

# Note del corso di Geometria 1

Gabriel Antonio Videtta

27 e 31 marzo 2023

## Proprietà e teoremi principali sul prodotto scalare

**Nota.** Nel corso del documento, per  $V$  si intenderà uno spazio vettoriale di dimensione finita  $n$  e per  $\varphi$  un suo prodotto scalare. Analogamente si intenderà lo stesso per  $V'$  e  $\varphi'$ .

**Proposizione** (formula delle dimensioni del prodotto scalare). Sia  $W \subseteq V$  un sottospazio di  $V$ . Allora vale la seguente identità:

$$\dim W + \dim W^\perp = \dim V + \dim(W \cap V^\perp).$$

*Dimostrazione.* Si consideri l'applicazione lineare  $a_\varphi$  introdotta precedentemente. Si osserva che  $W^\perp = \text{Ker}(i^\top \circ a_\varphi)$ , dove  $i : W \rightarrow V$  è tale che  $i(\underline{w}) = \underline{w}$ . Allora, per la formula delle dimensioni, vale la seguente identità:

$$\dim V = \dim W^\perp + \text{rg}(i^\top \circ a_\varphi). \quad (1)$$

Sia allora  $f = i^\top \circ a_\varphi$ . Si consideri ora l'applicazione  $g = a_\varphi \circ i : W \rightarrow V^*$ . Sia ora  $\mathcal{B}_W$  una base di  $W$  e  $\mathcal{B}_V$  una base di  $V$ . Allora le matrici associate di  $f$  e di  $g$  sono le seguenti:

$$(i) \quad M_{\mathcal{B}_W^*}^{\mathcal{B}_V}(f) = M_{\mathcal{B}_W^*}^{\mathcal{B}_V}(i^\top \circ a_\varphi) = \underbrace{M_{\mathcal{B}_W^*}^{\mathcal{B}_V}(i^\top)}_A \underbrace{M_{\mathcal{B}_V}^{\mathcal{B}_V}(a_\varphi)}_B = AB,$$

$$(ii) \quad M_{\mathcal{B}_V}^{\mathcal{B}_W}(g) = M_{\mathcal{B}_V}^{\mathcal{B}_W}(a_\varphi \circ i) = \underbrace{M_{\mathcal{B}_V}^{\mathcal{B}_V}(a_\varphi)}_B \underbrace{M_{\mathcal{B}_V}^{\mathcal{B}_W}(i)}_{A^\top} = BA^\top \overset{B^\top=B}{=} (AB)^\top.$$

Poiché  $\text{rg}(A) = \text{rg}(A^\top)$ , si deduce che  $\text{rg}(f) = \text{rg}(g) \implies \text{rg}(i^\top \circ a_\varphi) = \text{rg}(a_\varphi \circ i) = \text{rg}(a_\varphi|_W) = \dim W - \dim \text{Ker } a_\varphi|_W$ , ossia che:

$$\operatorname{rg}(i^\top \circ a_\varphi) = \dim W - \underbrace{\dim(W \cap \operatorname{Ker} a_\varphi)}_{V^\perp} = \dim W - \dim(W \cap V^\perp). \quad (2)$$

Si conclude allora, sostituendo l'equazione (2) nell'equazione (1), che  $\dim V = \dim W^\top + \dim W - \dim(W \cap V^\perp)$ , ossia la tesi.  $\square$

**Osservazione.** Si identifica  $\underline{w}^\perp$  come il sottospazio di tutti i vettori di  $V$  ortogonali a  $\underline{w}$ . In particolare, se  $W = \operatorname{Span}(\underline{w})$  è il sottospazio generato da  $\underline{w} \neq \underline{0}$ ,  $\underline{w} \in V$ , allora  $W^\perp = \underline{w}^\perp$ . Inoltre valgono le seguenti equivalenze:  $\underline{w} \notin W^\perp \iff \operatorname{Rad}(\varphi|_W) = W \cap W^\perp = \{\underline{0}\} \iff \underline{w} \text{ non è isotropo} \iff V = W \oplus W^\perp$ .

**Proposizione** (formula di polarizzazione). Se  $\operatorname{char} \mathbb{K} \neq 2$ , un prodotto scalare è univocamente determinato dalla sua forma quadratica  $q$ . In particolare vale la seguente identità:

$$\varphi(\underline{v}, \underline{w}) = \frac{q(\underline{v} + \underline{w}) - q(\underline{v}) - q(\underline{w})}{2}.$$

*Dimostrazione.* Si osserva che  $q(\underline{v} + \underline{w}) - q(\underline{v}) - q(\underline{w}) = 2\varphi(\underline{v}, \underline{w})$ , e quindi, poiché 2 è invertibile per ipotesi, si deduce che  $\varphi(\underline{v}, \underline{w}) = \frac{q(\underline{v} + \underline{w}) - q(\underline{v}) - q(\underline{w})}{2}$ .  $\square$

**Definizione.** Si definisce **base ortogonale** di  $V$  una base  $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n$  tale per cui  $\varphi(\underline{v}_i, \underline{v}_j) = 0 \iff i \neq j$ , ossia una base per cui la matrice associata del prodotto scalare è diagonale.

