

# Note del corso di Geometria 1

Gabriel Antonio Videtta

20 marzo 2023

## Esercitazione: algoritmi per la ricerca del polinomio minimo

**Definizione.** Dato  $f \in \text{End}(V)$ , si definisce come  $\text{val}_{f,\underline{v}}$  l'applicazione lineare da  $\mathbb{K}[x]$  in  $V$  tale che  $\text{val}_{f,\underline{v}}(p) = p(f)(\underline{v})$ .

**Osservazione.** Vi sono varie proprietà che legano  $\text{Ker } \text{val}_{f,\underline{v}}$  a  $\text{Ker } \text{val}_f$ , ed in particolare il generatore monico di  $\text{Ker } \text{val}_{f,\underline{v}}$   $\varphi_{f,\underline{v}}$  a quello  $\varphi_f$  di  $\text{Ker } \text{val}_f$ , ossia al polinomio minimo di  $f$ .

- ▶  $\varphi_{f,\underline{v}} \mid \varphi_f, \forall \underline{v} \in V$ .
- ▶  $\varphi_f = \text{mcm}(\varphi_{f,\underline{v}_1}, \dots, \varphi_{f,\underline{v}_n})$ , dove i  $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n$  formano una base di  $V$ .

**Esempio.** Sia  $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$ . Allora si possono considerare le seguenti catene:

- ▶  $\underline{e}_1 \mapsto 2\underline{e}_1 + \underline{e}_2 + \underline{e}_3 \mapsto 2(2\underline{e}_1 + \underline{e}_2 + \underline{e}_3) + (-\underline{e}_2 + 3\underline{e}_3) + (3\underline{e}_2 - \underline{e}_3) = 4\underline{e}_1 + 4\underline{e}_2 + 4\underline{e}_3 = 4A\underline{e}_1 - 4\underline{e}_1$ . Pertanto  $A^2\underline{e}_1 - 4A\underline{e}_1 + 4\underline{e}_1 = \underline{0}$ . Essendo  $A\underline{e}_1$  e  $\underline{e}_1$  linearmente indipendenti, si conclude che  $\varphi_{A,\underline{e}_1}(x) = x^2 - 4x + 4 = (x-2)^2$ .
- ▶  $\underline{e}_2 \mapsto -\underline{e}_2 + 3\underline{e}_3 \mapsto -(-\underline{e}_2 + 3\underline{e}_3) + 3(3\underline{e}_2 - \underline{e}_3) = 10\underline{e}_2 - 6\underline{e}_3 = -2(-\underline{e}_2 + 3\underline{e}_3) + 8\underline{e}_2$ . Si conclude dunque che  $\varphi_{A,\underline{e}_2}(x) = x^2 + 2x - 8 = (x-2)(x+4)$ .
- ▶  $\underline{e}_3 \mapsto 3\underline{e}_2 - \underline{e}_3 \mapsto 3(-\underline{e}_2 + 3\underline{e}_3) - (3\underline{e}_2 - \underline{e}_3) = -6\underline{e}_2 + 10\underline{e}_3 = -2(3\underline{e}_2 - \underline{e}_3) + 8\underline{e}_3$ . Dunque  $\varphi_{A,\underline{e}_3}(x) = x^2 + 2x - 8 = \varphi_{A,\underline{e}_2}(x)$ .

Pertanto  $\varphi_A(x) = \text{mcm}(\varphi_{A,\underline{e}_1}(x), \varphi_{A,\underline{e}_2}(x), \varphi_{A,\underline{e}_3}(x)) = (x-2)^2(x+4)$ .

**Definizione.** Si dice che un vettore  $\underline{v}$  è *ciclico* su  $f$  se il ciclo  $\text{Span}(\underline{v}, f(\underline{v}), f^2(\underline{v}), \dots)$  coincide con  $V$ .

