Note del corso di Geometria 1

Gabriel Antonio Videtta

5 maggio 2023

Affinità e spazio proiettivo

Nota. Qualora non specificato diversamente, con E si indicherà un generico spazio affine di dimensione n su cui agisce lo spazio vettoriale V.

Sia f un'applicazione affine di E. Allora, per ogni $O \in E$, $\underline{v} \in V$, $f(O + \underline{v}) = f(O) + g(\underline{v})$, dove $g \in \operatorname{End}(V)$ è l'applicazione lineare associata ad f. Pertanto $f(O + \underline{v}) = O + (f(O) - O) + g(\underline{v})$, ossia f è una traslazione di vettore $f(O) - O$ composta ad un'applicazione lineare.

In particolare, passando alle coordinate rispetto al punto O e una base $\mathcal{B}$ di V, si può riscrivere $[f(P)]_{O,\mathcal{B}}$ secondo la seguente identità:

$$[f(P)]_{O,\mathcal{B}} = \underbrace{[f(O) - O]_{\mathcal{B}}}_{\underline{b}} + \underbrace{[g(P - O)]_{\mathcal{B}}}_{A[\underline{v}]_{\mathcal{B}}} = A[P - O]_{\mathcal{B}} + \underline{b},$$

dove $A = M_{\mathcal{B}}(g)$. In particolare, in $\mathcal{A}_{\mathrm{n}}(\mathbb{K})$, scegliendo $O = \underline{0}$ come origine e la base canonica come base $\mathcal{B}$, si ottiene che:

$$f(\underline{v}) = A\underline{v} + \underline{b},$$

per ogni $\underline{v} \in \mathcal{A}_{\mathrm{n}}(\mathbb{K})$. Se $f \in A(E)$, allora vale anche che:

$$f^{-1}(O + \underline{w}) = f^{-1}(f(O) + (O - f(O)) + \underline{w}) = O - g^{-1}(f(O) - O) + g^{-1}(\underline{w}),$$

dove si è usato che g è invariante per cambiamento del punto d'origine O. Pertanto, in questo caso, passando alle coordinate, vale che:

$$[f^{-1}(P)]_{O,\mathcal{B}} = A^{-1}[P - O]_{\mathcal{B}} - A^{-1}\underline{b}.$$

Considerando questa identità in $\mathcal{A}_{\mathrm{n}}(\mathbb{K})$, risulta che:

$$f^{-1}(\underline{v}) = A^{-1}\underline{v} - A^{-1}\underline{b},$$

per ogni $\underline{v} \in \mathcal{A}_\mathrm{n}(\mathbb{K})$.

Sia $\iota : \mathcal{A}_\mathrm{n}(\mathbb{K}) \to H_{n+1}$ l'applicazione che associa $\underline{x}$ a $\begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} \in H_{n+1}$, dove vale che:

$$H_{n+1} = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{n+1} \end{pmatrix} \;\middle|\; x_{n+1} = 1 \right\},$$

ossia l'iperpiano affine di $\mathcal{A}_{n+1}(\mathbb{K})$ dei vettori con l'ultima coordinata pari a 1. Per comodità si indica $\iota(\underline{x})$ con $\hat{\underline{x}}$.

Proposizione. ι è un'isomorfismo affine.

Dimostrazione. Si verifica innanzitutto che ι è un'applicazione affine. Siano λ_1, ..., $\lambda_k \in \mathbb{K}$ tali che $\sum_{i=1}^k \lambda_i = 1$, e siano $\underline{x_1}$, ..., $\underline{x_k} \in E$. Allora vale che:

$$\iota\left(\sum_{i=1}^k \lambda_i \underline{x_i}\right) = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^k \lambda_i \underline{x_i} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^k \lambda_i \underline{x_i} \\ \sum_{i=1}^k \lambda_i \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^k \lambda_i \, \iota(\underline{x_i}).$$

Si consideri[1] ora l'applicazione lineare g associata a ι. Allora, posto $O = \underline{0}$, $g(\underline{v}) = f(O + \underline{v}) - f(O) = f(\underline{v}) - f(\underline{0}) = f(\underline{v}) - \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}^\top$. Dal momento che la direzione di H_{n+1} è n-dimensionale (scegliendo O come origine, tutti i vettori ottenibili scartano l'ultima coordinata, sempre pari a 0), g mappa due spazi vettoriali di stessa dimensione.