**Teorema** (di Lagrange). Ogni spazio vettoriale  $V$  su  $\mathbb{K}$  tale per cui  $\operatorname{char} \mathbb{K} \neq 2$  ammette una base ortogonale.

*Dimostrazione.* Si dimostra il teorema per induzione su  $n := \dim V$ . Per  $n \leq 1$ , la tesi è triviale (se esiste una base, tale base è già ortogonale). Sia allora il teorema vero per  $i \leq n$ . Se  $V$  ammette un vettore non isotropo  $\underline{w}$ , sia  $W = \operatorname{Span}(\underline{w})$  e si consideri la decomposizione  $V = W \oplus W^\perp$ . Poiché  $W^\perp$  ha dimensione  $n-1$ , per ipotesi induttiva ammette una base ortogonale. Inoltre, tale base è anche ortogonale a  $W$ , e quindi l'aggiunta di  $\underline{w}$  a questa base ne fa una base ortogonale di  $V$ . Se invece  $V$  non ammette vettori non isotropi, ogni forma quadratica è nulla, e quindi il prodotto scalare è nullo per la proposizione precedente. Allora in questo caso ogni base è una base ortogonale, completando il passo induttivo, e dunque la dimostrazione.  $\square$

**Nota.** D'ora in poi, nel corso del documento, si assumerà  $\text{char } \mathbb{K} \neq 2$ .

**Teorema** (di Sylvester, caso complesso). Sia  $\mathbb{K}$  un campo i cui elementi sono tutti quadrati di un altro elemento del campo (e.g.  $\mathbb{C}$ ). Allora esiste una base ortogonale  $\mathcal{B}$  tale per cui:

$$M_{\mathcal{B}}(\varphi) = \left( \begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right).$$

*Dimostrazione.* Per il teorema di Lagrange, esiste una base ortogonale  $\mathcal{B}'$  di  $V$ . Si riordini allora la base  $\mathcal{B}'$  in modo tale che la forma quadratica valutata nei primi elementi sia sempre diversa da zero. Allora, poiché ogni elemento di  $\mathbb{K}$  è per ipotesi quadrato di un altro elemento di  $\mathbb{K}$ , si sostituisca  $\mathcal{B}'$  con una base  $\mathcal{B}$  tale per cui, se  $q(\underline{v}_i) = 0$ ,  $\underline{v}_i \mapsto \underline{v}_i$ , e altrimenti  $\underline{v}_i \mapsto \frac{\underline{v}_i}{\sqrt{q(\underline{v}_i)}}$ . Allora  $\mathcal{B}$  è una base tale per cui la matrice associata del prodotto scalare in tale base è proprio come desiderata nella tesi, dove  $r$  è il numero di elementi tali per cui la forma quadratica valutata in essi sia diversa da zero.  $\square$

**Osservazione.**

► Si può immediatamente concludere che il rango è un invariante completo per la congruenza in un campo  $\mathbb{K}$  in cui tutti gli elementi sono quadrati, ossia che  $A \cong B \iff \text{rg}(A) = \text{rg}(B)$ , se  $A$  e  $B$  sono matrici simmetriche con elementi in  $\mathbb{K}$ .

Ogni matrice simmetrica rappresenta infatti un prodotto scalare, ed è pertanto congruente ad una matrice della forma desiderata nell'enunciato del teorema di Sylvester complesso. Poiché il rango è un invariante della congruenza, si ricava che  $r$  nella forma della matrice di Sylvester, rappresentando il rango, è anche il rango di ogni sua matrice congruente.

In particolare, se due matrici simmetriche hanno lo stesso rango, allora sono congruenti alla stessa matrice di Sylvester, e quindi, essendo la congruenza una relazione di equivalenza, sono congruenti a loro volta tra di loro.

► Due matrici simmetriche in  $\mathbb{K}$  con stesso rango, allora, non solo sono SD-equivalenti, ma sono anche congruenti.

► Ogni base ortogonale deve quindi avere lo stesso numero di vettori isotropi, dal momento che tale numero rappresenta la dimensione del radicale  $V^\perp$ .

**Definizione** (somma diretta ortogonale). Siano i sottospazi  $U$  e  $W \subseteq V$  in somma diretta. Allora si dice che  $U$  e  $W$  sono in **somma diretta ortogonale** rispetto al prodotto scalare  $\varphi$  di  $V$ , ossia che  $U \oplus W = U \oplus^\perp W$ , se  $\varphi(\underline{u}, \underline{w}) = 0 \forall \underline{u} \in U, \underline{w} \in W$ .

**Definizione** (cono isotropo). Si definisce **cono isotropo** di  $V$  rispetto al prodotto scalare  $\varphi$  il seguente insieme:

$$\text{CI}(\varphi) = \{\underline{v} \in V \mid \varphi(\underline{v}, \underline{v}) = 0\},$$

ossia l'insieme dei vettori isotropi di  $V$ .