**Osservazione.** Riguardo all'esistenza di un vettore ciclico si possono fare alcune osservazioni.

- Se esiste un vettore  $\underline{v}$  ciclico rispetto a  $f$ , i primi  $n = \dim V$  vettori del suo ciclo devono essere linearmente indipendenti (altrimenti non potrebbe generare  $V$ ), e quindi  $\varphi_{f,\underline{v}}$  deve avere grado  $n$ . Allora anche  $\varphi_f$  deve avere grado  $n$ , ossia lo stesso grado di  $p_f$ . Allora, dal momento che  $\varphi_f \mid p_f$  e  $\deg \varphi_f = \deg p_f$ , deve valere necessariamente  $\varphi_f = \pm p_f$ .
- Dal momento che  $\varphi_{f,\underline{v}}$  è monico, ha lo stesso grado di  $\varphi_f$  e lo divide, deve anche valere che  $\varphi_{f,\underline{v}} = \varphi_f$ .
- Nella base ordinata  $\mathcal{B}$  costituita dai primi  $n$  vettori del ciclo di  $\underline{v}$ , la matrice associata di  $f$  è della forma:

$$M_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \dots & \dots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \ddots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & 0 & -a_{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix},$$

dove gli  $a_i$  sono i coefficienti di  $\varphi_f(x) = \varphi_{f,\underline{v}} = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0$ .

**Proposizione.** Se  $\mathbb{K}$  è un campo infinito<sup>1</sup>, esiste sempre un vettore  $\underline{v} \in V$  tale che  $\varphi_{f,\underline{v}} = \varphi_f$ .

*Dimostrazione.* Si definisce il seguente insieme:

$$S = \{\varphi_{f,\underline{v}} \mid \underline{v} \in V\}.$$

Poiché  $S$  è un sottoinsieme dei divisori di  $\phi_f$ ,  $S$  è finito. In particolare  $\exists v_1, \dots, v_n$  tali che  $S = \{\varphi_{f,v_1}, \dots, \varphi_{f,v_n}\}$ . Dal momento che ogni  $\underline{v} \in V$  è associato ad un unico polinomio caratteristico, vale che  $V = \bigcup_{i=1}^n \text{Ker } \varphi_{f,v_i}$ . Tuttavia, se tutti i  $\text{Ker } \varphi_{f,v_i}$  fossero propri, questo sarebbe impossibile, dal momento che uno spazio vettoriale fondato su un campo finito non può essere unione finita di sottospazi propri. Quindi  $V = \text{Ker } \varphi_{f,v_i}$  per un  $i$  tale che  $1 \leq i \leq n$ . Allora  $\varphi_f \mid \varphi_{f,v_i}$ , da cui si ricava l'uguaglianza.  $\square$

**Teorema 1.** Lo spazio  $V$  ammette un vettore ciclico su  $f \in \text{End}(V)$  se e solo se  $p_f = \pm \varphi_f$ .

<sup>1</sup>In realtà la tesi è vera per qualsiasi campo, benché la dimostrazione che è stata fornita sia valida solo per campi infiniti.

*Dimostrazione.* Si dimostrano le due implicazioni separatamente.

(  $\implies$  ) Dall'osservazione precedente.

(  $\impliedby$  ) Dalla proposizione precedente esiste sicuramente un vettore  $\underline{v}$  tale che  $\varphi_{f,\underline{v}} = \varphi_f$ . Allora, essendo  $\varphi_f = \pm p_f$ , deve valere che  $p_f = \pm \varphi_{f,\underline{v}}$ , ossia che la minima combinazione lineare linearmente dipendente di  $\underline{v}, \dots, f^k(\underline{v})$  si può ottenere coinvolgendo almeno  $n + 1$  termini (i.e. con  $k \geq n$ ). Allora i vettori  $\underline{v}, \dots, f^{n-1}(\underline{v})$  sono linearmente indipendenti, ed essendo in totale  $n$  formano una base di  $V$ . Pertanto  $V = \text{Span}(\underline{v}, f(\underline{v}), \dots)$ .  $\square$

**Esempio.** Riprendendo l'esempio di prima,  $\varphi_A(x) = (x-2)^2(x+4)$ . Poiché  $\deg p_A = 3$ , allora  $\varphi_A(x) = p_A(x)$ . Allora per il teorema appena dimostrato deve necessariamente esistere un vettore ciclico di  $\mathbb{R}^3$  su  $A$ .

In effetti, posto  $\underline{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}$ , si ottiene che  $\underline{v}, A\underline{v}$  e  $A^2\underline{v}$  sono linearmente indipendenti, e sono dunque una base  $\mathcal{B}$  di  $\mathbb{R}^3$ . In particolare, la matrice associata su questa base è la seguente:

$$M_{\mathcal{B}}(A) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -16 \\ 1 & 0 & 12 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

proprio come ci aspettavamo che venisse da una delle osservazioni iniziali, dal momento che  $\varphi_A(x) = (x-2)^2(x+4) = x^3 - 12x + 16$ .