Pertanto, è sufficiente dimostrare che g è surgettiva affinché sia invertibile (e dunque ι sia un isomorfismo affine). Chiaramente g è surgettiva, dal momento che ad ogni vettore $\hat{\underline{v}} = \begin{pmatrix} \underline{v} & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{Giac}(H_{n+1})$ è tale che $g(\underline{v}) = \hat{\underline{v}}$. Si conclude dunque che g è invertibile, e che ι è un isomorfismo affine. $\square$

Proposizione. Sia $f \in A(\mathcal{A}_\mathrm{n}(\mathbb{K}))$ e sia $f' = \iota \circ f \circ \iota^{-1} \in A(H_{n+1})$ l'identificazione di f in H_{n+1}. Allora si può estendere f' ad un'applicazione lineare invertibile $\hat{f}$ di $\mathbb{K}^{n+1}$ (ossia ad un'applicazione $\hat{f}$ tale per cui $\hat{f}|_{H_{n+1}} = f'$).

[1] Per concludere in modo più diretto la dimostrazione è sufficiente anche esibire l'inverso di g, ottenuto ignorando l'ultima coordinata di un vettore di H_{n+1}.

Viceversa, data un'applicazione lineare invertibile $g \in \mathrm{End}(\mathbb{K}^{n+1})$ tale che $g|_{H_{n+1}} = H_{n+1}$, allora la restrizione $g|_{H_{n+1}}$ è un'affinità di H_{n+1} ed induce un'affinità f di $\mathcal{A}_\mathrm{n}(\mathbb{K})$ in modo tale che $f = \iota^{-1} \circ g|_{H_{n+1}} \circ \iota$.

In particolare, una tale $\hat{f}$ è tale che $\hat{f}(\underline{x}') = A'\underline{x}' \;\forall\, \underline{x}' \in \mathbb{K}^{n+1}$, dove vale che:

$$A' = \left(\begin{array}{c|c} A & \underline{b} \\ 0 & 1 \end{array}\right), \qquad f(\underline{v}) = A\underline{v} + \underline{b} \quad \forall\, \underline{v} \in \mathcal{A}_\mathrm{n}(\mathbb{K})\,.$$

Dimostrazione. Si consideri $\hat{f} \in \mathrm{End}(\mathbb{K}^{n+1})$ tale che $\hat{f}(\underline{x}') = A'\underline{x}'$. $\hat{f}$ è invertibile dal momento che A' lo è. Infatti vale che:

$$(A')^{-1} = \left(\begin{array}{c|c} A^{-1} & -A^{-1}\,\underline{b} \\ 0 & 1 \end{array}\right).$$

Sia $\hat{x} = \begin{pmatrix} \underline{x} & 1 \end{pmatrix}^\top \in H_{n+1}$. Sia ora $\hat{x} \in H_{n+1}$. Allora $\hat{f}(\hat{x}) = \begin{pmatrix} A\underline{x} + \underline{b} & 1 \end{pmatrix}^\top = \begin{pmatrix} f(\underline{x}) & 1 \end{pmatrix}^\top = \iota(f(\underline{x})) = \iota(f(\iota^{-1}(\hat{x}))) = f'(\hat{x}) \in H_{n+1} \;\forall\, \hat{x} \in H_{n+1}$. Pertanto $\hat{f}|_{H_{n+1}} = f'$.

Si consideri adesso $g \in \mathrm{GL}(\mathbb{K}^{n+1})$ tale che $g|_{H_{n+1}} = H_{n+1}$. Sia A' tale che $g(\underline{x}') = A'\underline{x}' \;\forall\, \underline{x}' \in \mathbb{K}^{n+1}$. Poiché $g|_{H_{n+1}} = H_{n+1}$, allora $(A')_{n+1,n+1} = g(\underline{e_{n+1}})_{n+1} = 1$. Poiché $g(\underline{e_n} + \underline{e_{n+1}})_{n+1} = 1$, allora $(A')_{n+1,n} = 0$. In particolare, partendo da $j = n$ fino a $j = 1$, si deduce, per induzione, che $g(\underline{e_j} + \ldots + \underline{e_{n+1}})_{n+1} = 1 \implies (A')_{n+1,j} = 0$.

