)**.** Si definisce l'insieme $\mathrm{Fix}(g)$ come il sottoinsieme di X dei punti lasciati fissi da g, ossia:

$$\mathrm{Fix}(g) = \{x \in X \mid g \cdot x = x\}.$$

Proposizione (lemma di Burnside)**.** $|X/{\sim}| = \frac{1}{|G|} \sum_{g\in G} |\mathrm{Fix}(g)|$.

Dimostrazione. L'idea chiave risiede nell'osservare che $\sum_{g\in G} |\mathrm{Fix}(g)|$ conta gli elementi dell'insieme S, dove:

$$S = \{(g, x) \in G \times X \mid g \cdot x = x\} \subseteq G \times X.$$

Infatti, gli stessi elementi sono contati da $\sum_{x\in X} |\mathrm{Stab}(x)|$. Applicando allora il Teorema orbita-stabilizzatore, ed indicando con $\mathcal{R}$ un insieme dei rappresentanti delle orbite, la somma si riscrive come:

$$\sum_{g\in G} |\mathrm{Fix}(g)| = \sum_{x\in X} |\mathrm{Stab}(x)| = \sum_{r\in\mathcal{R}} \sum_{x\in\mathrm{Orb}(r)} |\mathrm{Stab}(x)| = (*),$$

a sua volta riscritta come:

$$(*) = \sum_{r\in\mathcal{R}} \sum_{x\in\mathrm{Orb}(r)} \frac{|G|}{|\mathrm{Orb}(x)|} = \sum_{r\in\mathcal{R}} \sum_{x\in\mathrm{Orb}(r)} \frac{|G|}{|\mathrm{Orb}(r)|} = |G|\, |X/{\sim}|\,,$$

dove è stato cruciale osservare che, per $x \in \mathrm{Orb}(r)$, $\mathrm{Orb}(x) = \mathrm{Orb}(r)$. $\square$