**Nota.** La notazione  $\varphi > 0$  indica che  $\varphi$  è definito positivo (si scrive  $\varphi \geq 0$  se invece è semidefinito positivo). Analogamente  $\varphi < 0$  indica che  $\varphi$  è definito negativo (e  $\varphi \leq 0$  indica che è semidefinito negativo).

**Esercizio 1.** Sia  $\text{char } \mathbb{K} \neq 2$ . Siano  $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_k \in V$  e sia  $M = (\varphi(\underline{v}_i, \underline{v}_j))_{i,j=1-k} \in M(k, \mathbb{K})$ , dove  $\varphi$  è un prodotto scalare di  $V$ . Sia inoltre  $W = \text{Span}(\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_k)$ . Si dimostrino allora le seguenti affermazioni.

- (i) Se  $M$  è invertibile, allora  $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_k$  sono linearmente indipendenti.
- (ii) Siano  $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_k$  linearmente indipendenti. Allora  $M$  è invertibile  $\iff \varphi|_W$  è non degenere  $\iff W \cap W^\perp = \{\underline{0}\}$ .
- (iii) Siano  $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_k$  a due a due ortogonali tra loro. Allora  $M$  è invertibile  $\iff$  nessun vettore  $\underline{v}_i$  è isotropo.
- (iv) Siano  $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_k$  a due a due ortogonali tra loro e siano anche linearmente indipendenti. Allora  $M$  è invertibile  $\implies$  si può estendere  $\mathcal{B}_W = \{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_k\}$  a una base ortogonale di  $V$ .
- (v) Sia  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ . Sia inoltre  $\varphi > 0$ . Allora  $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_k$  sono linearmente indipendenti  $\iff M$  è invertibile.
- (vi) Sia  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ . Sia ancora  $\varphi > 0$ . Allora se  $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_k$  sono a due a due ortogonali e sono tutti non nulli, sono anche linearmente indipendenti.

*Soluzione.*

- (i) Siano  $a_1, \dots, a_k \in \mathbb{K}$  tali che  $a_1 \underline{v}_1 + \dots + a_k \underline{v}_k = \underline{0}$ . Vale in particolare che  $\underline{0} = \varphi(\underline{v}_i, \underline{0}) = \varphi(\underline{v}_i, a_1 \underline{v}_1 + \dots + a_k \underline{v}_k) = \sum_{j=1}^k a_j \varphi(\underline{v}_i, \underline{v}_j) \forall 1 \leq i \leq k$ . Allora  $\sum_{j=1}^k a_j M^j = \underline{0}$ . Dal momento che  $M$  è invertibile,  $\text{rg}(M) =$

$k$ , e quindi l'insieme delle colonne di  $M$  è linearmente indipendente, da cui si ricava che  $a_j = 0 \forall 1 \leq j \leq k$ , e quindi che  $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_k$  sono linearmente indipendenti.

- (ii) Poiché  $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_k$  sono linearmente indipendenti, tali vettori formano una base di  $W$ , detta  $\mathcal{B}$ . In particolare, allora, vale che  $M = M_{\mathcal{B}}(\varphi|_W)$ . Pertanto, se  $M$  è invertibile,  $\text{Rad}(\varphi|_W) = \text{Ker } M = \{\underline{0}\}$ , e dunque  $\varphi|_W$  è non degenere. Se invece  $\varphi|_W$  è non degenere,  $\{\underline{0}\} = \text{Rad}(\varphi|_W) = W \cap W^\perp$ . Infine, se  $W \cap W^\perp = \{\underline{0}\}$ ,  $\{\underline{0}\} = W \cap W^\perp = \text{Rad}(\varphi|_W) = \text{Ker } M$ , e quindi  $M$  è iniettiva, e dunque invertibile.
- (iii) Dal momento che  $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_k$  sono ortogonali tra loro,  $M$  è una matrice diagonale. Pertanto  $M$  è invertibile se e solo se ogni suo elemento diagonale è diverso da 0, ossia se  $\varphi(\underline{v}_i, \underline{v}_i) \neq 0 \forall 1 \leq i \leq k$ , e dunque se e solo se nessun vettore  $\underline{v}_i$  è isotropo.
- (iv) Se  $M$  è invertibile, da (ii) si deduce che  $\text{Rad}(\varphi|_W) = W \cap W^\perp = \{\underline{0}\}$ , e quindi che  $W$  e  $W^\perp$  sono in somma diretta. Inoltre, per la formula delle dimensioni del prodotto scalare,  $\dim W + \dim W^\perp = \dim V + \underbrace{\dim(W \cap V^\perp)}_{\leq \dim(W \cap W^\perp) = 0} = \dim V$ . Pertanto  $V = W \oplus^\perp W^\perp$ .

Allora, dacché  $\text{char } \mathbb{K} \neq 2$ , per il teorema di Lagrange,  $W^\perp$  ammette una base ortogonale  $\mathcal{B}_{W^\perp}$ . Si conclude dunque che  $\mathcal{B} = \mathcal{B}_W \cup \mathcal{B}_{W^\perp}$  è una base ortogonale di  $V$ .

