Note del corso di Geometria 1

Gabriel Antonio Videtta

6 marzo 2023

Teorema degli orlati e calcolo del rango di una matrice

Nota. Nel corso di questo documento, per A si intenderà una generica matrice appartenente all'anello $M(m, n, \mathbb{K})$.

Definizione. Dato un minore M di A di ordine p, si definiscono *orlati di* M i minori di A di ordine $p+1$ che contengono come blocco M.

Esempio. Se $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \end{pmatrix}$ e $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 6 & 7 \end{pmatrix}$, allora gli orlati di M sono le matrici:

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 6 & 7 & 8 \\ 11 & 12 & 13 \end{pmatrix}, \quad M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 6 & 7 & 9 \\ 11 & 12 & 14 \end{pmatrix}, \quad M_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 6 & 7 & 10 \\ 11 & 12 & 15 \end{pmatrix}.$$

Teorema. (di Kronecker, o degli orlati) La matrice A ha rango $r \in \mathbb{N}^+$ se e solo se $\exists$ un minore M di A di taglia $r \mid \det(M) \neq 0$, $\det(N) = 0 \;\forall$ orlato N di M.

Dimostrazione. Si dimostrano le due implicazioni separatamente.

($\implies$) Poiché $r = \min\{k \in \mathbb{N} \mid \det(N) = 0 \;\forall \text{minore } N \text{ di taglia } k+1\}$ e $r > 0$, in particolare è vero che esiste un minore M di A di taglia r tale che $\det(M) \neq 0$ e che ogni orlato N di M, essendone chiaramente anche minore, è tale che $\det(N) = 0$.

($\Longleftarrow$) Senza perdità di generalità, supponiamo che $M = A^{1,\ldots,k}_{1,\ldots,k}$ (altrimenti è sufficiente considerare una permutazione delle colonne e delle righe di A per ricadere nel caso studiato in questa dimostrazione). Dal momento che A^1, ..., A^k sono per ipotesi colonne linearmente indipendenti (infatti $\det(M) \neq 0 \implies \operatorname{rg}(A^1 \cdots A^k) = k$), per dimostrare che $\operatorname{rg}(A) = r$ è sufficiente mostrare che $\forall\, j > k$, $A^j \in \operatorname{Span}(A^1, ..., A^k)$.

Si consideri allora la matrice $B = A^{1,\ldots,k,j}_{1,\ldots,m}$. Sia $i > k$ e $N_i = A^{1,\ldots,k,j}_{1,\ldots,k,i}$. Poiché N_i è un orlato di M, $\det(N_i) = 0$, e quindi $\operatorname{rg}(N_i) < k + 1$. Tuttavia, poiché le righe $N_{i_1} = B_1$, ..., $N_{i_k} = B_k$ sono linearmente indipendenti (sono infatti righe di M a cui è stata aggiunta una colonna), $\operatorname{rg}(N_i) \geq k$. Si conclude allora che $\operatorname{rg}(N_i) = k$, e che, essendo le righe N_{i_1}, ..., N_{i_k} linearmente indipendenti, $N_{i_j} \in \operatorname{Span}(N_{i_1}, ..., N_{i_k}) = \operatorname{Span}(B_1, ..., B_k)$. Allora ogni $B_i \in \operatorname{Span}(B_1, ..., B_k)$, e quindi $\operatorname{rg}(B) \leq k$. Dal momento però che, come osservato prima, B_1, ..., B_k sono linearmente indipendenti, si conclude che $\operatorname{rg}(B) = k$. Infine, poiché $B^1 = A^1$, ..., $B^k = A^k$ sono linearmente indipendenti, deve valere che $B^{k+1} = A^j \in \operatorname{Span}(B^1, ..., B^k) = \operatorname{Span}(A^1, ..., A^k)$, da cui la tesi. $\square$

Esempio. Si può impiegare il teorema degli orlati per calcolare agevolmente il rango di una matrice senza impiegare il metodo di eliminazione di Gauss. Sia per esempio:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}.$$

Poiché $B_1 = (A_{11}) = (1) \neq (0)$, $\operatorname{rg}(A) \geq 1$. Si consideri l'orlato $B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$ di B_1: $\det(B_2) = 1 \cdot 5 - 4 \cdot 2 = -3 \neq 0$: allora $\operatorname{rg}(A) \geq 2$. Infine, si consideri l'orlato $B_3 = A$ di B_2: poiché $\det(B_3) = \det(A) = 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{pmatrix} - 2 \cdot \det \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{pmatrix} + 3 \cdot \det \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = 0$ e B_3 è l'unico orlato di B_2, si conclude che $\operatorname{rg}(A) = 2$.