

# Note del corso di Geometria 1

Gabriel Antonio Videtta

24 marzo 2023

## Esercitazione: la forma canonica di Jordan e gli autospazi generalizzati

**Nota.** Nel corso del documento, per  $f$  si intenderà un generico endomorfismo di  $\text{End}(V)$ , e per  $V$  verrà inteso uno spazio vettoriale di dimensione finita  $n$  su un campo  $\mathbb{K}$  algebricamente chiuso, qualora non specificato diversamente.

Sia  $f \in \text{End}(V)$ . Si osservino allora le seguenti catene ascendenti:

$$\{0\} \subsetneq \text{Ker } f \subsetneq \text{Ker } f^2 \subsetneq \cdots \subsetneq \text{Ker } f^{k-1} \subsetneq \text{Ker } f^k = \text{Ker } f^{k+1} = \cdots, \quad (1)$$

$$\{0\} \subsetneq \text{Im } f \subsetneq \text{Im } f^2 \subsetneq \cdots \subsetneq \text{Im } f^{k-1} \subsetneq \text{Im } f^k = \text{Im } f^{k+1} = \cdots, \quad (2)$$

Sia la (1) che la (2) devono stabilizzarsi allo stesso  $k \in \mathbb{N}$ , per la cosiddetta decomposizione di Fitting. Sempre per tale decomposizione vale in particolare che:

$$V = \text{Ker } f^k \oplus \text{Im } f^k.$$

**Osservazione.** Si possono fare alcune osservazioni riguardo la decomposizione di Fitting.

► Sia  $\text{Ker } f^k$  che  $\text{Im } f^k$  sono  $f$ -invarianti:  $\underline{v} \in \text{Ker } f^k \implies f^k(f(\underline{v})) = f(f^k(\underline{v})) = \underline{0} \implies f(\underline{v}) \in \text{Ker } f^k$  e  $\underline{v} \in \text{Im } f^k \implies \underline{v} = f^k(\underline{w}), f(\underline{v}) = f(f^k(\underline{w})) = f^k(f(\underline{w})) \in \text{Im } f^k$ .

►  $f|_{\text{Ker } f^k}$  è nilpotente:  $(f|_{\text{Ker } f^k})^k = f^k|_{\text{Ker } f^k} = 0$ .

►  $f|_{\text{Im } f^k}$  è invertibile:  $\text{Ker } f|_{\text{Im } f^k} = \text{Ker } f \cap \text{Im } f^k \subseteq \text{Ker } f^k \cap \text{Im } f^k = \{0\}$ , e quindi  $f|_{\text{Im } f^k}$  è iniettiva; quindi  $f|_{\text{Im } f^k}$  è anche invertibile, essendo un endomorfismo.

► Poiché  $f|_{\text{Ker } f^k}$  è nilpotente,  $p_{f|_{\text{Ker } f^k}}(\lambda) = \lambda^d$ , dove  $d = \dim \text{Ker } f^k$ .

Inoltre  $\varphi_f|_{\text{Ker } f^k}(\lambda) = \lambda^k$ : se infatti  $\varphi_f|_{\text{Ker } f^k}(\lambda) = \lambda^t$  con  $t < k$ , varrebbe sicuramente che  $f|_{\text{Ker } f^k}^{k-1} = f^{k-1}|_{\text{Ker } f^k} = 0$ , ossia che  $\text{Ker } f^k \subseteq \text{Ker } f^{k-1}$ , violando la minimalità di  $k$ ,  $\cancel{f}$ .

