Appunti di Aritmetica

Gabriel Antonio Videtta

16 settembre 2022

Indice

Capitolo 1

Teoria degli insiemi

Il concetto di insieme è primitivo e pertanto non definito formalmente in questa sede. Viene tuttavia definita la terminologia che riguarda le teoria dei suddetti insiemi.

Quando si leggerà $a \in S$, s'intenderà che "a appartiene all'insieme S", mentre $a \notin S$ si legge "a non appartiene all'insieme S". Un insieme A si dice sottoinsieme di B ($A \subseteq B$) quando $a \in A \rightarrow a \in B$; in particolare si dice sottoinsieme proprio di B ($A \subset B$) quando $A \subseteq B \wedge \exists\, b \in B \mid b \notin A$.

Due insiemi A e B sono uguali se e solo se $A \subseteq B \wedge B \subseteq A$. L'insieme vuoto è l'insieme che non ha elementi, ed è sottoinsieme di ogni insieme.

1.1 L'operazione di unione

L'unione di due insiemi A e B è un'operazione che restituisce un insieme $A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$.

Tale operazione si può estendere a più insiemi mediante l'introduzione di un *insieme di indici* T per una famiglia di insiemi. Un insieme di indici T rispetto a un famiglia $F = \{A_t\}$ ha la seguente proprietà: $\forall\, t \in T, \exists\, A_t \in F$; ossia è in grado di enumerare gli insiemi della famiglia F.

L'unione è pertanto definita su una famiglia F come $\bigcup_{t \in T} A_t = \{x \mid (\exists\, t \in T \mid x \in A_t)\}$.

L'unione gode delle seguente proprietà: $A \subseteq B \rightarrow A \cup B = B$ (in particolare, $A \cup \varnothing = A$).

1.2 L'operazione di intersezione

Analogamente a come è stata definita l'unione, l'intersezione è un'operazione che resistuisce un insieme $A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$; ossia estesa a più insiemi: $\bigcap_{t \in T} A_t = \{x \mid (\forall\, t \in T \mid x \in A_t)\}$.

In modo opposto all'unione, l'intersezione è tale per cui $A \subseteq B \rightarrow A \cap B = A$ (in particolare, $A \cap \varnothing = \varnothing$).

1.2.1 Relazioni tra l'operazione di intersezione e di unione

Si può facilmente dimostrare la seguente relazione, valida per qualunque scelta di insiemi A, B e C: $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$.

Dimostrazione. Prima di tutto, un elemento di entrambi i due insiemi appartiene obbligatoriamente a C: nel caso del primo membro, il motivo è banale; riguardo al secondo membro, invece, ci accorgiamo che esso appartiene almeno a uno dei due insiemi dell'unione, riconducendoci a un'intersezione con l'insieme C.

Ogni elemento di $(A \cup B) \cap C$ appartiene inoltre ad almeno A o B, e quindi, appartenendo anche a C, appartiene a $A \cap C$ o $B \cap C$, e quindi a $(A \cap C) \cup (B \cap C)$. Pertanto $(A \cup B) \cap C \subseteq (A \cap C) \cup (B \cap C)$.

In direzione opposta, ogni elemento di $(A \cap C) \cup (B \cap C)$ appartiene almeno ad uno di dei due insiemi dell'unione. Per appartenere all'intersezione, tale elemento appartiene ad almeno A o B; e quindi appartiene ad $A \cup B$. Appartenendo anche a C, appartiene anche $(A \cup B) \cap C$. Quindi $(A \cap C) \cup (B \cap C) \subseteq (A \cup B) \cap C$.

Valendo l'inclusione in entrambe le direzioni, $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$. ∎

1.3 L'operazione di sottrazione e di complemento

L'operazione di sottrazione su due insiemi A e B è definita come $A \setminus B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$. Si può facilmente verificare che $A = (A \cap B) \cup (A \setminus B)$.

