

# Note del corso di Geometria 1

Gabriel Antonio Videtta

10 maggio 2023

## Quadriche e classificazione affine delle coniche

**Nota.** Nel corso del documento si assume  $\text{char } \mathbb{K} \neq 2$ .

**Definizione** (quadriche). Si dice **quadrica** il luogo di zeri di un polinomio  $p \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$  con  $\deg p = 2$ .

**Definizione** (coniche). Si dice **conica** una quadrica relativa ad un polinomio in due variabili.

**Osservazione.**

► Una quadrica è invariante per la relazione  $\sim$  su  $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ , dove  $p_1 \sim p_2 \stackrel{\text{def}}{\iff} \exists \alpha \in \mathbb{K}^* \mid p_1 = \alpha p_2$ . Infatti il luogo di zeri di un polinomio non varia se esso viene moltiplicato per una costante non nulla di  $\mathbb{K}$ .

► Una quadrica può essere vuota (come nel caso della conica relativa a  $x^2 + y^2 + 1$  in  $\mathbb{R}$ ).

► Si identifica con la notazione  $p(\underline{x})$  con  $\underline{x} \in \mathbb{K}^n$ , la valutazione del polinomio  $p$  nelle coordinate di  $\underline{x}$ . Per esempio, se  $\underline{x} = (1, 2)$  e  $p(x, y) = x^2 + y^2$ , con  $p(\underline{x})$  si identifica il valore  $p(1, 2) = 1^2 + 2^2 = 5$ .

**Osservazione** (riscrittura di  $p$  mediante matrici). Sia  $p \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$  di grado due. Allora  $p$  si può sempre scrivere come  $p_2 + p_1 + p_0$ , dove  $p_i$  è un polinomio omogeneo contenente soltanto monomi di grado  $i$ .

In particolare,  $p_2(x_1, \dots, x_n)$  può essere sempre riscritto come  $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i x_j$  con  $a_{ij} \in \mathbb{K}$  con  $a_{ij} = a_{ji}$ . È infatti sufficiente "sdoppiare" il coefficiente  $c_{ij}$  di  $x_i x_j$  in due metà, in modo tale che  $c_{ij} x_i x_j = \frac{c_{ij}}{2} x_i x_j + \frac{c_{ij}}{2} x_i x_j = \frac{c_{ij}}{2} x_i x_j + \frac{c_{ij}}{2} x_j x_i$ . Inoltre, anche  $p_1(x_1, \dots, x_n)$  può essere riscritto come  $\sum_{i=1}^n b_i x_i$ .

Si possono allora considerare la matrice  $A \in M(n, \mathbb{K})$  ed il vettore  $\underline{b} \in \mathbb{K}^n$ , definiti in modo tale che:

$$A = (a_{ij})_{i,j=1-n}, \quad \underline{b} = (b_i)_{i=1-n} \in \mathbb{K}^n.$$

Infatti,  $A$  e  $\underline{b}$  soddisfano la seguente identità:

$$p(\underline{x}) = \underline{x}^\top A \underline{x} + \underline{b}^\top \underline{x} + c,$$

che, riscritta tramite l'identificazione di  $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$  come l'iperpiano  $H_{n+1} \in \mathcal{A}_{n+1}(\mathbb{K})$ , diventa:

$$p(\underline{x}) = \hat{\underline{x}}^\top \hat{A} \hat{\underline{x}}, \quad \text{dove } \hat{A} = \left( \begin{array}{c|c} A & \underline{b}/2 \\ \hline \underline{b}^\top/2 & c \end{array} \right).$$

Si osserva che  $\hat{A}$  è una matrice simmetrica di taglia  $n+1$  a elementi in  $\mathbb{K}$ , e in quanto tale essa induce un prodotto scalare su  $\mathbb{K}^{n+1}$ . Pertanto la quadrica relativa  $p$  è esattamente l'intersezione tra  $H_{n+1}$  e  $\text{CI}(\hat{A})$ , identificando  $\mathbb{K}^{n+1}$  come  $H_{n+1}$ , ossia la quadrica è esattamente  $\iota^{-1}(H_{n+1} \cap \text{CI}(\hat{A}))$ .

**Definizione** (matrice associata ad una quadrica). Si definisce la costruzione appena fatta di  $\hat{A}$  come la **matrice associata alla quadrica relativa a  $p$** , e si indica con  $\mathcal{M}(p)$ . In particolare,  $A$  è detta la matrice che rappresenta la *parte quadratica*, e si indica con  $\mathcal{A}(p)$ , mentre  $\underline{b}/2$  rappresenta la *parte lineare*, indicata con  $\mathcal{L}(p)$ , e  $c = c(p)$  è detto *termine noto*.