► Dal momento che vale la decomposizione di Fitting e che  $\varphi_f|_{\text{Ker } f^k}$  e  $\varphi_f|_{\text{Im } f^k}$  sono coprimi tra loro (il primo è diviso solo da  $t$ , mentre il secondo non è diviso da  $t$ ),  $\varphi_f = \text{mcm}(\varphi_f|_{\text{Ker } f^k}, \varphi_f|_{\text{Im } f^k}) = \varphi_f|_{\text{Ker } f^k} \varphi_f|_{\text{Im } f^k}$ . Si conclude quindi che  $k = \mu'_a(0)$  rispetto a  $\varphi_f$ , ossia la molteplicità algebrica di 0 in tale polinomio. Analogamente si osserva che  $t = \mu_a(0)$  rispetto a  $p_f$ , ossia la molteplicità algebrica dell'autovalore 0 in  $f$ , e quindi che  $\mu_a(0) \geq k$ ,  
 ► Considerando l'endomorfismo  $g = f - \lambda \text{Id}$ , si osservano facilmente alcune analogie tra le proprietà determinanti di  $g$  e di  $f$ :  $p_g(t) = \det(f - \lambda \text{Id} - t \text{Id}) = \det(f - (\lambda + t) \text{Id}) = p_f(\lambda + t) \implies \mu_{a,g}(0) = \mu_{a,f}(\lambda)$ . Si possono dunque riscrivere i precedenti risultati in termini delle molteplicità di un generico autovalore di  $f$  considerando la molteplicità di 0 in  $g$ .

Reiterando la decomposizione di Fitting (o applicando il teorema di decomposizione primaria), si ottiene infine la seguente decomposizione di  $V$ :

$$V = \text{Ker}(f - \lambda_1 \text{Id})^{\mu_a(\lambda_1)} \oplus \dots \oplus \text{Ker}(f - \lambda_m \text{Id})^{\mu_a(\lambda_m)},$$

dove  $m$  è il numero di autovalori di  $V$ . Si può riscrivere questa identità ponendo  $n_i := \mu'_a(\lambda_i)$  in  $\varphi_f$ :

$$V = \text{Ker}(f - \lambda_1 \text{Id})^{n_1} \oplus \dots \oplus \text{Ker}(f - \lambda_m \text{Id})^{n_m}.$$

**Definizione.** Si definisce **autospazio generalizzato** relativo all'autovalore  $\lambda_i$  di  $f$ , lo spazio:

$$\widetilde{V}_{\lambda_i} = \text{Ker}(f - \lambda_i \text{Id})^{\mu_{a,f}(\lambda_i)} = \text{Ker}(f - \lambda_m \text{Id})^{n_m}.$$

**Osservazione.** Riguardo alla decomposizione primaria di  $V$  e agli autospazi generalizzati di  $f$  si possono fare alcune osservazioni aggiuntive.

► Si può riscrivere la decomposizione primaria di  $V$  in termini degli autospazi generalizzati di  $f$  come  $V = \bigoplus_{i=1}^m \widetilde{V}_{\lambda_i}$ .

► Vale in particolare che  $\widetilde{V}_{\lambda_i} = \{v \in V \mid \exists k \in \mathbb{N} \mid (f - \lambda_i \text{Id})^k(v) = \underline{0}\} = \bigcup_{k=0}^{\infty} \text{Ker}(f - \lambda_i \text{Id})^k$ , tenendo in conto la decomposizione di Fitting e la minimalità di  $n_i$ .

► Considerando la traslazione vista nell'ultima osservazione, si deduce che

$\text{Ker}(f - \lambda_i \text{Id})^{n_i}$  ammette come unico autovalore  $\lambda_i$  (separazione degli autovalori).

► Poiché  $f$  è diagonalizzabile se e solo se  $V = \bigoplus_{i=1}^m \text{Ker}(f - \lambda_i \text{Id})$ , si può dedurre un altro criterio per la diagonalizzabilità, ossia  $f$  diagonalizzabile  $\iff n_i = 1 \forall i \leq m$ .

► Del precedente criterio vale anche il viceversa: se  $f$  è diagonalizzabile e  $\lambda_1, \dots, \lambda_k$  sono i suoi autovalori,  $V$  ammette una base di autovettori; dati allora gli indici  $i_p$  che associano ogni vettore  $\underline{v}_p$  all'indice del suo rispettivo autovalore, allora sia  $\underline{v}_1^{(\lambda_{i_1})}, \dots, \underline{v}_n^{(\lambda_{i_n})}$  una base di  $V$ . Poiché  $q(t) = \prod_{i=1}^k (t - \lambda_i)$  è tale che  $q(f)$  si annulla in ogni vettore della base e ogni suo fattore lineare è composto da un autovalore di  $f$  ed è distinto, deve valere che  $\varphi_f = q$ .