- (v) Se  $M$  è invertibile, da (i)  $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_k$  sono linearmente indipendenti. Siano ora invece  $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_k$  linearmente indipendenti per ipotesi. Siano  $a_1, \dots, a_k \in \mathbb{K}$  tali che  $a_1 M^1 + \dots + a_k M^k = 0$ , allora  $a_1 \varphi(\underline{v}_i, \underline{v}_1) + \dots + a_k \varphi(\underline{v}_i, \underline{v}_k) = 0 \forall 1 \leq i \leq k$ . Pertanto, detto  $\underline{v} = a_1 \underline{v}_1 + \dots + a_k \underline{v}_k$ , si ricava che:

$$\varphi(\underline{v}, \underline{v}) = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k a_j \varphi(\underline{v}_i, \underline{v}_j) = 0.$$

Tuttavia questo è possibile solo se  $\underline{v} = a_1 \underline{v}_1 + \dots + a_k \underline{v}_k = 0$ . Dal momento che  $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_k$  sono linearmente indipendenti, si conclude che  $a_1 = \dots = a_k = 0$ , ossia che le colonne di  $M$  sono tutte linearmente indipendenti e quindi che  $\text{rg}(M) = k \implies M$  è invertibile.

(vi) Poiché  $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_k$  sono ortogonali a due a due tra loro,  $M$  è una matrice diagonale. Inoltre, dacché  $\varphi > 0$  e  $\underline{v}_i \neq \underline{0} \forall 1 \leq i \leq k$ , gli elementi diagonali di  $M$  sono sicuramente tutti diversi da zero, e quindi  $\det(M) \neq 0 \implies M$  è invertibile. Allora, per il punto (v),  $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_k$  sono linearmente indipendenti.

**Definizione** (indici e segnatura). Data una base ortogonale  $\mathcal{B}$  di  $V$  rispetto al prodotto scalare  $\varphi$ , si definiscono i seguenti indici:

$$\begin{aligned} \iota_+(\varphi) &= \max\{\dim W \mid W \subseteq V \text{ e } \varphi|_W > 0\}, & \text{(indice di positività)} \\ \iota_-(\varphi) &= \max\{\dim W \mid W \subseteq V \text{ e } \varphi|_W < 0\}, & \text{(indice di negatività)} \\ \iota_0(\varphi) &= \dim V^\perp. & \text{(indice di nullità)} \end{aligned}$$

Quando il prodotto scalare  $\varphi$  è noto dal contesto, si semplifica la notazione scrivendo solo  $\iota_+$ ,  $\iota_-$  e  $\iota_0$ . In particolare, la terna  $\sigma(\varphi) = \sigma = (i_+, i_-, i_0)$  è detta **segnatura** del prodotto  $\varphi$ .

**Teorema** (di Sylvester, caso reale). Sia  $\mathbb{K}$  un campo ordinato i cui elementi positivi sono tutti quadrati (e.g.  $\mathbb{R}$ ). Allora esiste una base ortogonale  $\mathcal{B}$  tale per cui:

$$M_{\mathcal{B}}(\varphi) = \left( \begin{array}{c|c|c} I_{\iota_+} & 0 & 0 \\ \hline 0 & -I_{\iota_-} & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \cdot I_{\iota_0} \end{array} \right).$$

Inoltre, per ogni base ortogonale, esistono esattamente  $\iota_+$  vettori della base con forma quadratica positiva,  $\iota_-$  con forma negativa e  $\iota_0$  con forma nulla.

*Dimostrazione.* Per il teorema di Lagrange, esiste una base ortogonale  $\mathcal{B}'$  di  $V$ . Si riordini la base in modo tale che la forma quadratica valutata nei primi elementi sia strettamente positiva, che nei secondi elementi sia strettamente negativa e che negli ultimi sia nulla. Si sostituisca  $\mathcal{B}'$  con una base  $\mathcal{B}$  tale per cui, se  $q(\underline{v}_i) > 0$ , allora  $\underline{v}_i \mapsto \frac{\underline{v}_i}{\sqrt{q(\underline{v}_i)}}$ ; se  $q(\underline{v}_i) < 0$ , allora  $\underline{v}_i \mapsto \frac{\underline{v}_i}{\sqrt{-q(\underline{v}_i)}}$ ; altrimenti  $\underline{v}_i \mapsto \underline{v}_i$ . Si è allora trovata una base la cui matrice associata del prodotto scalare è come desiderata nella tesi.

Sia ora  $\mathcal{B}$  una qualsiasi base ortogonale di  $V$ . Siano inoltre  $a$  il numero di vettori della base con forma quadratica positiva,  $b$  il numero di vettori con forma negativa e  $c$  quello dei vettori con forma nulla. Si consideri  $W_+ = \text{Span}(\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_a)$ ,  $W_- = \text{Span}(\underline{v}_{a+1}, \dots, \underline{v}_b)$ ,  $W_0 = \text{Span}(\underline{v}_{b+1}, \dots, \underline{v}_c)$ .