Allora A' è della seguente forma:

$$A' = \left(\begin{array}{c|c} A & \underline{b} \\ 0 & 1 \end{array}\right), \quad A \in M(n, \mathbb{K}),\, \underline{b} \in \mathbb{K}^n.$$

Considerando allora l'applicazione affine $f \in \mathcal{A}_\mathrm{n}(\mathbb{K})$ tale che $f(\underline{v}) = A\underline{v} + \underline{b}$, g è l'applicazione lineare invertibile che estende $f' = \iota \circ f \circ \iota^{-1}$, come visto prima, da cui la tesi. $\square$

Osservazione. Le matrici della forma:

$$\left(\begin{array}{c|c} A & \underline{b} \\ 0 & 1 \end{array}\right), \quad A \in M(n, \mathbb{K}),\, \underline{b} \in \mathbb{K}^n,$$

formano un sottogruppo di $(M(n+1, \mathbb{K}), \cdot)$ canonicamente isomorfo a $A(\mathcal{A}_\mathrm{n}(\mathbb{K}))$. In particolare si osserva che un'affinità dipende da esattamente

n^2+n, dove n^2 sono i parametri su cui si basa A, e n sono i parametri su cui si basa $\underline{b}$.

Se $D \subseteq E$ è un sottospazio affine di E, l'insieme $T = \{f \in A(E) \mid f(D) = D\}$ forma un sottogruppo di $(A(E), \circ)$. In particolare, se $\dim D = k$, un'affinità di T dipende da esattamente $(k+1)k + (n-k)n$ parametri.

Infatti in tal caso, scegliendo una base opportuna di D_0, estesa poi a base di E_0, e riferendosi ad un'origine di D, A conterrà un blocco k^2 relativo alle immagini della base di D ed un blocco $(n-k)n$ relativo alle immagini degli altri vettori, non appartenenti a D. Inoltre dovranno essere scelti i parametri riguardanti il vettore $\underline{b}$, che, essendo stato scelto come riferimento un punto d'origine appartenente a D, richiederà la scelta di k parametri.

Definizione (spazio proiettivo)**.** Si definisce lo **spazio proiettivo** $\mathbb{P}(\mathbb{K}^{n+1}) = \mathbb{P}^n(\mathbb{K})$ come l'insieme dei sottospazi di dimensione unitaria di $\mathbb{K}^{n+1}$.

Osservazione. Se si definisce la relazione di equivalenza $\sim$ su V in modo tale che $\underline{x} \sim \underline{y} \overset{\text{def}}{\iff} \exists\, \alpha \in \mathbb{K}^* \mid \underline{x} = \alpha \underline{y}$, $V/\sim$ è in bigezione con lo spazio proiettivo. In particolare, ogni elemento di $V/\sim$ è un unico elemento dello spazio proiettivo a cui è stato tolto il vettore $\underline{0}$.

Osservazione. Ogni elemento $\hat{x} = \begin{pmatrix} \underline{x} & 1 \end{pmatrix}^\top$ di H_{n+1} identifica un unico elemento dello spazio proiettivo, ossia $\operatorname{Span}(\hat{x})$, dal momento che due vettori di H_{n+1} appartengono alla stessa retta se e solo se sono linearmente dipendenti, ossia se sono uguali.

Gli elementi di $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$ che non contengono elementi di H_{n+1} sono esattamente i sottospazi contenenti vettori la cui ultima coordinata è nulla. Pertanto questi elementi, detti **punti all'infinito** di $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$, si possono identificare in particolare come elementi di $\mathbb{P}^{n+1}(\mathbb{K})$.

Osservazione. Si può ricoprire $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$ con iperpiani analoghi ad H_{n+1}, ossia con gli iperpiani della seguente forma:

$$T_i = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{n+1} \end{pmatrix} \;\middle|\; x_i = 1 \right\}.$$

Ogni elemento di $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$ interseca infatti almeno uno di questi iperpiani, dacché in esso deve esistervi obbligatoriamente un vettore non nullo. In particolare, se esiste un'intersezione tra T_i e un elemento di $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$, questa è unica.

Teorema. Sia E uno spazio affine sullo spazio V di dimensione n. Allora valgono i seguenti due risultati.

