Note del corso di Geometria 1

Gabriel Antonio Videtta

27 marzo 2023

Titolo della lezione

SIa V uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$ e sia $\phi : V \times V \to \mathbb{K}$ un suo prodotto scalare.

Definizione. Due vettori $\underline{v}$, $\underline{w}$ si dicono **ortogonali** se e solo se $\varphi(\underline{v}, \underline{w}) = 0$.

Definizione. Preso un sottospazio $W \subseteq V$, si definisce lo spazio:

$$W^\perp = \{\underline{v} \in V \mid \varphi(\underline{v}, \underline{w}) = 0, \forall\, \underline{w} \in W\},$$

detto sottospazio perpendicolare a W.

Nota. Tale notazione è valida anche per sottinsiemi generici di V, perdendo tuttavia la proprietà di sottospazio di V.

Osservazione. Valgono le seguenti osservazioni.

- $S \subseteq T \implies S^\perp \supseteq T^\perp$.
- $S^\perp = (\mathrm{Span}(S))^\perp$ (infatti, da sopra, vale l'inclusione $S^\perp \supseteq (\mathrm{Span}(S))^\perp$; l'inclusione vale anche al contrario, dacché ogni vettore ortogonale a S è ortogonale ad ogni combinazione lineare degli elementi di S, per la bilinearità di φ).

Teorema. (formula della dimensione dello spazio ortogonale) Sia $W \subseteq V$ un sottospazio di V. Allora vale la seguente identità:

$$\dim W^\perp = \dim V - \dim W + \dim(W \cap V^\perp),$$

da cui, se φ è non degenere,

$$\dim W^\perp = \dim V - \dim W.$$

Dimostrazione. Sia φ non degenere. Si osserva che $\underline{w} \in W^\perp$ è tale che $\alpha_\varphi(\underline{v})(\underline{w}) = 0 \; \forall \, \underline{v} \in V$, e quindi che $\alpha_\varphi(\underline{v}) \in \operatorname{Ann}(W)$, che ha dimensione $\dim V - \dim W$.

Nel caso generale, si consideri l'applicazione $g = i^\top \circ \alpha_\varphi \circ i$, dove $i : W \to V$ è tale che $i(\underline{w}) = \underline{w}$. Si osserva allora che $W^\top = \operatorname{Ker}(g)$.

$\square$

Proposizione. $V = W \oplus W^\perp \iff W \cap W^\perp = \{\underline{0}\} \iff \varphi|_W$ è non degenere.

Dimostrazione. $\square$