Sia  $M = M_{\mathcal{B}}(\varphi)$ . Si osserva che  $c = n - \text{rg}(M) = \dim \text{Ker}(M) = \dim V^\perp = \iota_0$ . Inoltre  $\forall \underline{v} \in W_+$ , dacché  $\mathcal{B}$  è ortogonale,  $q(\underline{v}) = q(\sum_{i=1}^a \alpha_i \underline{v}_i) = \sum_{i=1}^a \alpha_i^2 q(\underline{v}_i) > 0$ , e quindi  $\varphi|_{W_+} > 0$ , da cui  $\iota_+ \geq a$ . Analogamente  $\iota_- \geq b$ .

Si mostra ora che è impossibile che  $\iota_+ > a$ . Se così infatti fosse, sia  $W$  tale che  $\dim W = \iota_+$  e che  $\varphi|_W > 0$ .  $\iota_+ + b + c$  sarebbe maggiore di  $a + b + c = n := \dim V$ . Quindi, per la formula di Grassman,  $\dim(W + W_- + W_0) = \dim W + \dim(W_- + W_0) - \dim(W \cap (W_- + W_0)) \implies \dim(W \cap (W_- + W_0)) = \dim W + \dim(W_- + W_0) - \dim(W + W_- + W_0) > 0$ , ossia esisterebbe  $\underline{v} \neq \{0\} \mid \underline{v} \in W \cap (W_- + W_0)$ . Tuttavia questo è assurdo, dacché dovrebbe valere sia  $q(\underline{v}) > 0$  che  $q(\underline{v}) < 0$ ,  $\neq$ . Quindi  $\iota_+ = a$ , e analogamente  $\iota_- = b$ .  $\square$

**Definizione.** Si dice **base di Sylvester** una base di  $V$  tale per cui la matrice associata di  $\varphi$  sia esattamente nella forma vista nell'enunciato del teorema di Sylvester. Analogamente si definisce tale matrice come **matrice di Sylvester**.

**Osservazione.**

► Come conseguenza del teorema di Sylvester reale, si osserva che la segnatura di una matrice simmetrica reale è invariante per cambiamento di base, se la base è ortogonale.

► La segnatura è un invariante completo per la congruenza nel caso reale. Se infatti due matrici hanno la stessa segnatura, queste sono entrambe congruenti alla stessa matrice di Sylvester, e quindi, essendo la congruenza una relazione di equivalenza, sono congruenti tra loro. Analogamente vale il viceversa, dal momento che ogni base ortogonale di due matrici congruenti deve contenere gli stessi numeri  $\iota_+$ ,  $\iota_-$  e  $\iota_0$  di vettori di base con forma quadratica positiva, negativa e nulla.

► Se  $\underline{w}_1, \dots, \underline{w}_k$  sono tutti i vettori di una base ortogonale  $\mathcal{B}$  con forma quadratica nulla, si osserva che  $W = \text{Span}(\underline{w}_1, \dots, \underline{w}_k)$  altro non è che  $V^\perp$  stesso.

Infatti, come visto anche nella dimostrazione del teorema di Sylvester reale, vale che  $\dim W = \dim \text{Ker}(M_{\mathcal{B}}(\varphi)) = \dim V^\perp$ . Sia allora la base  $\mathcal{B} = \{\underline{w}_1, \dots, \underline{w}_k, \underline{v}_{k+1}, \dots, \underline{v}_n\}$  un'estensione di  $\{\underline{w}_1, \dots, \underline{w}_k\}$ . Se  $\underline{w} \in W$  e  $\underline{v} \in V$ ,  $\varphi(\underline{w}, \underline{v}) = \varphi(\sum_{i=1}^k \alpha_i \underline{w}_i, \sum_{i=1}^k \beta_i \underline{w}_i + \sum_{i=k+1}^n \beta_i \underline{v}_i) = \sum_{i=1}^k \alpha_i \beta_i q(\underline{w}_i) = 0$  (dove  $\alpha_i$  e  $\beta_i \in \mathbb{K}$  rappresentano la  $i$ -esima coordinata di  $\underline{w}$  e  $\underline{v}$  nella base

$\mathcal{B}$ ), e quindi  $W \subseteq V^\perp$ . Si conclude allora, tramite l'uguaglianza dimensionale, che  $W = V^\perp$ .

► Poiché  $\dim \text{Ker}(\varphi) = \iota_0$ , vale in particolare che  $\text{rg}(\varphi) = n - \iota_0 = \iota_+ + \iota_-$  (infatti vale che  $n = \iota_+ + \iota_- + \iota_0$ , dal momento che  $n$  rappresenta il numero di elementi di una base ortogonale).