(i) Se $f \in A(E)$ e i punti P_1, ..., P_k sono affinemente indipendenti, allora anche i punti $f(P_1)$, ..., $f(P_k)$ sono affinemente indipendenti.

(ii) Se i punti P_1, ..., P_{n+1} sono affinemente indipendenti, e lo sono anche i punti Q_1, ..., Q_{n+1}, allora esiste un'unica affinità $f \in A(E)$ tale che $f(P_i) = Q_i \ \forall \, 1 \leq i \leq n+1$.

Dimostrazione. Si dimostrano i due risultati separatamente.

(i) Poiché $f \in A(E)$, allora $g \in \mathrm{GL}(V)$, ed è dunque invertibile. Si considerino i vettori $f(P_i) - f(P_1) = g(P_i - P_1)$ con $2 \leq i \leq k$. Dal momento che è invertibile, g mappa vettori linearmente indipendenti a vettori ancora linearmente indipendenti.

   Allora, poiché i punti P_1, ..., P_k sono affinemente indipendenti, i vettori $P_i - P_1$ sono linearmente indipendenti per $2 \leq i \leq k$. Pertanto anche i vettori $g(P_i - P_1) = f(P_i) - f(P_1)$ con $2 \leq i \leq k$ sono linearmente indipendenti, da cui si conclude che i punti $f(P_1)$, ..., $f(P_k)$ sono affinemente indipendenti.

(ii) Dal momento che i punti P_1, ..., P_{n+1} sono affinemente indipendenti, allora i vettori $P_i - P_1$ con $2 \leq i \leq n+1$ sono linearmente indipendenti, e formano dunque una base di V, essendo tanti quanti la dimensione di V. Analogamente anche i vettori $Q_i - Q_1$ con $2 \leq i \leq n+1$ formano una base di V.

   In particolare esiste una sola applicazione lineare g che associa a $P_i - P_1$ il vettore $Q_i - Q_1$, con $2 \leq i \leq n+1$. Dacché le immagini formano una base di V, g è suriettiva, e dunque, poiché $g \in \mathrm{End}(V)$, g è anche invertibile. Un'affinità $f \in A(E)$ tale che $f(P_i) = Q_i$ con $1 \leq i \leq n+1$ è per esempio $f(P) = Q_1 + g(P - P_1)$.

Si mostra che tale f è anche unica. Se esistesse $f' \in A(E)$ con le stesse proprietà di f, varrebbe che $Q_i - Q_1 = f'(P_i) - f'(P_1) = g'(P_i - P_1)$ $\forall\, 2 \leq i \leq n+1$. Tuttavia una g' tale che mappi $P_i - P_1$ a $Q_i - P_1$ $\forall\, 2 \leq i \leq n+1$ è unica, e quindi $g' = g$. Allora $f'(P) = Q_1 + g(P - P_1) = f(P)$ $\forall\, P \in E \implies f' = f$. $\square$

Proposizione. Sia $f \in A(E)$ e sia D un sottospazio affine di E. Allora anche $f(D)$ è un sottospazio affine di E della stessa dimensione di D.

Dimostrazione. Sia $P_0 \in D$. Allora $(f(D))_0 = \{f(P) - f(P_0)\, \forall\, P \in D\} = \{g(\underline{v})\, \forall\, \underline{v} \in D_0\} = g(D_0)$. Dal momento che f è un'affinità, g è invertibile, e quindi preserva la dimensione di D_0. Pertanto $\dim(f(D))_0 = \dim D_0 \implies \dim f(D) = \dim D$. $\square$

Osservazione. Siano D e D' due sottospazi affini di E. Allora $D \cap D'$ è sempre o vuoto o un sottospazio affine. Se infatti $D \cap D'$ non è vuoto, presa una sua combinazione affine, essa è in particolare una combinazione affine sia di punti di D che di punti di D', per cui appartiene a $D \cap D'$.

Proposizione. Siano D e D' due sottospazi affini di E con $D \cap D' \neq \varnothing$. Allora valgono i seguenti due risultati:

(i) $\operatorname{Aff}(D \cup D')_0 = D_0 + D'_0$,

(ii) $(D \cap D')_0 = D_0 \cap D'_0$.