**Definizione** (azione di  $A(\mathcal{A}_n(\mathbb{K}))$  su  $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ ). Sia  $f \in A(\mathcal{A}_n(\mathbb{K}))$ . Allora  $A(\mathcal{A}_n(\mathbb{K}))$  agisce (a destra) su  $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$  in modo tale che  $p' = p \circ f$  è un polinomio per cui  $p'(\underline{x}) = p(f(\underline{x}))$ .

**Definizione** (equivalenza affine tra polinomi e quadriche). Si dice che due polinomi  $p_1, p_2 \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$  sono affinementemente equivalenti se e solo se  $\exists f \in A(\mathcal{A}_n(\mathbb{K})) \mid p_1 = p_2 \circ f$ . In tal caso si scrive che  $p_1 \sim p_2$ . Analogamente due quadriche si dicono affinementemente equivalenti se i relativi polinomi sono affinementemente equivalenti.

**Osservazione.**

- L'equivalenza affine è una relazione di equivalenza.
- Sia  $Z(p)$  il luogo di zeri di  $p$ . Allora,  $p_1 \sim p_2 \implies \exists f \in A(\mathcal{A}_n(\mathbb{K})) \mid Z(p_2) = f(Z(p_1))$ .
- In generale, se  $p_1 = p_2 \circ f$ , vale che  $Z(p_2) = f(Z(p_1))$ .
- Dal momento che  $A(\mathcal{A}_n(\mathbb{K}))$  su  $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$  è un'azione (destra) di gruppo, vale che  $(p \circ f_1) \circ f_2 = p \circ (f_1 \circ f_2) \forall f_1, f_2 \in A(\mathcal{A}_n(\mathbb{K})), p \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ .

**Proposizione** (formula del cambiamento della matrice associata su azione di  $A(\mathcal{A}_n(\mathbb{K}))$ ). Sia  $f \in A(\mathcal{A}_n(\mathbb{K}))$  e sia  $p \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$  di grado due. Allora vale la seguente identità:

$$\mathcal{M}(p \circ f) = \hat{M}^\top \mathcal{M}(p) \hat{M} = \left( \begin{array}{c|c} M^\top \mathcal{A}(p) M & M^\top (\mathcal{A}(p) \underline{t} + \mathcal{L}(p)) \\ \hline (M^\top (\mathcal{A}(p) \underline{t} + \mathcal{L}(p)))^\top & p(\underline{t}) \end{array} \right),$$

con  $\hat{M} = \left( \begin{array}{c|c} M & \underline{t} \\ \hline 0 & 1 \end{array} \right)$ , dove  $f(\underline{x}) = M\underline{x} + \underline{t} \forall \underline{x} \in \mathbb{K}^n$  con  $M \in \text{GL}(n, \mathbb{K})$  e  $\underline{t} \in \mathbb{K}^n$ .

*Dimostrazione.* Per definizione,  $p \circ f$  è tale che  $(p \circ f)(\underline{x}) = p(f(\underline{x})) = p(M\underline{x} + \underline{t})$ . In particolare,  $(p \circ f)(\underline{x}) = \widehat{(M\underline{x} + \underline{t})}^\top \mathcal{M}(p) \widehat{(M\underline{x} + \underline{t})} = \left( \widehat{M\underline{x}} \right)^\top \mathcal{M}(p) \left( \widehat{M\underline{x}} \right)$ . Pertanto vale che:

$$(p \circ f)(\underline{x}) = \hat{\underline{x}}^\top \hat{M}^\top \mathcal{M}(p) \hat{M} \hat{\underline{x}} \implies \mathcal{M}(p \circ f) = \hat{M}^\top \mathcal{M}(p) \hat{M},$$

da cui la tesi. □

**Osservazione.**

► Per la proposizione precedente, due matrici, associate a due polinomi di secondo grado affinementemente equivalenti, variano per congruenza, così come le matrici della parte quadratica.

Pertanto  $\text{rg}(\mathcal{M}(p \circ f)) = \text{rg}(\mathcal{M}(p))$ , come  $\text{rg}(\mathcal{A}(p \circ f)) = \text{rg}(\mathcal{A}(p))$  (così come, per  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ , non variano i segni dei vari determinanti). Allo stesso tempo, la classe di equivalenza di  $\mathcal{M}(p)$  è rappresentata completamente per  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$  (tramite il rango) e per  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  (tramite la segnatura), per il teorema di Sylvester.