► Se  $V = U \oplus^\perp W$ , allora  $\iota_+(\varphi) = \iota_+(\varphi|_U) + \iota_+(\varphi|_W)$ . Analogamente vale la stessa cosa per gli altri indici. Infatti, prese due basi ortogonali  $\mathcal{B}_U$ ,  $\mathcal{B}_W$  di  $U$  e  $W$ , la loro unione  $\mathcal{B}$  è una base ortogonale di  $V$ . Pertanto il numero di vettori della base  $\mathcal{B}$  con forma quadratica positiva è esattamente  $\iota_+(\varphi|_U) + \iota_+(\varphi|_W)$ .

**Definizione** (isometria tra due spazi vettoriali). Dati due spazi vettoriali  $(V, \varphi)$  e  $(V', \varphi')$  dotati di prodotto scalare sullo stesso campo  $\mathbb{K}$ , si dice che  $V$  e  $V'$  sono **isometrici** se esiste un isomorfismo  $f$ , detto *isometria*, che preserva tali che prodotti, ossia tale che:

$$\varphi(\underline{v}, \underline{w}) = \varphi'(f(\underline{v}), f(\underline{w})).$$

**Esercizio 2.** Sia  $f : V \rightarrow V'$  un isomorfismo. Allora  $f$  è un'isometria  $\iff \forall$  base  $\mathcal{B} = \{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\}$  di  $V$ ,  $\mathcal{B}' = \{f(\underline{v}_1), \dots, f(\underline{v}_n)\}$  è una base di  $V'$  e  $\varphi(\underline{v}_i, \underline{v}_j) = \varphi'(f(\underline{v}_i), f(\underline{v}_j)) \forall 1 \leq i, j \leq n \iff \exists$  base  $\mathcal{B} = \{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\}$  di  $V$  tale che  $\mathcal{B}' = \{f(\underline{v}_1), \dots, f(\underline{v}_n)\}$  è una base di  $V'$  e  $\varphi(\underline{v}_i, \underline{v}_j) = \varphi'(f(\underline{v}_i), f(\underline{v}_j)) \forall 1 \leq i, j \leq n$ .

*Soluzione.* Se  $f$  è un'isometria, detta  $\mathcal{B}$  una base di  $V$ ,  $\mathcal{B}' = f(\mathcal{B})$  è una base di  $V'$  dal momento che  $f$  è anche un isomorfismo. Inoltre, dacché  $f$  è un'isometria, vale sicuramente che  $\varphi(\underline{v}_i, \underline{v}_j) = \varphi'(f(\underline{v}_i), f(\underline{v}_j)) \forall 1 \leq i, j \leq n$ .

Sia ora assunto per ipotesi che  $\forall$  base  $\mathcal{B} = \{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\}$  di  $V$ ,  $\mathcal{B}' = \{f(\underline{v}_1), \dots, f(\underline{v}_n)\}$  è una base di  $V'$  e  $\varphi(\underline{v}_i, \underline{v}_j) = \varphi'(f(\underline{v}_i), f(\underline{v}_j)) \forall 1 \leq i, j \leq n$ . Allora, analogamente a prima, detta  $\mathcal{B} = \{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\}$  una base di  $V$ ,  $\mathcal{B}' = f(\mathcal{B})$  è una base di  $V'$ , e in quanto tale, per ipotesi, è tale che  $\varphi(\underline{v}_i, \underline{v}_j) = \varphi'(f(\underline{v}_i), f(\underline{v}_j)) \forall 1 \leq i, j \leq n$ .

Sia infine assunto per ipotesi che  $\exists$  base  $\mathcal{B} = \{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\}$  di  $V$  tale che  $\mathcal{B}' = \{f(\underline{v}_1), \dots, f(\underline{v}_n)\}$  è una base di  $V'$  e  $\varphi(\underline{v}_i, \underline{v}_j) = \varphi'(f(\underline{v}_i), f(\underline{v}_j)) \forall 1 \leq i, j \leq n$ . Siano  $\underline{v}, \underline{w} \in V$ . Allora  $\exists a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n \in \mathbb{K}$  tali che  $\underline{v} = a_1 \underline{v}_1 + \dots + a_n \underline{v}_n$  e  $\underline{w} = b_1 \underline{v}_1 + \dots + b_n \underline{v}_n$ . Si ricava pertanto che:

$$\varphi'(f(\underline{v}), f(\underline{w})) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_i b_j \varphi'(f(\underline{v}_i), f(\underline{v}_j)) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_i b_j \varphi(\underline{v}_i, \underline{v}_j) = \varphi(\underline{v}, \underline{w}),$$

da cui la tesi.

**Proposizione.** Sono equivalenti le seguenti affermazioni:

- (i)  $V$  e  $V'$  sono isometrici;
- (ii)  $\forall$  base  $\mathcal{B}$  di  $V$ , base  $\mathcal{B}'$  di  $V'$ ,  $M_{\mathcal{B}}(\varphi)$  e  $M_{\mathcal{B}'}(\varphi')$  sono congruenti;
- (iii)  $\exists$  base  $\mathcal{B}$  di  $V$ , base  $\mathcal{B}'$  di  $V'$  tale che  $M_{\mathcal{B}}(\varphi)$  e  $M_{\mathcal{B}'}(\varphi')$  sono congruenti.