Dimostrazione. Si dimostrano i due risultati separatamente.

(i) Si dimostra l'identità mostrando che vale la doppia inclusione dei due spazi vettoriali. Sia innanzitutto $\underline{u} \in D_0 + D'_0$. Allora esistono $\underline{v} \in D_0$, $\underline{w} \in D'_0$ tali che $\underline{u} = \underline{v} + \underline{w}$. Dal momento che $D \cap D' \neq \varnothing$, esiste un punto $P \in D \cap D'$.

Dacché allora $\underline{v} \in D_0$, esiste $P_1 \in D$ tale che $\underline{v} = P_1 - P$. Analogamente $\exists\, P_2 \in D'$ tale che $\underline{w} = P_2 - P$. Allora $\underline{u} = \underline{v} + \underline{w} = (P_1 - P) + (P_2 - P) = (P_1 + P_2 - P) - P$, dove $P_1 + P_2 - P$ è una combinazione affine di $\operatorname{Aff}(D \cup D')$. Allora, poiché $P \in \operatorname{Aff}(D \cup D')$, $\underline{u} \in \operatorname{Aff}(D \cup D')_0$, da cui si deduce che $D_0 + D'_0 \subseteq \operatorname{Aff}(D \cup D')$.

Sia ora $\underline{u} \in \operatorname{Aff}(D \cup D')_0$. Allora esistono P_1, ..., P_k punti di D, Q_1, ..., $Q_{k'}$ punti di D' e λ_1, ..., λ_k, μ_1, ..., $\mu_{k'} \in \mathbb{K}$ tali che:

$$\underline{u} = \left(\sum_{i=1}^{k} \lambda_i P_i + \sum_{j=1}^{k'} \mu_j Q_j \right) - P, \qquad \sum_{i=1}^{k} \lambda_i + \sum_{j=1}^{k'} \mu_j = 1.$$

Allora si può riscrivere $\underline{u}$ come:

$$\underline{u} = \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{k} \lambda_i P_i + \sum_{j=1}^{k'} \mu_j P\right)}_{\in D} - P + \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{k} \lambda_i P + \sum_{j=1}^{k'} \mu_j Q_j\right)}_{\in D'} - P,$$

dove, ricordando che $P \in D \cap D'$, vale che:

$$\left(\sum_{i=1}^{k} \lambda_i P_i + \sum_{j=1}^{k'} \mu_j P\right) - P \in D_0, \quad \left(\sum_{i=1}^{k} \lambda_i P + \sum_{j=1}^{k'} \mu_j Q_j\right) - P \in D_0',$$

da cui si conclude che $\underline{u} \in D_0 + D_0' \implies \mathrm{Aff}(D \cup D')_0 \subseteq D_0 + D_0'$, e quindi che $\mathrm{Aff}(D \cup D')_0 = D_0 + D_0'$.

(ii) Come prima, si dimostra l'identità mostrando che vale la doppia inclusione dei due spazi vettoriali. Sia $\underline{u} \in D_0 \cap D_0'$. Sia $P \in D \cap D'$. Allora esiste $P_1 \in D$ tale che $\underline{u} = P - P_1$. Analogamente esiste $P_2 \in D'$ tale che $\underline{u} = P - P_2$. Poiché V agisce liberamente su E, esiste un solo punto P' tale che $P = P' + \underline{u}$. Si conclude dunque che $P_1 = P_2$, e dunque che P_1 appartiene anche a D'. Pertanto $\underline{u} \in (D \cap D')_0 \implies D_0 \cap D_0' \subseteq (D \cap D')_0$.

Sia ora invece $\underline{u} \in (D \cap D')_0$. Allora esiste $P_1 \in D \cap D'$ tale che $\underline{u} = P - P_1$. In particolare, dal momento che P e P_1 appartengono a D, $\underline{u} \in D_0$. Analogamente $\underline{u} \in D_0'$. Pertanto $\underline{u} \in D_0 \cap D_0' \implies (D \cap D')_0 \subseteq D_0 \cap D_0'$, da cui si conclude che $(D \cap D')_0 = D_0 \cap D_0'$. $\square$

Definizione (somma affine)**.** Siano D e D' due sottospazi affini di E. Si definisce allora la **somma affine** $D + D'$ come $\mathrm{Aff}(D \cup D')$.

