

Note del corso di Geometria 1

Gabriel Antonio Videtta

16 giugno 2023

Polinomio minimo relativo a un vettore e matrice compagna

Definizione. Dato $f \in \text{End}(V)$, si definisce come $\text{val}_{f,v}$ l'applicazione lineare da $\mathbb{K}[x]$ in V tale che $\text{val}_{f,v}(p) = p(f)(v)$.

Osservazione. Vi sono varie proprietà che legano $\text{Ker } \text{val}_{f,v}$ a $\text{Ker } \text{val}_f$, ed in particolare il generatore monico di $\text{Ker } \text{val}_{f,v}$ $\varphi_{f,v}$ a quello φ_f di $\text{Ker } \text{val}_f$, ossia al polinomio minimo di f .

- ▶ $\varphi_{f,v} \mid \varphi_f, \forall v \in V$.
- ▶ $\varphi_f = \text{mcm}(\varphi_{f,v_1}, \dots, \varphi_{f,v_n})$, dove i v_1, \dots, v_n formano una base di V .

Esempio. Sia $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$. Allora si possono considerare le seguen-

ti catene:

- ▶ $e_1 \mapsto 2e_1 + e_2 + e_3 \mapsto 2(2e_1 + e_2 + e_3) + (-e_2 + 3e_3) + (3e_2 - e_3) = 4e_1 + 4e_2 + 4e_3 = 4Ae_1 - 4e_1$. Pertanto $A^2e_1 - 4Ae_1 + 4e_1 = 0$. Essendo Ae_1 e e_1 linearmente indipendenti, si conclude che $\varphi_{A,e_1}(x) = x^2 - 4x + 4 = (x-2)^2$.
- ▶ $e_2 \mapsto -e_2 + 3e_3 \mapsto -(-e_2 + 3e_3) + 3(3e_2 - e_3) = 10e_2 - 6e_3 = -2(-e_2 + 3e_3) + 8e_2$. Si conclude dunque che $\varphi_{A,e_2}(x) = x^2 + 2x - 8 = (x-2)(x+4)$.
- ▶ $e_3 \mapsto 3e_2 - e_3 \mapsto 3(-e_2 + 3e_3) - (3e_2 - e_3) = -6e_2 + 10e_3 = -2(3e_2 - e_3) + 8e_3$. Dunque $\varphi_{A,e_3}(x) = x^2 + 2x - 8 = \varphi_{A,e_2}(x)$.

Pertanto $\varphi_A(x) = \text{mcm}(\varphi_{A,e_1}(x), \varphi_{A,e_2}(x), \varphi_{A,e_3}(x)) = (x-2)^2(x+4)$.

Definizione. Si dice che un vettore \underline{v} è *ciclico* su f se il ciclo $\text{Span}(\underline{v}, f(\underline{v}), f^2(\underline{v}), \dots)$ coincide con V .

Osservazione. Riguardo all'esistenza di un vettore ciclico si possono fare alcune osservazioni.

- Se esiste un vettore \underline{v} ciclico rispetto a f , i primi $n = \dim V$ vettori del suo ciclo devono essere linearmente indipendenti (altrimenti non potrebbe generare V), e quindi $\varphi_{f,\underline{v}}$ deve avere grado n . Allora anche φ_f deve avere grado n , ossia lo stesso grado di p_f . Allora, dal momento che $\varphi_f \mid p_f$ e $\deg \varphi_f = \deg p_f$, deve valere necessariamente $\varphi_f = \pm p_f$.
- Dal momento che $\varphi_{f,\underline{v}}$ è monico, ha lo stesso grado di φ_f e lo divide, deve anche valere che $\varphi_{f,\underline{v}} = \varphi_f$.
- Nella base ordinata \mathcal{B} costituita dai primi n vettori del ciclo di \underline{v} , la matrice associata di f è della forma:

$$M_{\mathcal{B}}(f) = C_{\varphi_f} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \dots & \dots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \ddots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & 0 & -a_{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix},$$

dove gli a_i sono i coefficienti di $\varphi_f(x) = \varphi_{f,\underline{v}} = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0$. Tale matrice è detta **matrice compagna** del polinomio φ_f .