► Se  $f$  è una traslazione,  $M = I_n$ , e dunque la formula si riduce alla seguente:

$$\mathcal{M}(p \circ f) = \left( \begin{array}{c|c} \mathcal{A}(p) & \mathcal{A}(p)\underline{t} + \mathcal{L}(p) \\ \hline (\mathcal{A}(p)\underline{t} + \mathcal{L}(p))^\top & p(\underline{t}) \end{array} \right).$$

In particolare, non varia la matrice relativa alla parte quadratica, ossia vale che  $\mathcal{A}(p \circ f) = \mathcal{A}(p)$ .

► Se  $\lambda \in \mathbb{K}^*$ ,  $\mathcal{M}(\lambda p) = \lambda \mathcal{M}(p)$ , dal momento che  $\mathcal{A}(\lambda p) = \lambda \mathcal{A}(p)$ , così come  $\mathcal{L}(\lambda p) = \lambda \mathcal{L}(p)$  e  $c(\lambda p) = \lambda c(p)$ . Tuttavia, a differenza del cambio di matrice per equivalenza affine, per  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  la segnatura non è più un invariante (infatti, in generale  $\sigma(-S) = (\iota_-(S), \iota_+(S), \iota_0(S))$ , se  $S \in \text{Sym}(n, \mathbb{R})$ ). Ciononostante non varia, in valore assoluto, la differenza tra l'indice di positività e quello di negatività, ossia  $S(\mathcal{M}(p)) := |\iota_+ - \iota_-|$  continua ad essere invariante.

► Vale sempre la disuguaglianza  $\text{rg}(\mathcal{M}(p)) \geq \text{rg}(\mathcal{A}(p)) \geq 1$ , dal momento che  $\mathcal{A}(p)$  è una sottomatrice di  $\mathcal{M}(p)$  e che  $p$ , per definizione di quadrica, contiene sempre un termine quadratico (e dunque la matrice  $\mathcal{A}(p)$  non è mai nulla).

**Definizione** (quadrica non degenera). Una quadrica relativa a  $p \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$  si dice **non degenera** se  $\text{rg}(\mathcal{M}(p)) = n + 1$  (ossia se  $\det(\mathcal{M}(p)) \neq 0$ ), e altrimenti si dice degenera. In particolare, una conica si dice *non degenera* se  $\text{rg}(\mathcal{M}(p)) = 3$  e degenera altrimenti.

**Definizione** (quadrica a centro). Una quadrica  $C$  relativa a  $p \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$  (o  $p$  stesso) si dice **a centro** se  $\exists \underline{x}_0 \in \mathbb{K}^n \mid p(\underline{x}_0 + \underline{x}) = p(\underline{x}_0 - \underline{x}) \forall \underline{x} \in \mathbb{K}^n$ . In particolare, si dice che tale  $\underline{x}_0$  è un **centro di simmetria** per  $C$ .

**Osservazione.**

► Si osserva che  $\underline{0}$  è un centro di simmetria per  $p$  se  $p(\underline{x}) = p(-\underline{x})$ , ossia se e solo se la parte lineare  $\mathcal{L}(p)$  è nulla.

► Allora  $\underline{x}_0$  è un centro di simmetria per  $p$  se e solo se  $\underline{0}$  è un centro di simmetria per  $p \circ f$ , dove  $f$  è la traslazione che manda  $\underline{0}$  in  $\underline{x}_0$ . Infatti, in tal caso, vale che  $f(\underline{x}) = \underline{x} + \underline{x}_0$  e che:

$$(p \circ f)(\underline{x}) = p(\underline{x} + \underline{x}_0) = p(\underline{x} - \underline{x}_0) = (p \circ f)(-\underline{x}).$$

► Per le osservazioni precedenti, vale allora che  $\underline{x}_0$  è un centro di simmetria per  $p$  se e solo se la parte lineare di  $p \circ f$  è nulla, ossia se e solo se  $\underline{x}_0$  è tale che  $\mathcal{A}(p)\underline{x}_0 + \mathcal{L}(p)$ . Pertanto  $p$  è a centro se e solo se il sistema

$\mathcal{A}(p)\underline{x} = -\mathcal{L}(p)$  è risolvibile, e quindi se e solo se  $\text{rg}(\mathcal{A}(p) \mid \mathcal{L}(p)) = \text{rg}(\mathcal{A}(p)) \iff \mathcal{L}(p) \in \text{Im}(\mathcal{A}(p))$ , per il teorema di Rouché-Capelli. Vale dunque che  $p$  è sempre a centro, se  $\mathcal{A}(p)$  è invertibile.