Proposizione (formula di Grassmann per i sottospazi affini)**.** Siano D e D' due sottospazi affini di E con $D \cap D' \neq \varnothing$. Allora $\dim(D + D') = \dim D + \dim D' - \dim(D \cap D')$.

Dimostrazione. Per la proposizione precedente, $\dim \mathrm{Aff}(D \cup D') = \dim(D_0 + D_0')$. Allora, applicando la formula di Grassmann per i sottospazi vettoriali, $\dim(D_0 + D_0') = \dim D_0 + \dim D_0' - \dim(D_0 \cap D_0') = \dim D + \dim D' - \dim(D_0 \cap D_0')$. Sempre per la proposizione precedente, $D_0 \cap D_0' = (D \cap D')_0$, da cui si deduce che $\dim(D_0 \cap D_0') = \dim(D \cap D')_0 = \dim D \cap D'$. Pertanto $\dim(D + D') = \dim \mathrm{Aff}(D \cup D') = \dim D + \dim D' - \dim(D \cap D')$. $\square$

Osservazione. Si definisce $\ell_{P,Q} = \{\lambda P + (1-\lambda)Q \mid \lambda \in \mathbb{K}\}$ con P, $Q \in E$ come la retta passante per due punti. Allora, in generale, se D e D' sono due sottospazi affini di E, $D + D' = \bigcup_{\substack{P \in D \\ Q \in D'}} \ell_{P,Q}$.

Infatti ogni elemento di $\ell_{P,Q}$ è una combinazione affine di due elementi di $D + D'$, e quindi appartiene a $D + D' \implies D + D' \supseteq \bigcup_{\substack{P \in D \\ Q \in D'}} \ell_{P,Q}$.

Infine, se $T \in D+D'$, esistono λ_1, ..., λ_k, μ_1, ..., $\mu_{k'} \in \mathbb{K}$, P_1, ..., $P_k \in D$ e Q_1, ..., $Q_{k'} \in D'$ tali che $T = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i P_i + \sum_{j=1}^{k'} \mu_j Q_j$[2], con $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i + \sum_{j=1}^{k'} \mu_j = 1$. Se $\alpha = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i$ e $\beta = \sum_{j=1}^{k'} \mu_j$, si può riscrivere T nel seguente modo:

$$T = \alpha \underbrace{\sum_{i=1}^{k} \frac{\lambda_i}{\alpha} P_i}_{=P'} + \beta \underbrace{\sum_{j=1}^{k'} \frac{\mu_j}{\beta} Q_j}_{=Q'},$$

dove si osserva che $P' \in D$, essendo combinazione affine di elementi di D, e che analogamente $Q' \in D'$. Allora T giace sulla retta passante per P' e per Q', ossia $T \in \ell_{P',Q'} \implies D + D' \subseteq \bigcup_{\substack{P \in D \\ Q \in D'}} \ell_{P,Q}$.

Osservazione. Siano fissati $P_0 \in D$ e $P_0' \in D'$, e siano $P \in D$ e $Q \in D'$. Allora vale la seguente identità:

$$P - Q = \underbrace{(P - P_0)}_{\in D_0} + \underbrace{(P_0 - P_0')}_{\in \mathrm{Span}(P_0 - P_0')} + \underbrace{(P_0' - Q)}_{\in D_0'}.$$

Si osserva che in generale vale che $(D + D')_0 = D_0 + D_0' + \mathrm{Span}(P_0 - P_0')$. Chiaramente vale che $(D + D')_0 \supseteq D_0 + D_0' + \mathrm{Span}(P_0 - P_0')$, dal momento che D_0, D_0' e $\mathrm{Span}(P_0 - P_0')$ sono tutti sottospazi vettoriali di $(D + D')_0$.

Sia ora $P' \in D + D'$. Allora esistono $P'' \in D$, $Q'' \in Q$ tali per cui $P' \in \ell_{P'',Q''}$, e quindi esiste $\lambda \in \mathbb{K}$ per cui $P' = P'' + \lambda(Q'' - P'')$. Poiché $P'' \in D$, esiste $\underline{v} \in D_0$ tale per cui $P'' = P_0 + \underline{v}$. Allora $P' - P_0 = \underline{v} - \lambda(P'' - Q'') \in D_0 + D_0' + \mathrm{Span}(P_0 - P_0')$, pertanto $(D + D')_0 \subseteq D_0 + D_0' + \mathrm{Span}(P_0 - P_0')$, da cui si conclude che $(D + D')_0 = D_0 + D_0' + \mathrm{Span}(P_0 - P_0')$.