- Ogni polinomio $q \in \mathbb{K}[x]$ è il polinomio caratteristico, a meno del segno, della propria matrice compagna. In particolare $p_{C_q}(\lambda) = (-1)^n q(\lambda)$, dove $n := \deg q$. Infatti, se $n = 0$, $C_q = (-a_0) \implies p_{C_q}(\lambda) = -\lambda - a_0 = -(\lambda + a_0)$. Altrimenti, assumendo che la tesi sia vera per $i \leq n$, si osservi che:

$$p_{C_q}(\lambda) = (-1)^n a_0 - \lambda p_{C_{q'}}(\lambda), \quad q'(\lambda) = \frac{q(\lambda) - a_0}{\lambda},$$

ossia, dacché $\deg q' = n - 1 < n \implies p_{C_{q'}}(\lambda) = (-1)^{n-1} q'(\lambda)$,

$$p_{C_q}(\lambda) = (-1)^n a_0 - \lambda (-1)^{n-1} q'(\lambda) = (-1)^n a_0 - \lambda (-1)^{n-1} \frac{q(\lambda) - a_0}{\lambda} = q(\lambda).$$

- Inoltre, osservando che $\mathcal{B} = (\underline{e}_1, C_q \underline{e}_1 = \underline{e}_2, C_q^2 \underline{e}_1 = \underline{e}_3, \dots, C_q^{n-1} \underline{e}_1 = \underline{e}_n)$ è esattamente la base canonica di \mathbb{K}^n , essendo \mathcal{B} una base ciclica di C_q su \mathbb{K}^n deve valere che φ_{C_q} ha grado n , e quindi che $p_{C_q} = \pm \varphi_{C_q}$. Si conclude allora che $\varphi_{C_q} = q$.

Proposizione. Se \mathbb{K} è un campo infinito¹, esiste sempre un vettore $\underline{v} \in V$ tale che $\varphi_{f,\underline{v}} = \varphi_f$.

Dimostrazione. Si definisce il seguente insieme:

$$S = \{\varphi_{f,\underline{v}} \mid \underline{v} \in V\}.$$

Poiché S è un sottoinsieme dei divisori di ϕ_f , S è finito. In particolare $\exists v_1, \dots, v_n$ tali che $S = \{\varphi_{f,v_1}, \dots, \varphi_{f,v_n}\}$. Dal momento che ogni $\underline{v} \in V$ è associato ad un unico polinomio caratteristico, vale che $V = \bigcup_{i=1}^n \text{Ker } \varphi_{f,v_i}$. Tuttavia, se tutti i $\text{Ker } \varphi_{f,v_i}$ fossero propri, questo sarebbe impossibile, dal momento che uno spazio vettoriale fondato su un campo finito non può essere unione finita di sottospazi propri. Quindi $V = \text{Ker } \varphi_{f,v_i}$ per un i tale che $1 \leq i \leq n$. Allora $\varphi_f \mid \varphi_{f,v_i}$, da cui si ricava l'uguaglianza. \square

Teorema. Lo spazio V ammette un vettore ciclico su $f \in \text{End}(V)$ se e solo se $p_f = \pm \varphi_f$.

Dimostrazione. Si dimostrano le due implicazioni separatamente.

(\implies) Dall'osservazione precedente.

(\impliedby) Dalla proposizione precedente esiste sicuramente un vettore \underline{v} tale che $\varphi_{f,\underline{v}} = \varphi_f$. Allora, essendo $\varphi_f = \pm p_f$, deve valere che $p_f = \pm \varphi_{f,\underline{v}}$, ossia che la minima combinazione lineare linearmente dipendente di $\underline{v}, \dots, f^k(\underline{v})$ si può ottenere coinvolgendo almeno $n + 1$ termini (i.e. con $k \geq n$). Allora i vettori $\underline{v}, \dots, f^{n-1}(\underline{v})$ sono linearmente indipendenti, ed essendo in totale n formano una base di V . Pertanto $V = \text{Span}(\underline{v}, f(\underline{v}), \dots)$. \square

Esempio. Riprendendo l'esempio di prima, $\varphi_A(x) = (x-2)^2(x+4)$. Poiché $\deg p_A = 3$, allora $\varphi_A(x) = p_A(x)$. Allora per il teorema appena dimostrato deve necessariamente esistere un vettore ciclico di \mathbb{R}^3 su A .

In effetti, posto $\underline{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}$, si ottiene che $\underline{v}, A\underline{v}$ e $A^2\underline{v}$ sono linearmente

indipendenti, e sono dunque una base \mathcal{B} di \mathbb{R}^3 . In particolare, la matrice associata su questa base è la seguente:

¹In realtà la tesi è vera per qualsiasi campo, benché la dimostrazione che è stata fornita sia valida solo per campi infiniti.

$$M_{\mathcal{B}}(A) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -16 \\ 1 & 0 & 12 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

proprio come ci aspettavamo che venisse da una delle osservazioni iniziali, dal momento che $\varphi_A(x) = (x - 2)^2(x + 4) = x^3 - 12x + 16$.