Criterio della derivata

Def. Sia $f(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \dots + \alpha_n x^n \in F[x]$, dove F è un campo, allora si dice sua derivata $f'(x) = \alpha_1 + \dots + n\alpha_n x^{n-1}$.

OSS. Valgono le usuali proprietà di somma e prodotto della derivata.

Lemma $f(x) \in F[x]$ ha radici multiple se e solo se $f(x)$ e $f'(x)$ hanno in comune un fattore non invertibile.

Se $f(x) \in F[x]$ ha radici multiple, $f(x) = (x-\lambda)^2 q(x)$ con $q(x) \in F[x] \Longrightarrow f'(x) = 2(x-\lambda)q(x) + (x-\lambda)^2 q'(x)$. Quindi $f(x)$ e $f'(x)$ hanno in comune il fattore $(x-\lambda)$.

Se invece $f(x) \in F[x]$ ha radici distinte, $f(x) = (x-\lambda_1) \cdot \ldots \cdot (x-\lambda_n)$ (la costante moltiplicativa è omessa WLOG). Allora $f'(x) = \sum_{i=1}^{n} (x-\lambda_1) \cdots \widehat{(x-\lambda_i)} \cdots$ dove l'operatore $\wedge$ omette il termine i-esimo. Si verifica facilmente che $f'(\lambda_i) \neq 0 \quad \forall\, 1 \leq i \leq n$ (altrimenti esisterebbero $\lambda_i = \lambda_j$ con $i \neq j$, $\lightning$). Pertanto $f(x)$ e $f'(x)$ non condividono alcun fattore. $\boxtimes$

Es. $x^{p^n} - x$ in un campo di caratt. p ha tutte radici distinte. Infatti la sua derivata è

$$\underbrace{p^n x^{p^n - 1}}_{=0} - 1 = -1.$$