Poiché i centri di una conica sono esattamente le soluzioni del sistema lineare  $\mathcal{A}(p)\underline{x} = -\mathcal{L}(p)$ , essi formano un sottospazio affine. In particolare, se  $\underline{x}_0$  è un centro, vale che tale sottospazio è esattamente  $\underline{x}_0 + \text{Ker } \mathcal{A}(p)$ . Pertanto, se  $\mathcal{A}(p)$  è invertibile (ossia se è iniettiva), il centro è unico.

**Teorema** (classificazione delle coniche complesse). Sia  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ . Allora ogni conica è affinementemente equivalente ad un'equazione canonica della seguente tabella, unicamente determinata dagli invarianti  $\text{rg}(\mathcal{M}(p))$  e  $\text{rg}(\mathcal{A}(p))$ .

	$\text{rg}(\mathcal{M}(p))$	$\text{rg}(\mathcal{A}(p))$	Equazione canonica	A centro
$\mathcal{C}_1$	3	2	$x^2 + y^2 = 1$	Sì
$\mathcal{C}_2$	3	1	$x^2 = y$	No
$\mathcal{C}_3$	2	2	$x^2 + y^2 = 0$	Sì
$\mathcal{C}_4$	2	1	$x^2 = 1$	Sì
$\mathcal{C}_5$	1	1	$x^2 = 0$	Sì

*Dimostrazione.* La classificazione è completa perché sono comprese tutte le possibili scelte di rango. Inoltre tale classificazione è ben definita, dal momento che due coniche distinte della tabella differiscono di almeno un'invariante, e pertanto non possono essere affinementemente equivalenti. Pertanto, se esiste, una conica è affinementemente equivalente ad una sola delle coniche presenti nella tabella.

Sia allora  $\mathcal{C}$  una conica relativa al polinomio  $p \in \mathbb{C}[x, y]$ . Se  $\text{rg}(\mathcal{A}(p)) = 2$ , allora, per il teorema di Sylvester complesso, esiste una matrice  $M \in \text{GL}(2, \mathbb{C})$  tale per cui  $M^T \mathcal{A}(p) M = I_2$ .

Si consideri allora l'affinità  $f_1 \in A(\mathcal{A}_2(\mathbb{C}))$  tale per cui  $f_1(\underline{x}) = M\underline{x} + \underline{t}$ , dove  $\underline{t} = -\mathcal{A}(p)^{-1}\underline{b}$ . Se  $p_1 = p \circ f_1$ , allora, per la formula di cambiamento della matrice associata, vale che:

$$\mathcal{M}(p_1) = \mathcal{M}(p \circ f_1) = \left( \begin{array}{c|c} I_2 & 0 \\ \hline 0 & p(\underline{t}) \end{array} \right).$$

Se  $\text{rg}(\mathcal{M}(p)) = 2$ ,  $c(p_1) = p(\underline{t})$  è nullo (altrimenti i ranghi di  $\mathcal{M}(p)$  e  $\mathcal{M}(p_1)$  sarebbero diversi; assurdo, dal momento che il rango di  $\mathcal{M}(p)$  è invariante per equivalenza affine,  $\mathcal{f}$ ). In tal caso  $p_1$  è il polinomio  $x^2 + y^2$ , e dunque  $\mathcal{C}$  è affinementemente equivalente a  $\mathcal{C}_3$  tramite l'identità  $p_1 = p \circ f_1$ .

Se invece  $\text{rg}(\mathcal{M}(p)) = 3$ ,  $c' := c(p_1)$  non è nullo, e dunque  $p_1$  è il polinomio  $x^2 + y^2 + c'$ . Considerando allora  $f_2 \in A(\mathcal{A}_2(\mathbb{C}))$  tale che  $f_2(\underline{x}) = \sqrt{-c'}\underline{x}$ , si ottiene che  $p_2 = p_1 \circ f_2$  è tale per cui:

$$\mathcal{M}(p_2) = -c' \left( \begin{array}{c|c} I_2 & 0 \\ \hline 0 & -1 \end{array} \right),$$

ossia  $p_2$  è il polinomio  $c'(x^2 + y^2 - 1) = 0$ . Poiché  $c'$  è diverso da zero,  $p_2$  ha lo stesso luogo di zeri di  $x^2 + y^2 - 1$ , ossia  $p_2$  è legato alla conica  $\mathcal{C}_1$ . Si conclude dunque che  $p$  e  $p_2$  sono affinemente equivalenti tramite l'identità  $p_2 = p \circ (f_1 \circ f_2)$ .