*Dimostrazione.* Se  $V$  e  $V'$  sono isometrici, sia  $f : V \rightarrow V'$  un'isometria. Sia  $\mathcal{B} = \{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\}$  una base di  $V$ . Allora, poiché  $f$  è anche un isomorfismo,  $\mathcal{B}' = f(\mathcal{B})$  è una base di  $V'$  tale che  $\varphi(\underline{v}_i, \underline{v}_j) = \varphi'(f(\underline{v}_i), f(\underline{v}_j)) \forall 1 \leq i, j \leq n$ . Pertanto  $M_{\mathcal{B}}(\varphi) = M_{\mathcal{B}'}(\varphi')$ . Si conclude allora che, cambiando base in  $V$  (o in  $V'$ ), la matrice associata al prodotto scalare varia per congruenza dalla formula di cambiamento di base per il prodotto scalare, da cui si ricava che per ogni scelta di  $\mathcal{B}$  base di  $V$  e di  $\mathcal{B}'$  base di  $V'$ ,  $M_{\mathcal{B}}(\varphi) \cong M_{\mathcal{B}'}(\varphi')$ . Inoltre, se tale risultato è vero per ogni  $\mathcal{B}$  base di  $V$  e di  $\mathcal{B}'$  base di  $V'$ , dal momento che sicuramente esistono due basi  $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$  di  $V$  e  $V'$ , vale anche (ii)  $\implies$  (iii).

Si dimostra ora (iii)  $\implies$  (i). Per ipotesi  $M_{\mathcal{B}}(\varphi) \cong M_{\mathcal{B}'}(\varphi')$ , quindi  $\exists P \in \text{GL}(n, \mathbb{K}) \mid M_{\mathcal{B}'}(\varphi') = P^\top M_{\mathcal{B}}(\varphi) P$ . Allora  $\exists \mathcal{B}''$  base di  $V'$  tale che  $P = M_{\mathcal{B}''}^{\mathcal{B}'}$ , da cui  $P^{-1} = M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}''}(\varphi)$ . Per la formula di cambiamento di base del prodotto scalare,  $M_{\mathcal{B}''}(\varphi) = (P^{-1})^\top M_{\mathcal{B}'}(\varphi') P^{-1} = M_{\mathcal{B}}(\varphi)$ . Detta  $\mathcal{B}'' = \{\underline{w}_1, \dots, \underline{w}_n\}$ , si costruisce allora l'isomorfismo  $f : V \rightarrow V'$  tale che  $f(\underline{v}_i) = \underline{w}_i \forall 1 \leq i \leq n$ . Dal momento che per costruzione  $M_{\mathcal{B}}(\varphi) = M_{\mathcal{B}''}(\varphi')$ ,  $\varphi(\underline{v}_i, \underline{v}_j) = \varphi'(\underline{w}_i, \underline{w}_j) = \varphi'(f(\underline{v}_i), f(\underline{v}_j)) \forall 1 \leq i, j \leq n$ . Si conclude dunque che  $\varphi(\underline{v}, \underline{w}) = \varphi'(f(\underline{v}), f(\underline{w})) \forall \underline{v}, \underline{w} \in V$ , e dunque che  $f$  è un'isometria, come desiderato dalla tesi.  $\square$

**Proposizione.**  $(V, \varphi)$  e  $(V', \varphi')$  spazi vettoriali su  $\mathbb{R}$  sono isometrici  $\iff \varphi$  e  $\varphi'$  hanno la stessa segnatura.

*Dimostrazione.*

( $\implies$ ) Per la precedente proposizione, esistono due basi  $\mathcal{B}$  e  $\mathcal{B}'$ , una di  $V$  e una di  $V'$ , tali che  $M_{\mathcal{B}}(\varphi) \cong M_{\mathcal{B}'}(\varphi)$ . Allora queste due matrici condividono

la stessa segnatura, e così quindi anche  $\varphi$  e  $\varphi'$ .

( $\Leftarrow$ ) Se  $\varphi$  e  $\varphi'$  hanno la stessa segnatura, esistono due basi  $\mathcal{B} = \{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\}$  e  $\mathcal{B}' = \{\underline{w}_1, \dots, \underline{w}_n\}$ , una di  $V$  e una di  $V'$ , tali che  $M = M_{\mathcal{B}}(\varphi) = M_{\mathcal{B}'}(\varphi')$  e che  $M$  è una matrice di Sylvester. Allora si costruisce  $f : V \rightarrow V'$  tale che  $f(\underline{v}_i) = \underline{w}_i$ . Esso è un isomorfismo, e per costruzione  $\varphi(\underline{v}_i, \underline{v}_j) = \varphi'(\underline{w}_i, \underline{w}_j) = \varphi'(f(\underline{v}_i), f(\underline{v}_j)) \forall 1 \leq i, j \leq n$ , da cui si conclude che  $\varphi(\underline{v}, \underline{w}) = \varphi'(f(\underline{v}), f(\underline{w})) \forall \underline{v}, \underline{w} \in V$ , e quindi che  $V$  e  $V'$  sono isometrici.  $\square$

**Definizione** (sottospazio isotropo). Sia  $W$  un sottospazio di  $V$ . Allora  $W$  si dice **sottospazio isotropo** di  $V$  se  $\varphi|_W = 0$ .