Proposizione (formula di Grassmann modificata)**.** Se $D \cap D' = \varnothing$, allora $\dim(D + D') = \dim D + \dim D' - \dim(D_0 \cap D_0') + 1$.

[2] Al più T è un elemento di solo D o D'. In tal caso T appartiene già a una qualsiasi retta passante per T. Pertanto si può anche assumere successivamente che α, $\beta \neq 0$ – se infatti uno dei due parametri fosse nullo, T apparterrebbe a D o D'.

Dimostrazione. Dalla precedente osservazione, vale che $(D+D')_0 = D_0 + D_0' + \mathrm{Span}(P_0 - P_0')$. Si dimostra che $P_0 - P_0' \notin D_0 + D_0'$. Se infatti $P_0 - P_0'$ appartenesse a $D_0 + D_0'$, esisterebbero $P \in D$, $Q \in D'$ tali per cui $P_0 - P_0' = (P_0 - P) + (Q - P_0')$.

Allora, facendo agire questo vettore su P_0', $P_0 = Q + (P_0 - P)$. Tuttavia, poiché l'azione di V su E è un'azione di gruppo, esiste un solo punto P' tale per cui $P_0 = P' + (P_0 - P)$, e in particolare $P' = P$. Pertanto $P = Q \implies P \in D'$. Tuttavia $D \cap D' = \varnothing$, $\lightning$. Pertanto $P_0 - P_0' \notin D_0 + D_0'$. In particolare questo equivale a constatare che $(D_0 + D_0') \cap \mathrm{Span}(P_0 - P_0') = \{\underline{0}\}$, ossia ad osservare che:

$$(D+D')_0 = D_0 + D_0' \oplus \mathrm{Span}(P_0 - P_0').$$

Si conclude dunque che $\dim(D+D') = \dim(D_0 + D_0') + \dim \mathrm{Span}(P_0 - P_0') = \dim D + \dim D' - \dim(D_0 \cap D_0') + 1$, da cui la tesi. $\square$

Osservazione. In generale vale che $\mathrm{Span}(P_0 - P_0') \subseteq D_0 + D_0' \iff D \cap D' \neq \varnothing$. Infatti $\mathrm{Span}(P_0 - P_0') \subseteq D_0 + D_0' \iff D \cap D' \neq \varnothing$, come appena dimostrato. Inoltre, se $D \cap D' \neq \varnothing$, esiste un punto $P \in D \cap D'$. Allora $P_0 - P_0' = \underbrace{(P_0 - P)}_{\in D_0} + \underbrace{(P - P_0')}_{\in D_0'} \implies \mathrm{Span}(P_0 - P_0') \subseteq D_0 + D_0'$.

Si poteva dunque dimostrare la *formula di Grassmann* (non modificata, per $D \cap D' \neq \varnothing$) utilizzando questa osservazione, così come si sarebbe potuto dimostrare che $(D+D')_0 = D_0 + D_0'$.

Osservazione (punti fissi di un'applicazione affine)**.** Si consideri un'applicazione affine f di $\mathcal{A}_\mathrm{n}(\mathbb{K})$. Allora esistono $A \in M(n, \mathbb{K}) \setminus \{0\}$ e $\underline{b} \in \mathcal{A}_\mathrm{n}(\mathbb{K})$ tali per cui $f(\underline{x}) = A\underline{x} + \underline{b}\ \forall\, \underline{x} \in \mathcal{A}_\mathrm{n}(\mathbb{K})$. In particolare, f ammette punti fissi se esiste $\underline{x} \in \mathcal{A}_\mathrm{n}(\mathbb{K}) \mid f(\underline{x}) = \underline{x} \iff A\underline{x} + \underline{b} = \underline{x} \iff (A - I)\underline{x} = -\underline{b} \iff \underline{b} \in \mathrm{Im}(A - I)$.