Sia ora invece  $\text{rg}(\mathcal{A}(p)) = 1$ . Allora, sempre per il teorema di Sylvester complesso, esiste  $M \in \text{GL}(2, \mathbb{C})$  tale per cui:

$$B := M^\top \mathcal{A}(p) M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Si consideri allora l'affinità  $f_1 \in A(\mathcal{A}_2(\mathbb{C}))$  tale per cui  $f_1(\underline{x}) = M\underline{x}$ . Allora, se  $p_1 = p \circ f_1$ , vale che:

$$\mathcal{M}(p_1) = \mathcal{M}(p \circ f_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & b_1 \\ 0 & 0 & b_2 \\ b_1 & b_2 & c(p) \end{pmatrix},$$

dove  $(b_1, b_2)^\top = M^\top \mathcal{L}(p)$ . Se  $\text{rg}(\mathcal{M}(p)) = 3$ ,  $b_2$  è necessariamente non nullo (altrimenti  $\text{rg}(\mathcal{M}(p \circ f_1)) \leq 2$ ,  $\neq$ ). Si consideri allora l'affinità  $f_2 \in A(\mathcal{A}_2(\mathbb{C}))$  tale che  $f_2(\underline{x}) = \underline{x} - \underline{t}_1$ , dove  $\underline{t}_1 = (-b_1, 0)^\top$ . Allora, se  $p_2 = p_1 \circ f_2$ , vale che:

$$\mathcal{M}(p_2) = \mathcal{M}(p_1 \circ f_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_2 \\ 0 & b_2 & c' \end{pmatrix},$$

dove  $c' := p_1(\underline{t}_1)$ . Pertanto  $p_2$  è il polinomio  $x^2 + 2b_2y + c'$ . Si cerca adesso di eliminare il termine noto considerando una traslazione di vettore  $\underline{t}_2$  in modo tale che  $p_2(\underline{t}_2) = 0$  e che rimanga invariata la parte lineare. Se  $\underline{t}_2 = (x', y')^\top$ , si considera  $x' = 0$  in modo tale da lasciare invariata la parte lineare e si cerca  $y'$  in modo tale che:

$$2b_2y' + c' = 0 \implies y' = -\frac{c'}{2b_2}.$$

Sia dunque  $f_3 \in A(\mathcal{A}_2(\mathbb{C}))$  tale che  $f_3(\underline{x}) = \underline{x} + \underline{t}_2$ . Se  $p_3 = p_2 \circ f_3$ , vale allora che:

$$\mathcal{M}(p_3) = \mathcal{M}(p_2 \circ f_3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_2 \\ 0 & b_2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Pertanto  $p_3$  è il polinomio  $x^2 + 2b_2y$ . Sostituendo allora  $y \mapsto -y/2b_2$ , si può normalizzare il coefficiente di  $y$ . Si considera allora  $f_4 \in A(\mathcal{A}_2(\mathbb{C}))$  tale che:

$$f_4(\underline{x}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -y/2b_2 \end{pmatrix} \underline{x}.$$

Se si pone allora  $p_4 = p_3 \circ f_4$ , si ottiene finalmente che:

$$\mathcal{M}(p_4) = \mathcal{M}(p_3 \circ f_4) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 \\ 0 & -1/2 & 0 \end{pmatrix},$$

e dunque  $p_4$  rappresenta il polinomio  $x^2 - y$ , legato alla conica  $\mathcal{C}_2$ . Si conclude dunque che  $\mathcal{C}$  è affinementemente equivalente a  $\mathcal{C}_2$  tramite l'identità  $p_4 = p \circ (f_1 \circ f_2 \circ f_3 \circ f_4)$ .

