

# Note del corso di Fisica 1

Gabriel Antonio Videtta

21 marzo 2023

## Moto di un corpo in un mezzo viscoso

**Definizione.** Si definisce *forza viscosa* una particolare forza analoga a quella di attrito, dipendente dalla sola velocità in un corpo omogeneo.

**Osservazione.** Riguardo la forza viscosa si possono enumerare alcune proprietà.

- ▶ Come la forza di attrito, la forza viscosa ha verso contrario rispetto alla velocità ( $\vec{F} = -\hat{v}$ ).
- ▶ In base alle caratteristiche del mezzo nel quale il corpo si muove, esiste una certa velocità critica  $v_{cr}$  tale per cui  $v < v_{cr} \implies \vec{F} = -\beta\vec{v}$ , dove  $\beta$  è una costante positiva (**legge di Stokes**).
- ▶ Per  $v > v_{cr}$ , la legge di Stokes non è più valida.

**Esempio.** Un esempio di forza viscosa è la resistenza aerodinamica al moto del proiettile, spesso trascurata.

**Osservazione.** La costante  $\beta$  della legge di Stokes dipende dalla viscosità del mezzo e dalle dimensioni e dalla forma del corpo.

**Esempio.** (senza alcuna forza) Si pongano le condizioni  $t_0 = 0$  e  $\vec{v}_0 = \vec{v}(t_0) \neq 0$ . Se non agiscono altre forze sul corpo, si starà allora trattando un moto unidimensionale. Si considera allora il seguente sistema di equazioni:

$$\begin{cases} F = ma, \\ F = -\beta v, \end{cases}$$

da cui si ricava che:

$$ma = -\beta v \implies \dot{v} = -\frac{\beta}{m}v.$$

Si definisce la costante  $\tau = \frac{m}{\beta}$ , la cui unità di misura è il secondo. L'eq. differenziale si riscrive allora come:

$$\dot{v} = -\frac{1}{\tau}v.$$

Risolvendo quest'eq. differenziale, si ottiene allora dunque che:

$$v(t) = ce^{-\frac{t}{\tau}}.$$

Poiché  $c = v(t_0) = v_0$ , si conclude dunque che:

$$\begin{cases} v(t) = v_0 e^{-\frac{t}{\tau}}, \\ a(t) = -\frac{1}{\tau}v(t). \end{cases}$$

In particolare, integrando la velocità, si ottiene lo spostamento:

$$x(t) = \int_{t_0}^t v(t)dt = x_0 + v_0\tau(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}).$$

Quindi, la distanza percorsa all'infinito<sup>1</sup> è data da  $x_\infty - x_0 = v_0\tau$ , dove  $x_\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = x_0 + v_0\tau$ .

**Osservazione.** Si osserva che la velocità inizia a diventare trascurabile dopo alcuni periodi di  $\tau$ .

**Esempio.** (con forza di gravità<sup>2</sup>) Si supponga che  $\vec{v}_0$  ed  $\vec{F} = \vec{F}_0$  siano paralleli, e che dunque il moto sia ancora completamente unidimensionale. Si deve ora considerare il seguente sistema di forze:

$$\begin{cases} \vec{F}_v = -\beta\vec{v}, \\ \vec{F} = \vec{F}_0 = m\vec{g}, \end{cases}$$

ossia, passando alle coordinate unidimensionali:

$$\begin{cases} F_v = -\beta v, \\ F = mg. \end{cases}$$

Da questo sistema si ottiene l'eq. del sistema:

$$F = mg - \beta v \implies m\dot{v} = mg - \beta v \implies \dot{v} = g - \frac{1}{\tau}v,$$

<sup>1</sup>Ossia, con buona approssimazione, dopo alcuni periodi di  $\tau$ .

<sup>2</sup>In generale, con qualsiasi forza costante.

ossia un'eq. differenziale la cui associata omogenea è esattamente quella analizzata nello scorso esempio. Allora la soluzione generale è data dalla somma della soluzione omogenea a quella particolare  $v = \tau g$ , detta *velocità limite*  $v_{lim}$ :

$$v(t) = ce^{-\frac{t}{\tau}} + \tau g.$$

Ponendo allora  $v(0) = v_0$ , si ricava che  $v_0 = c - \tau g \implies c = v_0 + \tau g$ . Quindi si conclude che:

$$v(t) = (v_0 - v_{lim})e^{-\frac{t}{\tau}} + v_{lim},$$

da cui chiaramente si osserva che  $v(t) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} v_{lim}$ .

**Esempio.** (approssimazione al moto uniformemente accelerato) Si assumano  $t \ll \tau$  e  $v_0 \ll v_{lim}$ . Allora  $\frac{t}{\tau} \ll 1$ . Pertanto si può approssimare  $e^{-\frac{t}{\tau}}$  con  $1 - \frac{t}{\tau}$ . In questo modo si ricava che:

$$v(t) = (v_0 - v_{lim})\left(1 - \frac{t}{\tau}\right) + v_{lim} = v_0 - \frac{v_0}{\tau}t + \frac{v_{lim}}{\tau}t \overset{v_0 \ll v_{lim}}{\approx} v_0 + \frac{v_{lim}}{\tau}t = v_0 + gt,$$

ossia che il moto, considerate queste assunzioni, è ben approssimato da un moto uniformemente accelerato.

## Lavoro ed energia

Supponiamo che su un corpo di massa  $m$  agisca una sola forza costante  $\vec{F}$  (e quindi che ci si stia riferendo ad un caso unidimensionale). Supponiamo ancora che in questa semplificazione il corpo si sia spostato di una lunghezza  $\Delta x$  dal punto  $A$  al punto  $B$ . In questo caso si chiamerà lavoro svolto dalla forza  $\vec{F}$  sul corpo la quantità scalare:

$$L_{AB} = F\Delta x.$$

In generale, dato il vettore spostamento  $\Delta\vec{r}$ , se  $\vec{F}$  non è l'unica forza che agisce sul corpo, si ricava che il lavoro è il seguente:

$$L_{AB} = \vec{F} \cdot \Delta\vec{r}.$$

**Osservazione.** Si osservano le seguenti proprietà.

► Se la proiezione di  $\vec{F}$  sul vettore spostamento ha direzione opposta a  $\Delta\vec{r}$  (ossia se l'angolo compreso tra i due vettori è maggiore a  $\frac{\pi}{2}$ ), il lavoro è negativo.

► Il lavoro è additivo:  $L_{AC} = L_{AB} + L_{BC}$ .

► Il lavoro da  $A$  a  $B$ , se  $\vec{F}$  non è costante, può essere ricavato come una somma degli infinitesimi lavori compiuti dalla forza, ossia:

$$dL_{AB} = \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r},$$

da cui si ricava la fondamentale identità che coinvolge un integrale di linea:

$$L_{AB} = \int_{\gamma(A,B)} \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r},$$

dove  $\gamma(A, B)$  è la traiettoria percorsa dal corpo negli estremi  $A$  e  $B$ .