**Esercizio 1.** Si calcoli il polinomio minimo di  $A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ .

*Soluzione.* Innanzitutto, si calcola il polinomio caratteristico di  $A$ , ossia  $p_A(t) = (1-t)^3(1+t)^2$ , da cui si ricava che gli autovalori di  $A$  sono 1 e  $-1$ , con  $\mu_a(1) = 3$  e  $\mu_a(-1) = 2$ . Si può dunque decomporre  $V$  come:

$$V = \text{Ker}(A - I)^3 \oplus \text{Ker}(A + I)^2,$$

e  $\varphi_A$  sarà della forma  $\varphi_A(t) = (t-1)^{n_1}(t+1)^{n_2}$  con  $n_1 \leq 3$  e  $n_2 \leq 2$ .

(i)  $\text{rg}(A - I) = 3 \implies \dim \text{Ker}(A - I) = 2 < 3 = \mu_a(-1)$ . Si controlli adesso il rango di  $(A - I)^2$ :  $\text{rg}(A - I)^2 = 2 \implies \dim \text{Ker}(A - I)^2 = 3 = \mu_a(1)$ , da cui  $n_1 = 2$ .

(ii)  $\text{rg}(A + I) = 3 \implies \dim \text{Ker}(A + I) = 2$ . Allora, poiché  $\dim \text{Ker}(A + I) = 2 = \mu_a(-1)$ , si conclude che  $n_2 = 1$ .

Quindi  $\varphi_A(t) = (t-1)^2(t+1)$ .

**Esercizio 2.** Sia  $A \in M(n, \mathbb{C})$  invertibile. Dimostrare allora che se  $A^3$  è diagonalizzabile, anche  $A$  lo è.

*Soluzione.* Se  $A^3$  è diagonalizzabile, per la precedente osservazione,  $\varphi_{A^3}(t) = \prod_{i=1}^m (t - \lambda_i)$ , dove  $m$  è il numero di autovalori distinti di  $A^3$ . Allora, detto  $p(t) = \prod_{i=1}^m (t^3 - \lambda_i)$ , vale che  $p(A) = 0$ , ossia che  $\varphi_A \mid p$ . Dal

momento che  $A$  è invertibile, anche  $A^3$  lo è, e quindi  $\lambda_i \neq 0 \forall i \leq m$ . Poiché  $p$  è allora fattorizzato in soli termini lineari distinti, anche  $\varphi_A$  deve esserlo, e quindi  $A$  deve essere diagonalizzabile.

Nello studio della forma canonica di Jordan è rilevante costruire una base a bandiera tale per cui la matrice associata in tale base sia una matrice a blocchi diagonale formata da blocchi di Jordan. Si consideri allora  $g = f - \lambda \text{Id}$ , e sia  $k$  la molteplicità algebrica di  $\lambda$  nel polinomio minimo di  $f$  (i.e. il  $k$  minimo già visto precedentemente nella decomposizione di Fitting di  $g$ ).

Si possono allora definire dei sottospazi  $U_i$  secondo le seguenti decomposizioni:

$$\begin{aligned} \text{Ker } g^k &= \text{Ker } g^{k-1} \oplus U_1, \\ \text{Ker } g^{k-1} &= \text{Ker } g^{k-2} \oplus g(U_1) \oplus U_2, \\ &\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ \text{Ker } g &= \underbrace{\text{Ker } g^0}_{=\{0\}} \oplus g^{k-1}(U_1) \oplus \cdots \oplus U_k. \end{aligned}$$

Si noti che  $g$  mantiene la dimensione di  $U_i$  ad ogni passo fino a  $k - i$  composizioni di  $g$  (infatti  $\text{Ker } g^{k-i} \cap U_i \subseteq \text{Ker } g^{k-1} \cap U_i = \{0\}$ , per costruzione dei sottospazi supplementari  $U_i$ ). In particolare,  $\dim U_i = m_i$  rappresenta il numero di blocchi di Jordan relativi a  $\lambda$  di taglia  $k - i + 1$ , e quindi valgono le seguenti identità:

$$\begin{aligned} \dim \text{Ker } g^k &= \dim \text{Ker } g^{k-1} + m_1 = \mu_a(\lambda), \\ \dim \text{Ker } g^{k-1} &= \dim \text{Ker } g^{k-2} + m_1 + m_2, \\ &\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ \dim \text{Ker } g &= m_1 + m_2 + \dots + m_k = \mu_g(\lambda). \end{aligned}$$