Se invece  $\text{rg}(\mathcal{M}(p)) \leq 2$ ,  $b_2$  è necessariamente nullo (altrimenti  $\text{rg}(\mathcal{M}(p \circ f_1)) = 3$ ,  $\sharp$ ). Si cerca adesso una traslazione di vettore  $\underline{t} = (t_1, t_2)^\top$  tale che annulli la parte lineare del polinomio, ossia un vettore per cui  $\mathcal{A}(p_1)\underline{t} + (b_1, 0)^\top = \underline{0}$ . Un vettore di questo tipo è  $\underline{t} = (-b_1, 0)^\top$ .

Sia allora  $f_2 \in \mathcal{A}_2(\mathbb{C})$  per cui  $f_2(\underline{x}) = \underline{x} + \underline{t}$ , e sia  $p_2 = p_1 \circ f_2$ . Vale allora che:

$$\mathcal{M}(p_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c' \end{pmatrix},$$

dove  $c' := p_1(\underline{t})$ . Se  $\text{rg}(\mathcal{M}(p)) = 1$ ,  $c'$  è necessariamente nullo (altrimenti  $\mathcal{M}(p_2)$  non sarebbe congruente a  $\mathcal{M}(p)$ ,  $\sharp$ ), e dunque  $p_2$  è il polinomio  $x^2 = 0$ , legato alla conica  $\mathcal{C}_5$  (quindi  $\mathcal{C}$  è affinementemente equivalente a  $\mathcal{C}_5$  tramite l'identità  $p_2 = p \circ (f_1 \circ f_2)$ ).

Altrimenti, se  $\text{rg}(\mathcal{M}(p)) = 2$ ,  $c' \neq 0$ . Sia allora  $f_3 \in A(\mathcal{A}_2(\mathbb{C}))$  tale che:

$$f_3(\underline{x}) = \begin{pmatrix} \sqrt{-c'} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \underline{x}.$$

Se  $p_3 = p_2 \circ f_3$ , allora risulta che:

$$\mathcal{M}(p_3) = \mathcal{M}(p_2 \circ f_3) = -c' \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

e dunque  $p_3$  è il polinomio  $-c'(x^2 - 1)$ . Poiché  $c' \neq 0$ ,  $p_3$  ha lo stesso luogo di zeri di  $x^2 - 1$ , e dunque è legato alla conica  $\mathcal{C}_4$ . Allora  $\mathcal{C}$  è affinementemente equivalente a  $\mathcal{C}_4$  mediante l'identità  $p_3 = p \circ (f_1 \circ f_2 \circ f_3)$ , concludendo la classificazione delle coniche complesse.  $\square$

**Teorema** (classificazione delle coniche reali). Sia  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ . Allora ogni conica è affinementemente equivalente ad un'equazione canonica della seguente tabella, unicamente determinata dagli invarianti  $\text{rg}(\mathcal{M}(p))$ ,  $\text{rg}(\mathcal{A}(p))$ ,  $S(\mathcal{M}(p)) := |\iota_+(\mathcal{M}(p)) - \iota_-(\mathcal{M}(p))|$  e  $S(\mathcal{A}(p)) := |\iota_+(\mathcal{A}(p)) - \iota_-(\mathcal{A}(p))|$ .

	$\text{rg}(\mathcal{M}(p))$	$\text{rg}(\mathcal{A}(p))$	$S(\mathcal{M}(p))$	$S(\mathcal{A}(p))$	Equazione canonica
ellisse reale ( $\mathcal{C}_1$ )	3	2	1	2	$x^2 + y^2 - 1 = 0$
iperbole ( $\mathcal{C}_2$ )	3	2	1	0	$x^2 - y^2 - 1 = 0$
parabola ( $\mathcal{C}_3$ )	3	1	1	1	$x^2 - y = 0$
due rette reali incidenti ( $\mathcal{C}_4$ )	2	2	0	0	$x^2 - y^2 = 0$
due rette reali parallele ( $\mathcal{C}_5$ )	2	1	0	1	$x^2 - 1 = 0$
due rette reali coincidenti ( $\mathcal{C}_6$ )	1	1	1	1	$x^2 = 0$
ellisse immaginaria ( $\mathcal{C}_7$ )	3	2	3	2	$x^2 + y^2 + 1 = 0$
due rette complesse coniugate e incidenti in un punto reale ( $\mathcal{C}_8$ )	2	2	2	2	$x^2 + y^2 = 0$
due rette complesse coniugate, distinte e parallele ( $\mathcal{C}_9$ )	2	1	2	1	$x^2 + 1 = 0$

*Dimostrazione.* Come già visto precedentemente, la classificazione è completa perché sono comprese tutte le possibili scelte di invarianti, ed è anche ben definita, dacché due coniche distinte della tabella differiscono di almeno un'invariante.