**Osservazione.**

- ▶  $V^\perp$  è un sottospazio isotropo di  $V$ .
- ▶  $\underline{v}$  è un vettore isotropo  $\iff W = \text{Span}(\underline{v})$  è un sottospazio isotropo di  $V$ .
- ▶  $W \subseteq V$  è isotropo  $\iff W \subseteq W^\perp$ .

**Proposizione.** Sia  $\varphi$  non degenere. Se  $W$  è un sottospazio isotropo di  $V$ , allora  $\dim W \leq \frac{1}{2} \dim V$ .

*Dimostrazione.* Poiché  $W$  è un sottospazio isotropo di  $V$ ,  $W \subseteq W^\perp \implies \dim W \leq \dim W^\perp$ . Allora, poiché  $\varphi$  è non degenere,  $\dim W + \dim W^\perp = \dim V$ ,  $\dim W \leq \dim V - \dim W$ , da cui  $\dim W \leq \frac{1}{2} \dim V$ .  $\square$

**Definizione** (indice di Witt). Si definisce **indice di Witt**  $W(\varphi)$  di  $(V, \varphi)$  come la massima dimensione di un sottospazio isotropo.

**Osservazione.**

- ▶ Se  $\varphi > 0$  o  $\varphi < 0$ ,  $W(\varphi) = 0$ .

**Proposizione.** Sia  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ . Sia  $\varphi$  non degenere e sia  $\sigma(\varphi) = (\iota_+(\varphi), \iota_-(\varphi), 0)$ . Allora  $W(\varphi) = \min\{\iota_+(\varphi), \iota_-(\varphi)\}$ .

*Dimostrazione.* Senza perdita di generalità si assuma  $\iota_-(\varphi) \leq \iota_+(\varphi)$  (il caso  $\iota_-(\varphi) > \iota_+(\varphi)$  è analogo). Sia  $W$  un sottospazio con  $\dim W > \iota_-(\varphi)$ . Sia  $W^+$  un sottospazio con  $\dim W^+ = \iota_+(\varphi)$  e  $\varphi|_{W^+} > 0$ . Allora, per la formula di Grassmann,  $\dim W + \dim W^+ > n \implies \dim W + \dim W^+ > \dim W + \dim W^+ - \dim(W \cap W^+) \implies \dim(W \cap W^+) > 0$ . Quindi  $\exists \underline{w} \in W$ ,  $\underline{w} \neq \underline{0}$  tale che  $\varphi(\underline{w}, \underline{w}) > 0$ , da cui si ricava che  $W$  non è isotropo. Pertanto  $W(\varphi) \leq \iota_-(\varphi)$ .

Sia  $a := \iota_+(\varphi)$  e sia  $b := \iota_-(\varphi)$ . Sia ora  $\mathcal{B} = \{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_a, \underline{w}_1, \dots, \underline{w}_b\}$  una base tale per cui  $M_{\mathcal{B}}(\varphi)$  è la matrice di Sylvester per  $\varphi$ . Siano  $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_a$  tali che  $\varphi(\underline{v}_i, \underline{v}_i) = 1$  con  $1 \leq i \leq a$ . Analogamente siano  $\underline{w}_1, \dots, \underline{w}_b$  tali che  $\varphi(\underline{w}_i, \underline{w}_i) = -1$  con  $1 \leq i \leq b$ . Detta allora  $\mathcal{B}' = \{\underline{v}_1' := \underline{v}_1 + \underline{w}_1, \dots, \underline{v}_b' := \underline{v}_b + \underline{w}_b\}$ , sia  $W = \text{Span}(\mathcal{B}')$ .

Si osserva che  $\mathcal{B}'$  è linearmente indipendente, e dunque che  $\dim W = \iota_-$ . Inoltre  $\varphi(\underline{v}_i', \underline{v}_j') = \varphi(\underline{v}_i + \underline{w}_i, \underline{v}_j + \underline{w}_j)$ . Se  $i \neq j$ , allora  $\varphi(\underline{v}_i', \underline{v}_j') = 0$ , dal momento che i vettori di  $\mathcal{B}$  sono a due a due ortogonali tra loro. Se invece  $i = j$ , allora  $\varphi(\underline{v}_i', \underline{v}_i') = \varphi(\underline{v}_i, \underline{v}_i) + \varphi(\underline{w}_i, \underline{w}_i) = 1 - 1 = 0$ . Quindi  $M_{\mathcal{B}'}(\varphi|_W) = 0$ , da cui si conclude che  $\varphi|_W = 0$ . Pertanto  $W(\varphi) \geq i_-(\varphi)$ , e quindi  $W(\varphi) = i_-(\varphi)$ , da cui la tesi.  $\square$