Dimostrazione. Ogni elemento di A può appartenere o non appartenere a B: nel primo caso, appartiene anche a $A \cap B$, e quindi a $(A \cap B) \cup (A \setminus B)$; altrimenti appartiene per definizione a $A \setminus B$, e quindi sempre a $(A \cap B) \cup (A \setminus B)$. Pertanto $A \subseteq (A \cap B) \cup (A \setminus B)$.

Ogni elemento di $(A \cap B) \cup (A \setminus B)$ appartiene ad almeno uno dei due operandi dell'unione; in entrambi i casi deve appartenere ad A. Quindi $(A \cap B) \cup (A \setminus B) \subseteq A$. ∎

In particolare, se $B \subseteq A$, $A \setminus B$ si dice **complemento di B in A**.

L'operazione di complemento viene indicata con A' qualora sia noto l'universo di riferimento U per cui $A' = U \setminus A$.

1.3.1 Le leggi di De Morgan

Si possono dimostrare le seguenti proprietà:

- $(A \cup B)' = A' \cap B'$
- $(A \cap B)' = A' \cup B'$

Prima legge di De Morgan. Un elemento che appartiene a $(A \cup B)'$ non appartiene né a A né a B, e quindi appartiene sia a A' che a B', pertanto anche alla loro intersezione $A' \cap B'$ $[(A \cup B)' \subseteq A' \cap B']$.

Allo stesso modo, un elemento di $A' \cap B'$ non appartiene né ad A né a B, e quindi non appartiene ad $A \cup B$, appartenendo dunque a $(A \cup B)'$ $[A' \cap B' \subseteq (A \cup B)']$. Pertanto $(A \cup B)' = A' \cap B'$. ∎

Seconda legge di De Morgan. Un elemento che appartiene a $(A \cap B)'$ può appartenere al più ad A o esclusivamente a B; pertanto appartiene ad almeno A' o B', e qunidi alla loro unione $[(A \cap B)' \subseteq A' \cup B']$.

Allo stesso modo, un elemento di $A' \cup B'$ appartiene ad almeno A' o B', e quindi non può appartenere a entrambi A e B, appartenendo dunque a $(A \cap B)'$ $[A' \cup B' \subseteq (A \cap B)']$. Pertanto $(A \cap B)' = A' \cup B'$. ■

1.3.2 La logica affrontata con gli insiemi

In modo veramente interessante, ogni operatore logico segue la logica dell'insiemistica (e viceversa); laddove l'operatore $\cup$ (o $\cap$) ha una certa proprietà, la soddisfa anche $\vee$ (o $\wedge$).

Quindi valgono tutte le leggi sopracitate:

- $(a \vee b) \wedge c = (a \wedge c) \vee (b \wedge c)$
- $(a \wedge b) \vee c = (a \vee c) \wedge (b \vee c)$
- $\neg(a \wedge b) = \neg a \vee \neg b$
- $\neg(a \vee b) = \neg a \wedge \neg b$

1.4 Il prodotto cartesiano

Il prodotto cartesiano di una famiglia ordinata di insiemi F con un certo insieme di indici T è l'insieme $\bigtimes_{t \in T} A_t = \{(a_{t_0}, a_{t_1}, \ldots) \mid a_{t_0} \in A_{t_0} \wedge a_{t_1} \in A_{t_1} \wedge \ldots\}$. In particolare, il prodotto cartesiano di due due insiemi A e B si indica con $A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \wedge b \in B\}$.

Una n-tupla ordinata, ossia la forma in cui è raccolto un certo elemento di un prodotto cartesiano, è uguale ad una altra tupla se e solo se ogni elemento di una tupla è uguale a quello corrispondente in ordine dell'altra: pertanto, in generale, $(a, b) \neq (b, a)$.

Inoltre, il prodotto cartesiano $A \times A$ viene indicato con A^2 (analogamente, $A^n = \bigtimes_{i=1}^{n} A$).