Sia allora  $\mathcal{C}$  una conica relativa al polinomio  $p \in \mathbb{R}[x, y]$ . Sia  $\text{rg}(\mathcal{A}(p)) = 2$ . Se  $S(\mathcal{A}(p)) = 2$ , allora, per il teorema di Sylvester,  $\exists M \in \text{GL}(2, \mathbb{R}) \mid M^\top \mathcal{A}(p) M = \pm I_2$ . Sia allora  $f_1 \in A(\mathcal{A}_2(\mathbb{R}))$  l'affinità tale per cui  $f_1(\underline{x}) = M\underline{x} + \underline{t}$ , dove  $\underline{t} = -\mathcal{A}(p)^{-1}\underline{b}$ . Allora, detto  $p_1$  il polinomio monico ottenuto moltiplicando eventualmente per  $-1$  il polinomio  $p \circ f_1$ , vale che:

$$\mathcal{M}(p_1) = \left( \begin{array}{c|c} I_2 & 0 \\ \hline 0 & c \end{array} \right),$$

dove  $c \in \mathbb{R}$ . Se  $\text{rg}(\mathcal{M}(p)) = 2$ , allora  $c$  deve necessariamente essere nullo. In tal caso  $p_1(x, y) = x^2 + y^2$ , la cui conica corrispondente è data da due rette complesse coniugate e incidenti in un punto reale ( $\mathcal{C}_8$ ).

Altrimenti, se  $\text{rg}(\mathcal{M}(p)) = 3$ , si discutono due casi dipendentemente dal valore di  $S(\mathcal{M}(p))$ . Se  $S(\mathcal{M}(p)) = 3$ , allora  $c$  è necessariamente positivo. Pertanto, detta  $f_2 \in A(\mathcal{A}_2(\mathbb{R}))$  l'affinità tale per cui  $f_2(\underline{x}) = \sqrt{c}\underline{x}$  e detto  $p_2 = p_1 \circ f_2$ , vale che  $\mathcal{M}(p_2) = cI_3$ , ossia che  $p_2(x, y) = c(x^2 + y^2 + 1)$ . Si è

ottenuto dunque che  $\mathcal{C}$  è affinementemente equivalente all'ellisse immaginaria ( $\mathcal{C}_7$ ).

Si procede analogamente se  $S(\mathcal{M}(p)) = 1$ : in tal caso  $c$  è necessariamente negativo, e quindi  $f_2$  si costruisce moltiplicando per  $\sqrt{-c}$ : si ottiene in questo modo l'ellisse reale ( $\mathcal{C}_1$ ).

Sia ora invece  $S(\mathcal{A}(p)) = 1$ . Allora, per il teorema di Sylvester,  $\exists M \in \text{GL}(2, \mathbb{R}) \mid M^\top \mathcal{A}(p) M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ . Si costruisca allora l'affinità  $f_1 \in A(\mathcal{A}_2(\mathbb{R}))$  in modo tale che  $f_1(\underline{x}) = M\underline{x} + \underline{t}$ , dove  $\underline{t} = -\mathcal{A}(p)\underline{b}$ . Detto allora  $p_1 = p \circ f_1$ , vale che:

$$\mathcal{M}(p_1) = \left( \begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ \hline 0 & & c \end{array} \right).$$

Se  $\text{rg}(\mathcal{M}(p)) = 2$ , allora  $c$  è necessariamente nullo, e quindi  $p_1(x, y) = x^2 - y^2$ , da cui si deduce che  $\mathcal{C}$  è affinementemente equivalente alla conica generata da due rette reali incidenti ( $\mathcal{C}_4$ ). Se invece  $\text{rg}(\mathcal{M}(p)) = 3$ ,  $c$  non è nullo, e quindi si può costruire l'affinità  $f_2 \in A(\mathcal{A}_2(\mathbb{R}))$  data da  $f_2(\underline{x}) = \sqrt{|c|}\underline{x}$ . Allora, detto  $p_2 = f \circ p_1$ ,  $p_2$  può essere sempre ricondotto a un multiplo di  $x^2 - y^2 - 1$ : se infatti  $c < 0$ ,  $p_2$  lo è già, altrimenti è sufficiente applicare una terza affinità  $f_3(\underline{x}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \underline{x}$  e considerare  $p_3 = p_2 \circ f_3$ . Pertanto  $\mathcal{C}$  è in questo caso affinementemente equivalente a un'iperbole ( $\mathcal{C}_2$ ).