Ciò è sicuramente vero se A non ammette 1 come autovalore (infatti in tal caso $A - I$ è invertibile, e quindi in particolare è surgettiva).

Esempio. Si consideri $f \in A(\mathcal{A}_1(\mathbb{K}))$. Allora esistono $a, b \in \mathcal{A}_1(\mathbb{K})$ tali per cui $f(x) = ax + b\ \forall\, x \in \mathcal{A}_1(\mathbb{K})$.

Se $a \neq 1$ (ossia se non ammette 1 come autovalore), f ammette un punto fisso, ossia $x = -\frac{b}{a-1}$. Altrimenti, se $a = 1$ e $b \neq 0$, f è una traslazione (e quindi non ammette punti fissi). Allora, indicando con $Fix(f) = \{x \in \mathcal{A}_1(\mathbb{K}) \mid f(x) = x\}$ l'insieme dei punti fissi di f, vale sicuramente che $|Fix(f)| \leq 1$, escludendo il caso in cui $a = 1$ e $b = 0$.

Inoltre, vale che $A(\mathcal{A}_1(\mathbb{K}))$ agisce transitivamente su $\mathcal{A}_1(\mathbb{K})$, ossia esiste sempre un'applicazione affine tale per cui $x \mapsto y$, dati x, $y \in \mathcal{A}_1(\mathbb{K})$. Ciononostante $A(\mathcal{A}_1(\mathbb{K}))$ non agisce liberamente su $\mathcal{A}_1(\mathbb{K})$, ed in particolare vale che $\mathrm{Stab}(x) \cong \mathrm{GL}(1, \mathbb{K})$[3]. Un risultato analogo vale anche per gli altri spazi affini: per esempio vale ancora che $\mathrm{Stab}(\underline{x}) \cong \mathrm{GL}(2, \mathbb{K})\ \forall\, \underline{x} \in \mathcal{A}_2(\mathbb{K})$, sull'azione generata da $A(\mathcal{A}_2(\mathbb{K}))$ su $\mathcal{A}_2(\mathbb{K})$.

Infine, date due coppie di punti (P, P') e (Q, Q') con P, P', Q, $Q' \in \mathcal{A}_1(\mathbb{K})$, $P \neq P'$ e $Q \neq Q'$, $A(\mathcal{A}_1(\mathbb{K}))$ agisce in maniera semplicemente transitiva mappando una coppia di punti all'altra[4].

Osservazione (rapporto semplice)**.** Siano P_1, P_2, P_3, Q_1, Q_2 e Q_3 punti di $\mathcal{A}_1(\mathbb{K})$ con P_1, P_2, P_3 distinti e Q_1, Q_2, Q_3 distinti. Allora esiste un'unica applicazione affine f tale per cui $f(P_1) = Q_1$ e $f(P_2) = Q_2$, dacché P_1 e P_2 formano un riferimento affine di $\mathcal{A}_1(\mathbb{K})$.

In particolare f è tale che $f(P_3) = Q_3$ se e solo se, detto $\lambda \in \mathbb{K}$ il parametro tale per cui $P_3 = (1-\lambda)P_1 + \lambda P_2$, $Q_3 = f(P_3) = (1-\lambda)f(P_1) + \lambda f(P_2) = (1-\lambda)Q_1 + \lambda Q_2$, ossia se e solo se λ è lo stesso parametro con cui si scrive Q_2 rispetto al riferimento affine dato da Q_1 e Q_2. In particolare ciò è vero se e solo se vale che $\frac{P_3-P_1}{P_2-P_1} = \lambda = \frac{Q_3-Q_1}{Q_2-Q_1}$.

Il rapporto $\frac{P_3-P_1}{P_2-P_1}$ si dice **rapporto semplice** della terna di punti P_1, P_2 e P_3. Si conclude dunque che tale f esiste (ed è unica) se e solo se i rapporti semplici delle due terne di punti coincidono.

---

[3] È sufficiente mappare ogni affinità alla propria matrice A, dal momento che $\underline{b}$ è già univocamente determinante.

[4] Infatti l'unica applicazione affine che manda una coppia di punti nella stessa coppia di punti è obbligatoriamente l'identità, come visto sopra nello studio di $Fix(f)$. Infine si osserva che esiste sempre un'applicazione che manda una coppia di punti nell'altra.