Sia adesso  $\text{rg}(\mathcal{A}(p)) = 1$ . Allora, per il teorema di Sylvester,  $\exists M \in \text{GL}(2, \mathbb{R}) \mid M^\top \mathcal{A}(p) M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ . Sia  $\mathcal{L}(p) = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ , con  $b_1, b_2 \in \mathbb{R}$ . Si costruisca  $f_1 \in A(\mathcal{A}_2(\mathbb{R}))$  in modo tale che  $f_1(\underline{x}) = M\underline{x}$ . Detto  $p_1 = p \circ f_1$ , vale che:

$$\mathcal{M}(p_1) = \mathcal{M}(p \circ f_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & b_1 \\ 0 & 0 & b_2 \\ b_1 & b_2 & c(p) \end{pmatrix}.$$

Si consideri dunque l'affinità  $f_2 \in A(\mathcal{A}_2(\mathbb{R}))$  costruita in modo tale che  $f_2(\underline{x}) = \underline{x} - (b_1, 0)^\top$ . Detto quindi  $p_2 = p_1 \circ f_2$ , vale che:

$$\mathcal{M}(p_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_2 \\ 0 & b_2 & c' \end{pmatrix},$$

dove  $c' \in \mathbb{R}$ . Se  $\text{rg}(\mathcal{M}(p)) = 3$ , allora  $b_2$  è necessariamente non nullo. Si cerca adesso di eliminare il termine noto  $c'$  mediante una traslazione: si consideri  $f_3 \in A(\mathcal{A}_2(\mathbb{R}))$  definita in modo tale che  $f_3(\underline{x}) = \underline{x} + (0, -\frac{c'}{2b_2})^\top$ , analogamente a come era stata impostata l'affinità nel caso complesso. Allora, detto  $p_3 = p_2 \circ f_3$ , vale che:



$$\mathcal{M}(p_3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_2 \\ 0 & b_2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Normalizzando il coefficiente di  $y$  mediante l'affinità  $f_4 \in A(\mathcal{A}_2(\mathbb{R}))$  tale per cui  $f_4(\underline{x}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2b_2} \end{pmatrix}$ , e detto  $p_4 = p_3 \circ f_4$ , si ottiene finalmente che  $p_4(x, y) = x^2 - y$ , ossia che  $\mathcal{C}$  è affinementemente equivalente a una parabola ( $\mathcal{C}_3$ ).

Se  $\text{rg}(\mathcal{M}(p)) = 2$ , allora necessariamente  $b_2 = 0$  e  $c \neq 0$ . Si costruisce dunque l'affinità  $f_3 \in A(\mathcal{A}_2(\mathbb{R}))$  definita in modo tale che  $f_3(\underline{x}) = \begin{pmatrix} \sqrt{|c'|} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  e si pone  $p_3 = p_2 \circ f_3$ . Se  $S(\mathcal{M}(p)) = 0$ , allora necessariamente  $c' < 0$ , e quindi vale che  $p_3$  è multiplo di  $x^2 - 1$ . Pertanto  $\mathcal{C}$  è affinementemente equivalente alla conica generata da due rette reali parallele ( $\mathcal{C}_5$ ). Se invece  $S(\mathcal{M}(p)) = 2$ ,  $c'$  è strettamente positivo, e quindi  $p_3$  è multiplo di  $x^2 + 1$ . In tal caso  $\mathcal{C}$  è affinementemente equivalente alla conica generata da due rette complesse coniugate, distinte e parallele ( $\mathcal{C}_9$ ).

Se invece  $\text{rg}(\mathcal{M}(p)) = 1$ , sia  $b_2$  che  $c$  devono essere nulli. Allora  $p_2(x, y) = x^2$ , da cui si deduce che  $\mathcal{C}$  è affinementemente equivalente alla conica generata da due rette reali coincidenti ( $\mathcal{C}_6$ ), completando la classificazione.  $\square$

**Osservazione.** È utile osservare che la classificazione delle coniche complesse è una mera conseguenza della classificazione delle coniche reali. È possibile infatti dedurre le coniche complesse “dimenticando” il segno nelle equazioni canoniche delle coniche reali. Formalmente è sufficiente costruire un'affinità in modo tale che una variabile venga moltiplicata per  $i$  per far sì che il segno scompaia.